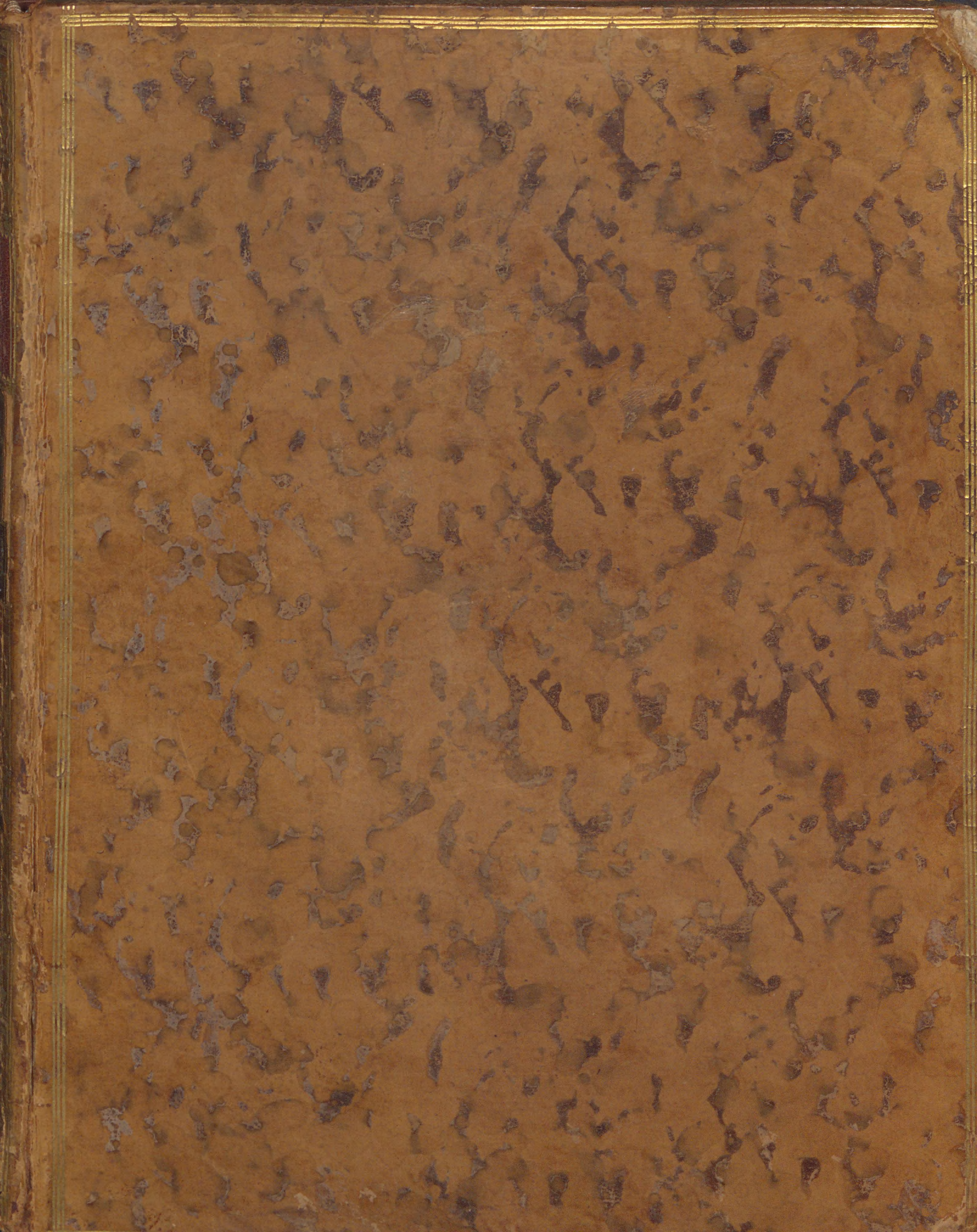
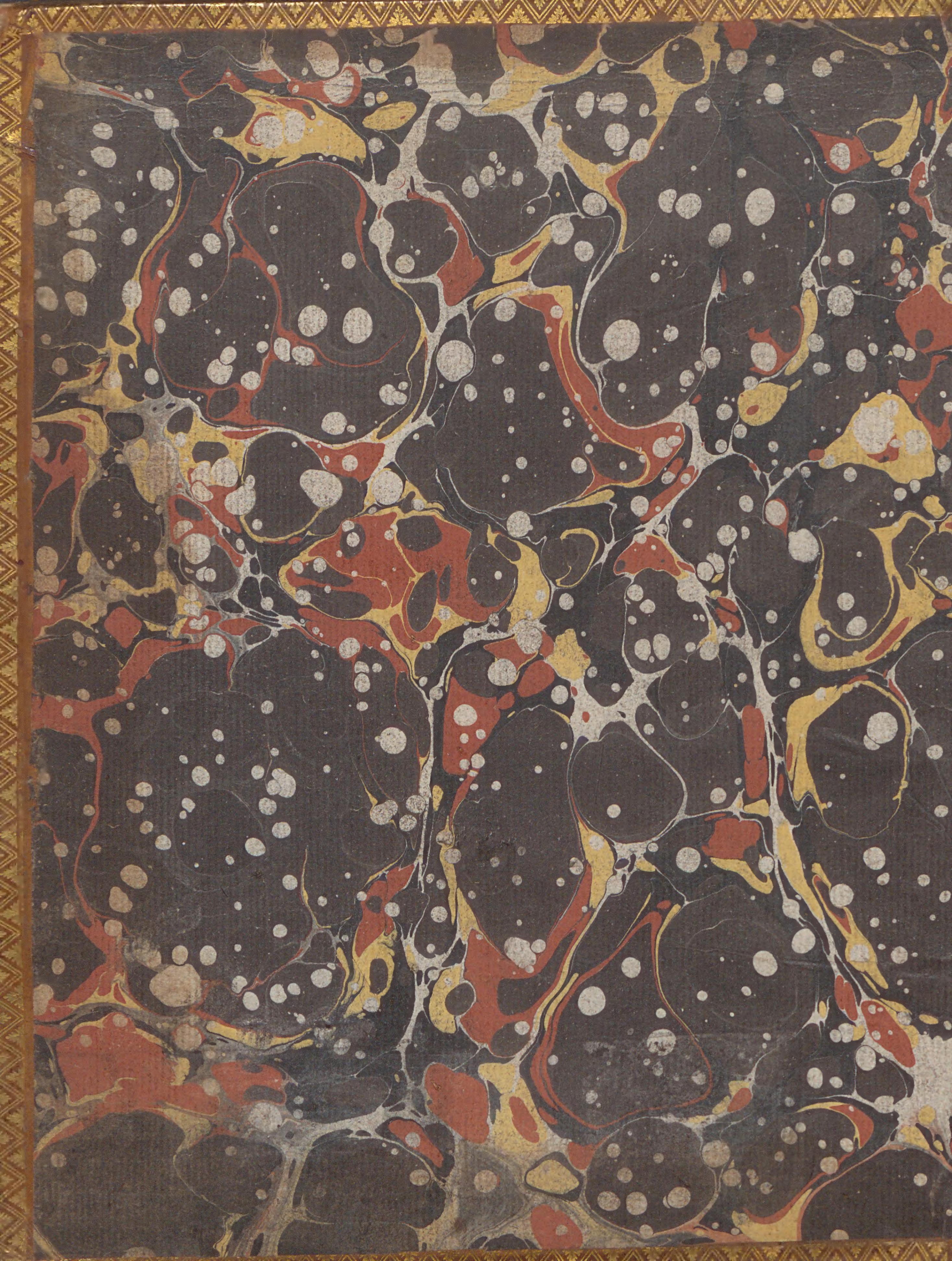
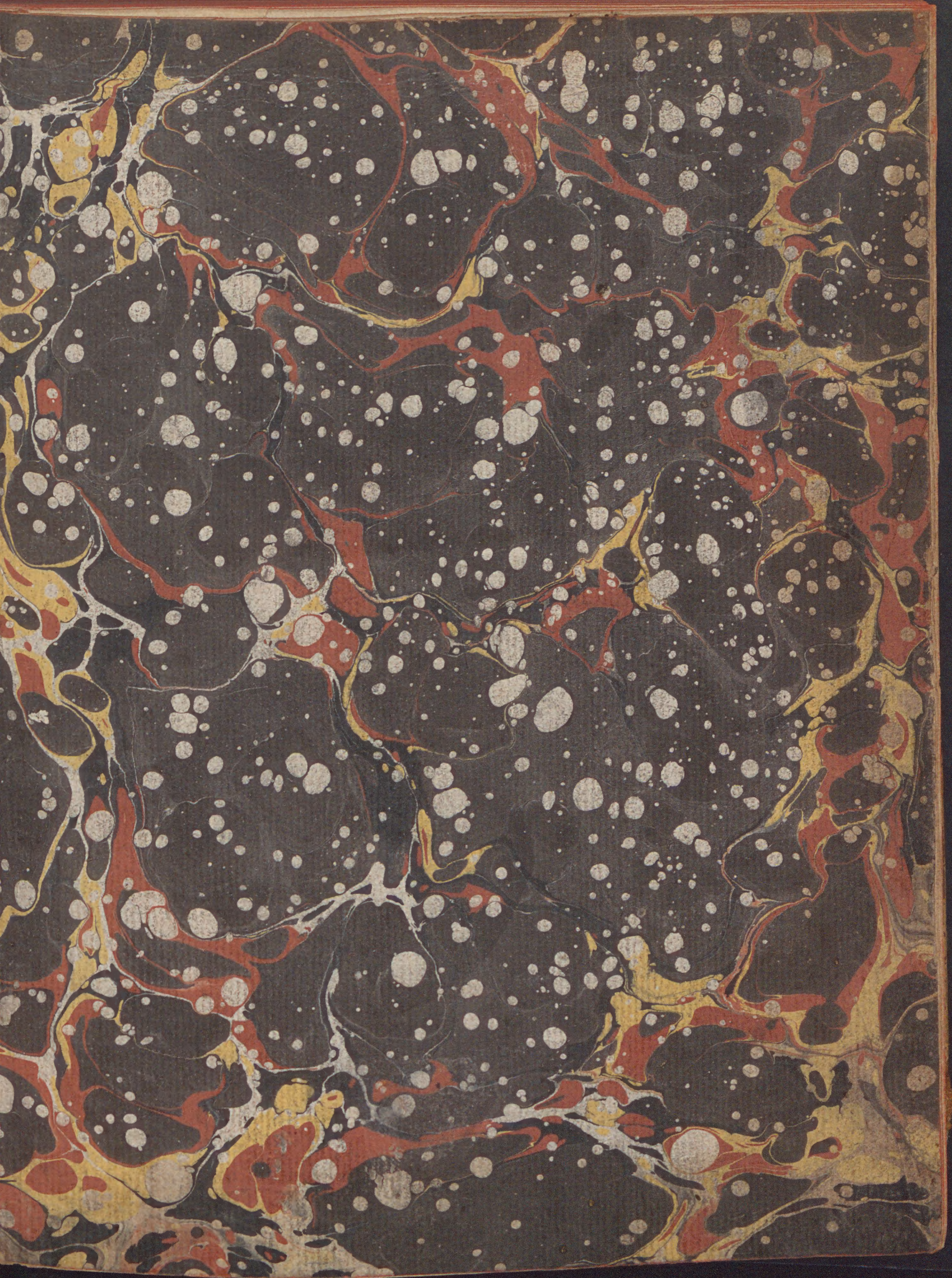






SCIENTIA
NAVALIS
SEV
TRACTATVS
DE
CONSTRVENDIS AC DIRIGENDIS
NAVIBVS
PARS POSTERIOR
IN QVA
RATIONES AC PRAECEPTA
NAVIVM CONSTRVENDARVM
ET
GVBERNANDARVM FVSIVS EXPONVNTVR



AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

PROF. HONORARIO ACADEMIAE IMPER. SCIENT. ET
DIRECTORE ACAD. REG. SCIENT. BORVSSICAE.

---

*INSTAR SVPPLEMENTI AD TOM. I. NOVORVM
COMMENTAR ACAD. SCIENT. IMPER.*

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
cIↃ IↃCCXLIX.

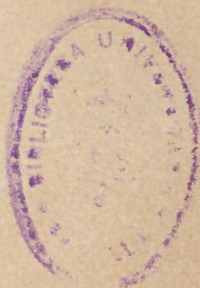
Index Capitum

Cap. I.

DE NAVIBVS IN GENERE.

§. 1.

Quanquam in ſuperiori libro Theoria de ſitu et motu corporum aquae innatantium tam fuſe et luculenter eſt expoſita, vt eius eximius vſus cum ad naues conſtruendas tum ad dirigendas et gubernandas non difficulter perſpiciatur: tamen accurata traditorum praeceptorum ad naues cuiusque generis accommodatio eo magis neceſſaria videtur, quo maiore doctrina nauigationis, pro vti quidem ea etiamnunc tractari ſolet, indiget emendatione. Quae enim in praecedente libro continentur, proprie ad natationem quorumque corporum generatim ſpectant, neque concluſiones ad nauigationis vſum ex iis ſunt formatae, niſi quas propoſitiones tractatae vltro ſuppeditauerunt. Quod autem potiſſimum eſt, regulae, quae quidem ſunt prolatae, non ſolum nimium ſunt diſperſae, ſed etiam quandoque inter ſe pugnant: ex quo neceſſitas huius peculiaris tractationis eo magis elucet.



§. 2. Hanc obrem in praeſenti libro omnia, quae in praecedente inuenta ſunt et demonſtrata, ad vſum nauigationis atque ad praxin accommodare conſtitui: quo in negotio ſingula, quae ad ſcientiam naualem pertinent, ſecundum certa capita diſtribui ac digeri conueniet, quo cunctae huius ſcientiae partes ordine percurri atque accurate pertractari quam commodiſſime queant. Tot enim ac tam diuerſae ſunt res, quibus ſcientia naualis continetur, vt, niſi ſingulae diligentiſſime ſeorſim perpendantur,

et deinceps ſumma circumſpectione inter ſe comparentur et coniungantur; vix quicquam ad vtilitatem publicam traduci poſſit. Ne igitur iſta tractatio vage inſtituatur, in hoc capite doctrinam de nauibus ingenere proponam, vt non ſolum quibus de rebus explicari oporteat intelligatur, ſed etiam quem ordinem, quamque operis partitionem ſequi expediat.

§. 3. Quantumuis naues, ſi in genere conſiderentur, cum ratione magnitudinis, tum figurae, tum deſtinationis etiam diſcrepent inter ſe, tamen omnes communibus aliquot proprietatibus praeditas eſſe deprehendimus. Primo enim omnes naues ad natandum aptae eſſe debent, in hocque ipſa nauium eſſentia continetur: ſecundo naues a quaque rudi mole, quae pariter aquae innatare valeat, diſcernuntur eo, quod cum hominibus tum oneribus quibusvis excipiendis et vehendis ſint pares. Tertio omnes naues etiam in hoc conueniunt, vt ex duabus partibus aequalibus et ſimilibus conſtent, ſi quidem figura externa ſpectetur, quae ambo nauium latera conſtituant, ac plano verticali per medium nauis ſecundum longitudinem tranſeunte a ſe inuicem ſecernantur. Quarto quoque omnium nauium hic ſolet eſſe finis principalis, vt a viribus quibuscunque per aquam promoueri queant. Atque his quatuor rebus natura nauium ingenere ſpectatarum aptiſſime comprehendi videtur.

§. 4. Si ergo iuxta primam proprietatem communem conſideremus nauem aquae inſidentem vel innatantem, duae partes inter ſe maxime diuerſae ſponte ſe offerunt, quarum altera complectitur portionem ſupra aquae ſuperficiem eminentem altera vero portionem ſub aqua

mer-

ſam: haecque diſtinctio in examine et diiudicatione nauium maximi eſt momenti. Etſi enim eiusdem nauis prout magis minusue eſt onerata, ita etiam maior minorue pars ſub aqua verſatur, atque ipſa pars ſubmerſa mutatur, ſi nauis inclinetur; tamen hae in aequalitates non admodum ſpectari ſolent: ſed quando de parte ſubmerſa ſermo eſt, quae carina cuiusque nauis appellatur, ea nauis portio intelligitur quae infra aquae ſuperficiem abditur, cum nauis debito modo eſt onerata, ac ſitum erectum in aqua tenet.

§. 5. Eſt itaque carina ea cuiusque nauis portio, quae ſubmerſioni eſt deſtinata, et quae actu infra aquae ſuperficiem verſatur tum, quando nauis ita, vt decet, eſt onuſta, neque viribus externis ex ſitu aequilibrii declinatur. Nititur igitur magnitudo carinae onerum, quibus ferendis nauem parem eſſe oportet, quantitate et pondere. Quo plura enim onera grauioraque pondera ſunt vehenda, eo amplior eſſe debet carina atque omnino ſecundum primam hydroſtaticae regulam quantitas carinae vniuerſae nauis onuſtae pondere determinatur. Dato enim tam ipſius nauis quam onerum portandorum pondere, volumen carinae tantum eſſe debet, vt aequale volumen aquae tantundem ponderet, quantum nauis et onera imponenda coniunctim.

§. 6. Cum igitur quantitas totius nauis a quantitate carinae pendeat, haec vero ipſa a pondere nauis onuſtae, quantitas nauis aptiſſime definietur pondere ipſius, quando completam habet onerationem. Ita quantitas cuiusque navis commodiſſime menſuratur numero librarum vel centenariorum pondus nauis debito modo oneratae experimentium. Vel quod eodem redit menſura eadem nauis habebitur, ſi definiatur

volumen carinae in pedibus cubicis. Nam cum pes aquae cubicus pendat circiter 64 libras, si numerus pedum cubicorum per 64 multiplicetur, prodibit numerus librarum ponderi totius nauis onustae respondens; qui est alter mensurandi modus. Contra vero si detur pondus nauis cum oneribus per libras expressum, numerus librarum per 64 diuisus dabit volumen carinae in pedibus cubicis.

§. 7. Intelligo hic pedes Rhenanos, librasque Parisinas sedecim vnciarum; neque vero ista relatio generatim exactissime definiri potest; cum alia aqua alia sit grauior, atque eo magis, quo plus salis in se continet. Praeterea etiam quantitas onerum non tam accurate solet definiri; sed aliquando plura onera aliquando etiam pauciora imponuntur quam destinatus onerandi modus requirit. Vnde fit vt tam ob ipsam onerum quantitatem, quam ob diuersae aquae grauitatem specificam modo aliquanto maior modo aliquanto minor nauis pars aquae immergatur, quam ea, quae carina vocatur. Interim tamen carina nobis semper erit determinata nauis portio, quae aquam subit quando nauis debitam obtinet onerationem: hocque non obstante, cum maior minorue pars aquae immergitur, eius ratio, si opus fuerit, haberi poterit.

§. 8. Duae ergo memoratae cuiusque nauis partes, quarum altera supra aquam eminet, altera in aquam immergitur, a se inuicem separatur sectione horizontali in ipsa aquae superficie facta; quam sectionem vti in priore libro sectionem aquae appellabimus. Sectio igitur aquae separat partem nauis superiorem a carina, atque est figura terminata, cuius perimeter in ipsa nauis superficie est sita. Ex quo si data fuerit nauis figura externa vna cum carina, simul

sectio

ſectio aquae atque aequatio eius naturam exprimens aſſignari poterit. Ex ſuperiore autem libro abunde intelligitur, quanti ſit momenti tam ſectionis aquae figuram quam ipſius carinae noſſe ad naues cum cognoſcendas tum diiudicandas; ita vt ſectio aquae vna ſit ex praecipuis rebus, quas circa naues contemplari oportet.

§. 9. Si porro ad motum nauium progreſſiuum in aqua attendamus, quaelibet nauis in duas partes quoque diſtingui reperietur, quarum altera prora vocari ſolet, altera puppis, quae quidem denominationes ex curſu directo originem traxerunt, ſed tamen etiam ſi curſus inſtituatur oblique, eaedem partes eadem nomina retinent. Prora vero non tam anterior nauis pars vocatur, quam ea quae in motu cum aqua conflictatur; ſiue prora ea nauis vocatur pars, quae vel in aquam impingit, vel in quam aqua irruit. Atque hinc ſimul indoles alterius partis, quae puppis nominatur, facile perſpicitur: puppis namque ea erit nauis portio, quae dum nauis in aqua progreditur nullam aquae alliſionem patitur; ſi quidem curſus ſit directus, vti ponimus; curſus enim obliquus in his nominibus nil mutat, quamuis in re ipſa ingens pariat diſcrimen.

§. 10. Cum igitur ſuperficies nauis, quae quidem ſub aqua verſatur, impulſui aquae eatenus eſt expoſita, quatenus verſus puppim diuergit, ex hoc ipſo quantitas prorae colligi, eaque a puppi diſcerni poterit. Namque ſuperficies nauis eo vsque diuergit, quoad fiat ampliſſima, hincque iterum conuerget, vsque ad extremam puppim. Quamobrem ea nauis ſectio transuerſalis ad directionem curſus perpendicularis proram terminabit atque a puppi ſecernet, quae omnium eſt ampliſſima. Hanc igitur ſectionem

proram a puppi diſcernentem, cum ſit maximi momenti appellabimus ſectionem tranſuerſalem ampliſſimam, eaque ſimul erit perpendicularis ad ſectionem aquae, quia eſt ad directionem impulſus aquae normalis.

§. 11. Quanquam ratio huius diuiſionis ad ſolam nauium partem inferiorem ſeu carinam reſpicit, tamen etiam ſuperior nauium portio ſupra aquam eminens ſimili modo diſtinguitur. Hanc ob rem ſectio nauis transuerſalis ampliſſima non ſolum carinam, ſed etiam vniuerſam nauem in duas partes diuidit, quarum altera prorae nomen obtinet altera puppis. Saepenumero quidem difficile eſt ſectionem transuerſalem ampliſſimam aſſignare, cum naues plerumque, vbi ſunt ampliſſimae, per ſatis longum interuallum aeque amplae confici ſoleant. At vbi hoc accidit, vt ſectio ampliſſima per interuallum diſperſa eſſe videatur, perinde eſt quaenam ſectio transuerſalis pro ampliſſima habeatur atque error inſenſibilis tuto negligi poteſt.

§. 12. Stabilitis nunc prora et puppi in quacunque naue, quarum illa partem anticam haec poſticam repraeſentat, vltro ſe offerunt ambo latera, dextrum alterum, alterum ſiniſtrum. Vocari autem ſolet latus dextrum id, quod ſtanti in puppi et proram intuenti ad dextram eſt ſitum, ſiniſtrum vero quod huic ad ſiniſtram iacet. Iam autem ſatis ſuperque colligere licet, ambo haec latera inter ſe omnino ſimilia eſſe debere: ſi enim ad curſum directum reſpiciamus, nulla foret ratio cur amborum laterum figurae eſſent diſſimiles: eaedemque rationes, quae figuram alterius lateris determinant, ſimul quoque alterius lateris figurum determinabunt. Quod autem ad curſum nauium obliquum attinet, quia is in vtrumque latus aeque declinare

re ſolet, propter eum quoque vlla diſſimilitudo inter ambo latera intercedere nequit. Denique iſta ſimilitudine laterum venuſtati maxime conſulitur.

§. 13. Cum igitur in qualibet naui ambo latera debeant eſſe ſimilia, cunctae naues plano diametrali praeditae ſint neceſſe eſt, hoc eſt eiusmodi ſectione, qua tota nauis in duas partes ſimiles et aequales diuidatur. Iſtud ergo planum diametrale erit verticale, ſi quidem vti ponimus nauis ſitum obtinet directum, quoniam in neutrum latus inclinatio eſſe poteſt: ac quia hoc planum diametrale a prora ad puppim porrigitur, ſimul erit normale ad ſectionem transuerſalem ampliſſimam. Quamobrem tam ſectio aquae quam ſectio transuerſalis ampliſſima figurae erunt diametro gaudentes; in vtraqne enim figura interſectio plani diametralis praebebit diametrum, ſimilemque ob rationem omnes ſectiones, quae vel ſunt horizontales, hoc eſt ſectioni aquae parallelae, vel ſectioni transuerſali ampliſſimae parallelae diametrum habebunt, quam pariter planum diametrale in iis deſignabit.

§. 14. Tres itaque habemus in quaque naui principales ſectiones, quarum vna eſt horizontalis ſecundum aquae ſuperficiem facta ſeu ſectio aquae, reliquae autem duae ſunt verticales, altera ſectio transuerſalis ampliſſima, altera vero ipſium planum diametrale: hisque tribus ſectionibus cognitis, ſatis prope totius nauis figura determinabitur, ſi praeter has principales ſectiones omnes ſectiones iis parallelae definiantur. Neque vero ad hoc opus eſt, vt omnium harum ſectionum figurae determinentur, ſed ſufficit, ſi vel ſolae ſectiones horizontales omnes vel alterae verticales ſolae innoteſcant, cum iſtis reliquae ſponte deter-

determinentur. Ad nauium autem conſtructionem expedit ſectiones parallelas ampliſſimae ſectioni transuerſali aſſignare, quia ſecundum has conſtructio nauium praecipue dirigi ſolet.

§. 15. Si autem ad theoriam, qua conſtructio et gubernatio nauium nititur, reſpiciamus; parum refert quamnam figuram habeat portio nauis ſuperior ex aqua eminens, cum ea neque preſſionem nec impulſum aquae excipiat; hancobrem praecipue in figura carinae inueſtiganda operam collocabimus, atque tantisper a parte ſuperiore cogitationes omnino abſtrahemus. Si enim pro quouis inſtituto forma carinae commodiſſima fuerit definita, non eſt difficile partem ſuperiorem ad circumſtantias praeſentes accommodare: qua quidem in re finis potiſſimum, cui nauis deſtinatur, eſt ſpectandus, vt tum ad onera geſtanda, tum ad operationes neceſſarias abſoluendas pars ſuperior maxime ſit accommodata: imprimis autem, cum haec pars ſola in aſpectum cadat, decori et venuſtatis ratio eſt habenda.

Tab. I. fig. I. §. 16. Conſideremus igitur carinam cuiusuis nauis ſeorſim, cuius ſectio aquae ſit figura plana AEBF in horizonte repraeſentata, atque ADB denotet planum diametrale, ita vt recta AB ſit diameter orthogonalis ſectionis aquae: ſectio vero transuerſalis ampliſſima ſit EDF, cuius diameter erit recta verticalis CD, in qua interſecatur a plano diagonali. Huius ergo carinae prora erit portio ADEF, puppis vero reliqua pars BDEF, quae a ſe mutuo ſecernuntur per ſectionem transuerſalem ampliſſimam EDF. Quaecunque nunc ſit huius carinae figura, eius natura aptiſſime exprimetur per aequationem tres variabiles inuoluentem. Scilicet pro prora definienda, ſumto in

in C initio abſciſſarum, ponatur abſciſſa quaecunque CX $= X$; portioque applicatae ſectionis aquae XR quaecunque $XY = y$; atque longitudo verticalis ex Y ad carinam vsque demiſſa $YZ = z$; quo facto aequatio inter x, y, et z exprimet naturam prorae, ſimilique modo puppis natura exprimetur.

§. 17. Ex aequatione autem inter x, y et z vel data vel inuenta tota carinae figura facile reperietur et ad vſum delineabitur. Primo enim ſi ponatur $z = o$, aequatio inter x et y exprimet naturam ſectionis aquae AEBF, ita vt x ſit abſciſſa CX et y applicata XR. Deinde ſi fiat $y = o$ punctum Z cadet in V, eritque $XV = z$: ex quo aequatio inter x et z exprimet naturam plani diametralis ADB, exiſtente x abſciſſa CX et z applicata XV. Denique ſi in aequatione propoſita trium variabilium ponatur $x = o$, cadet Y in P et Z in M, atque aequatio inter y et z, quarum illa y exponit abſciſſam CP haec vero z applicatam PM; praebebit naturam ſectionis transuerſalis ampliſſimae EDF.

§. 18. Eadem vero aequatio naturam carinae exprimens per tres variabiles x, y et z, non ſolum tam facile praebet tres memoratas ſectiones principales, ſectionem aquae ſcilicet, planum diametrale et ſectionem transuerſam ampliſſimam, ſed etiam ſectiones quascunque his parallelas. Nam ſi ponatur variabilis x conſtans, tum aequatio inter y et z exprimet naturam ſectionis transuerſae RZVS ſectioni ampliſſimae parallelae inter eius abſciſſam $XY = y$ et applicatam $YZ = z$; quae ſectio diſtabit a principali EDF, cui eſt parallela interuallo $CX = x$. Simili modo ſi y ponatur conſtans ſectio habe-

habebitur plano diametrali parallela ab eoque diſtans interuallo y; cuius natura exprimetur aequatione inter coordinatas x et z. Denique ſi variabilis z ponatur conſtans prodibit aequatio inter coordinatas x et y naturam ſectionis horizontalis a ſectione aquae interuallo z diſſitae exponens.

§. 19. Si igitur deſcriptionem ad receptum naues conſtruendi modum maxime accommodare velimus, conueniet ſingulas ſectiones transuerſales, verticales ſcilicet et plano diametrali normales determinari et deſcribi. Neque vero omnes has ſectiones, quarum numerus foret infinitus, repraeſentare neceſſe eſt; verum ſufficit aliquot earum datis interuallis a ſectione ampliſſima tam verſus proram quam verſus puppim diſtantes deſcribere, cum intermediae vi ſtructurae ex his ſponte determinentur. Si enim figura puppis et prorae fuerit continua, tum ſectiones transverſae puppim ſpectantes obtinebuntur tribuendis ipſi x negatiuis valoribus. Sin autem natura puppis peculiari exprimatur aequatione, tum ex hac ipſa aequatione ſectiones transuerſales puppis ſimili modo definientur, quo eae, quae in prora ſunt ſitae, ex aequatione naturam prorae exprimente.

§. 20. Cum igitur imprimis volumen carinae noſſe oporteat, oſtendendum eſt, quomodo quantitas huius voluminis ex aequatione inter memoratas tres variabiles commodiſſime determinari queat. Ad hoc autem requiritur, vt aequatio iſta tres variabiles continente differentietur; ponamus ergo prodiiſſe hanc aequationem $Pdx + Qdy + Rdz = o$; quae innumerabilibus formis exprimi poteſt, prout integralis ante differentiationem fuerit diſpoſita.

Pona-

Ponamus nunc x conſtans, habebitur ob $dx = o$ haec aequatio $Qdy + Rdz = o$ ad ſectionem RVS pertinens, quare cum ſit $dy = \frac{-Rdz}{Q}$ erit area XYZV $= \int z dy = \int \frac{-Rzdz}{Q}$ integrali ita ſumto vt euaneſcat poſito $y = o$ Si iam in hoc integrali ponatur $z = o$, dabit $\int \frac{-Rzdz}{Q}$ aream XVR, ac $2\int \frac{-Rzdz}{Q}$ aream totius ſectionis transuerſae RVS; eo quod omnes hae ſectiones conſtant ex duabus partibus aequalibus et ſimilibus.

§. 21. Quoniam ergo in integrali $2\int \frac{-Rzdz}{Q}$ poſitum eſt $z = o$, quo caſu abit y in XR, quae eſt applicata ſectionis aquae, ideoque per abſciſſam reſpondentem CX $= x$ determinatur ope aequationis naturam ſectionis aquae continentis: expreſſio $2\int \frac{-Rzdz}{Q}$ erit functio ipſius x tantum, neque amplius quantitates y et z in ſe comprehendet. Quare ſi ea multiplicetur per dx, erit $2 dx \int \frac{-Rzdz}{Q}$ elementum ſolidi EDFSRV, ex quo hoc volumen erit $= 2\int dx \int \frac{-Rzdz}{Q}$, integrali ita accepto, vt euaneſcat poſito $x = o$. Si igitur poſt integrationem hanc ponatur $x =$ CA, praebebit integrale prodiens ſoliditatem prorae, ad quam ſi addatur ſoliditas puppis ſimili modo inuenienda, habebitur integrum carinae volumen, quod quaerebatur.

§. 22. Praeter hanc expreſſionem plures aliae exhiberi poſſunt, quae pariter ac illa ſoliditatem propoſitae carinae exponent, prout alia atque alia voluminis elementa conſiderentur. Primo enim cum ſpatii XYZV elementum ſit $z dy$, dabit $2\int z dy$ aream RVS, ſi ita integretur, vt euaneſcat poſito $y = o$, tumque ponatur $z = o$. Simili modo eadem area exprimetur formula $2\int y dz$, integrali ita ſumto, vt euaneſcat poſito $z = o$, tumque ponatur y

 $= o$.

$=o$. Quare tam $2\int dx \int z dy$, quam $2\int dx \int y dz$ praebebit soliditatem prorae integralibus ita sumtis vt euanescant posito $x=o$, tumque ponatur $x=AC$. Expedit autem eiusmodi formulas integrales inducere, quae euanescant, si ea quantitas cuius differentiale inest, ponatur $=o$.

§. 23. Pari modo si ponatur y constans, expressio $\int z dx$ ita integrata vt euanescat posito $x=o$, si tum ponatur vel $z=o$ vel $x=AC$, dabit sectionis prorae plano diametrali parallelae per Y factae aream; hincque $2\int dy \int z dx$ exprimet soliditatem totius prorae, si quidem integrale ita capiatur, vt euanescat posito $y=o$, tumque fiat $y=CE$. Eodem modo illa sectio plano diametrali parallela exprimetur formula $\int x dz$ integrali ita sumto vt euanescat posito $z=o$, tumque fiat vel $x=o$ vel $z=CD$, vnde integrale $2\int dy \int x dz$ quoque soliditatem prorae exhibebit. Denique si initio z ponatur constans formulae $2\int y dx$ et $2\int x dy$ debito modo integratae dabunt sectiones prorae horizontales, ideoque tam formula $2\int dz \int y dx$ quam $2\int dz \int x dy$ exprimunt prorae volumen: ita vt sex diuersae habeantur expressiones ad soliditatem prorae inueniendam.

§. 24. Cum autem haec ita late pateant, vt eorum vsus difficulter perspici possit, conueniet hoc ipsum problema specialius pertractari, atque ad vtilitatem constructionis accommodari. Hoc in negotio sequemur methodum iam in superiore libro adhibitam, qua omnes sectiones vni ex tribus principalibus parallelas inter se vel similes vel affines posuimus. Ex hac tractatione id nanciscemur commodi, vt data carina non difficulter in aequationem possit redigi: consideratis enim tribus sectionibus princi-

principalibus iisque ad aequationes reuocatis facile iudicare licebit, vtrum sectiones vni earum parallelae sint similes an affines: quorum vtrumuis si fuerit compertum aequatio localis naturam istius carinae continens exhiberi poterit. Hanc obrem modum aperiam, cuius ope cum ex similitudine tum ex affinitate sectionum parallelarum tam aequatio localis inter tres coordinatas formari quam volumen definiri queat.

§. 25. Quod primo ad similitudinem figurarum attinet, eius quidem notio ex elementis satis habetur distincta: attamen expediet eam ad nostrum vsum adaptare. Sit igitur CED semissis sectionis cuiusdam principalis, scilicet vel sectionis amplissimae vel sectionis aquae, vel etiam portio plani diametralis siue in prora siue puppi sumta; cui omnes sectiones parallelae sint similes, quarum vna sit figura *ced*. Si iam detur figura CED basin habens CE et altitudinem CD, ad aliam quamcunque basin *ce* figura similis *ced* describi poterit. Primo enim ex similitudine erit CE : CD $=$ *ce* : *cd*, vnde altitudo *cd* datur. Deinde sumta abscissa quacunque *cp*, quae sit ad CP vt *ce* ad CE erit applicata *pm* ad PM pariter vt *ce* ad CE vnde constructio figurae *ced* admodum commoda consequitur. Tab. I. fig. 2.

§. 26 Deinde etiam, si detur aequatio naturam figurae CED exprimens, ex ea aequatio ad figuram quamcunque ipsi similem facile elicitur. Vocentur enim CE $=$ A; CP $=$ X et PM $=$ Y, dataque sit aequatio, qua relatio inter X et Y continetur: si ponatur $ce = a$, ac capiatur $cp = x = \frac{aX}{A}$, erit $pm = y = \frac{aY}{A}$. Quare cum sit $X = \frac{Ax}{a}$ et $Y = \frac{Ay}{a}$, si isti valores in aequatione inter X et Y naturam curuae CED exprimente loco X et Y

 sub-

ſubſtituantur prodibit aequatio inter x et y, qua natura curuae ſimilis ced ad datam baſin ce applicata exprimetur: hocque pacto aequationes pro omnibus ſectionibus ipſi CED ſimilibus reperientur.

§. 27. Si igitur figurae ſimilis ced conſtruendae propoſita fuerit ſola baſis ce, ex ea tota figura determinatur: ideoque eius altitudo cd ſponte definitur; poſita enim figurae principalis altitudine $CD = B$, ob $CD : cd = CE : ce$ erit $cd \frac{aB}{A}$. Porro quoque area cuiusuis figurae ſimilis ced ex area figurae principalis CED data aſſignari poteſt: namque poſita area $CED = E$, cum areae figurarum ſimilium teneant rationem duplicatam laterum homologorum, erit area figura $ced = \frac{a^2E}{A^2}$. Idem oſtendit calculus; cum enim ſit area $CED = \int YdX = E$, atque area $ced = \int ydx$ integralibus ad integras figuras extenſis; erit ob $y = \frac{aY}{A}$ et $x = \frac{aX}{A}$ area $ced = \int \frac{a^2YdX}{A^2} = \frac{a^2E}{A^2}$.

§. 28. Antequam figuras ſimiles relinquamus conueniet in earum centrum grauitatis inquirere, cum eius notitia abſolute ſit neceſſaria ad nauium proprietates reliquas eruendas. Ponamus itaque figurae principalis CED datum eſſe centrum grauitatis, idque ſitum eſſe in puncto G. ita vt ambo interualla GH et CH ſint cognita. Hinc ergo figurae ſimilis ced centrum grauitatis g in ſimili loco erit poſitum, atque interualla gh et ch ad interualla GH et CH rationem habebunt laterum homologorum ce ad CE: ex quo erit $gh = \frac{a \cdot GH}{A}$ et $ch = \frac{a \cdot CH}{A}$. Hacque proprietate calculus centri grauitatis alias perquam prolixus mirifice contrahitur ac ſimplicior redditur.

§. 29.

§. 29. Figurae, quas hic vocamus affines, multo latius patent quam ſimiles, hasque ſub ſe complectuntur. Quemadmodum enim figura ſimilis, ſi eius vnica quantitas detur, ex figura principali tota determinatur, ita ad figuram affinem determinandam duo latera prolubitu aſſumere licet. Repraeſentet enim CED figuram principalem, cuius baſis ſit CE et altitudo CD; huic figurae affinis poterit aſſignari, quae non ſolum datam habeat baſem ce ſed etiam datam altitudinem cd. Ita autem hae figurae affines ſunt comparatae, vt ſi capiantur abſciſſae CP, cp baſibus CE et ce proportionales, applicatae PM et pm ſeſe ſint habiturae vti altitudines CD et cd ex quo ſi deſcripta ſit figura principalis CED, huius proprietatis ope ad quamuis propoſitam baſin et altitudinem figura affinis facile delineari poterit. Intelligitur ergo, ſi accidat vt ſit $cd : ce = CD : CE$ tum figuram affinem ced abire in ſimilem. Tab. II. fig. 1.

§. 30. Quod ſi ergo detur aequatio naturam figurae principalis CED exprimens in promtu erit aequationem pro figuta quacunque affini exhibere. Poſitis enim $CE = A$, $CD = B$; abſciſſa $CP = X$ et applicata $PM = Y$, data ſit aequatio inter X et V: figurae autem affinis deſcribendae ced ſit baſis $ce = a$, altitudo $cd = b$, abſciſſa $cp = x$ et applicata $pm = y$. His ergo poſitis ex natura affinitatis ſequitur, ſi fuerit $A : a = X : x$ fore $B : b = Y : y$; vnde fit $x = \frac{aX}{A}$ ſeu $X = \frac{Ax}{a}$, atque $y = \frac{bY}{B}$ ſeu $Y = \frac{By}{b}$. Quamobrem ſi in aequatione in X et Y data ſcribatur $\frac{Ax}{a}$ loco X et $\frac{By}{b}$ loco Y, prodibit aequatio inter x et y pro curua affini ced.

§. 31. Quod ad areas figurarum affinium attinet eae ſe habebunt in ratione compoſita baſium et altitudinum, ita vt, ſi area figurae principalis CED fuerit $= E$, area figurae *ced* futura ſit $= \frac{abE}{AB}$. Namque figurae *ced* area eſt $= \int y\,dx$ integratione per totam figuram extenſa; cum autem ſit $y = \frac{bY}{B}$ et $x = \frac{aX}{A}$, erit $\int y\,dx = \frac{ab}{AB}\int Y\,dX$. At $\int Y\,dX$ exhibet aream figurae principalis CED quam poſuimus $= E$ ita vt ſit $\int Y\,dX = E$; quocirca area figure affinis *ced* erit $= \frac{abE}{AB}$. Nouo igitur calculo non erit opus ad areas figurarum affinium determinandas, ſed eae pariter ac figurae ſimiles ex data figurae principalis area definiri poſſunt.

§. 32. Pari facilitate locus centri grauitatis in quaque figura affini determinari poterit, ſi datus fuerit locus centri grauitatis in figura principali, qui ſit G Cum enim ducta ex G ad baſin CE perpendiculari GH ſit $GH = \frac{\int YY\,dX}{2\int Y\,dX}$ atque $CH = \frac{\int YX\,dX}{\int Y\,dX}$, integralibus debito modo ſumtis, vt ad totam figuram pateant: ſi figurae affinis centrum grauitatis ſitum ſit in *g*, erit pari modo $gh = \frac{\int yy\,dx}{2\int y\,dx}$; et $ch = \frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$. At ob $x = \frac{aX}{A}$ et $y = \frac{bY}{B}$, erit $gh = \frac{b\int YY\,dX}{2B\int Y\,dX} = \frac{b\cdot GH}{B}$, atque $ch = \frac{a\int YX\,dX}{A\int Y\,dX} = \frac{a.CH}{A}$. Vnde erit $CH : ch = CE : ce$; atque $HG : hg = CD : cd$, quae analogiae punctum *g* praebent facillime.

§. 33. Hae autem figurae tam ſimiles quam affines ſufficere videntur ad formas omnium omnino nauium repraeſentandas, ſaltem vero proxime; in praxi enim minutiae ſunt negligendae. Hinc igitur orientur ſex nauium ſpecies, quarum prima eas naues comprehendat, in quibus omnes ſectiones horizontales ſint ſectioni aquae ſimiles: ſecunda ſpecies

cies vero eas, quae habent omnes ſectiones transuerſales ſectioni ampliſſimae parallelas eidem ſimiles: ad tertiam vero eae pertineant naues, in quibus ſectiones verticales plano diametrali parallelae eidem ſint ſimiles. Pari modo ſpecies quarta, quinta et ſexta eas complectentur naues, in quibus ſectiones, quae in in prioribus ſpeciebus erant ſimiles tantum ſunt affines. Atque ad aliquam harum ſex ſpecierum cunctae naues referri poſſe videntur, quamobrem ſingulas has ſpecies percurramus praecipuasque proprietates recenſeamus.

§ 34. Sit igitur ADB carina nauis, cuius figura ad primam ſpeciem pertineat: exiſtentibus omnibus ſectionibus horizontalibus SRTQ ſectioni aquae AFBE ſimilibus, quae omnes ſimiliter ſecentur a ſectione ampliſſima EFD. Poſito plano diametrali ADB, vocetur $AC = a$, $CE = CF = b$; et $CD = c$ ac cum ſectio aquae AEBF data ſit, ponatur abſciſſa eius $CI = p$; et applicata $IK = IL = q$; dabiturque aequatio inter p et q, qua natura ſectionis aquae exprimetur. Ponamus porro datam eſſe ſectionem ampliſſimam EDF, cuius diameter eſt CD; ita vt vocatis abſciſſa $CP = r$ et applicata $PQ = s$ habeatur aequatio relationem inter r et s continens. Hisque datis duabus ſectionibus principalibus tota carinae figura determinabitur ex ſimilitudine ſectionum horizontalium. Tab. II. fig. 2.

§. 35. Concipiatur ſectio horizontalis SQTR per punctum P facta, ac cum tam portio proram ſpectans QSR ſimilis ſit portioni ſectionis aquae in prora ſitae EAF, quam portio puppis QTR portioni EBF, erit ex natura ſimilitudinis $CE : CA = PQ : PS$ vnde fit $PS = \frac{as}{b}$. Cum autem PS ſit applicata in plano diametrali ADB

 reſpon-

respondens abscissae $CP = r$, dabitur simul aequatio naturam plani diametralis exprimens ex aequatione inter r et s data. Ex quo perspicitur in hac nauium specie sectionem amplissimam et planum diametrale a se inuicem pendere, ita vt data alterius figura simul figura alterius determinetur: ideoque perinde est, vtra harum sectionum cum sectione aquae coniungatur ad totam figuram determinandam. Sunt igitur portio plani diametralis ACD et semissis sectionis amplissimae ECD figurae affines communem altitudinem CD habentes: similique modo figura CDB his erit affinis ob $CB : PT = CE : PQ$; atque omnes sectiones verticales per punctum C factae erunt figurae affines eandem habentes altitudinem CD sed diuersas bases.

§. 36. Quoniam figura QSR similis est figurae EAF sumatur in eius diametro abscissa PO similis abscissae CI, ita vt sit $b : s = p : PO$, seu $PO = \frac{ps}{b}$; erit applicata respondens $OZ = OW = \frac{qs}{b}$. Ducantur nunc rectae verticales OX et ZY, atque cum Z sit punctum in superficie carinae, eius situm ope aequationis tres variabiles inuoluentis definiamus. Hunc in finem vocentur $CX = x$ $XY = y$ et $YZ = z$: eritque $x = \frac{ps}{b}$ ob $CX = PO$; porro $y = \frac{qs}{p}$ ob $XY = OZ$; atque $z = r$ ob $YZ = XO = CP$. Cum autem detur aequatio inter r et s, aequabitur s functioni cuidam ipsius z, quae in aequationibus $x = \frac{ps}{b}$ et $y = \frac{qs}{b}$ substituatur. Denique ob q per p datam eruatur valor vtriusque ex aequatione $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$, eiusque valor in alterutra substitutus dabit aequationem inter x et y et z, qua natura superficiei propositae exprimetur.

§. 37. Cum igitur aequatio inter tres coordinatas orthogonales x, y et z naturam ſuperficiei cuiusuis aptiſſime exprimat, operae pretium erit inueſtigare cuiusmodi formam habitura ſit iſta aequatio, quando ad figuram huius ſpeciei pertinet: vt deinceps, ſi viciſſim aequatio proponatur, iudicare queamus, an figura per aequationem expreſſa ad primam hanc ſpeciem referenda ſit an ſecus. Cum ergo ſit $r = z$ et s per r detur, erit $s =$ functioni ipſius z, quae ſit Z: deinde cum ſit $\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$ atque q per p detur, aequabitur p functioni nullius dimenſionis ipſarum x et y. Quare ob $x = \frac{ps}{b} = \frac{pZ}{b}$, erit $Z = \frac{bx}{p}$, hoc eſt functio quaepiam ipſius z aequalis erit functioni vnius dimenſionis ipſarum x et y: haecque eſt proprietas eſſentialis aequationum figuras ad hanc primam ſpeciem pertinentes complectentium.

§. 38. Quoniam deinde ad conſtructionem nauium maxime requiritur, vt ſectiones transuerſales ſectioni ampliſſimae EDF parallelae definiantur, ponamus eiusmodi ſectionem fieri per punctum X, erit huius ſectionis abſciſſa $XY = y$ et applicata reſpondens $YZ = z$, quia vero interuallum CX pro hac ſectione eſt conſtans, ponatur $CX = x = g$; atque in ſectione aquae ducatur ordinata quaecunque KIL, exiſtente $CI = p$ et $IK = q$. Cum iam ſit $x = \frac{ps}{b}$, erit $s = \frac{bg}{p}$. In ſectione igitur ampliſſima CDE ſumatur applicata $PQ = \frac{bg}{p} = \frac{CE\ CX}{CI}$ cuius proinde reſpondens abſciſſa CP dabitur. Sumta ergo pro ſectione quaeſita abſciſſa $XY = \frac{qs}{b} = \frac{gq}{p} = \frac{CX \cdot IK}{CI}$; habebitur applicata reſpondens $YZ = CP$; vnde tam natura quam conſtructio ſingularum ſectionum transuerſalium cognoſcitur.

§. 39. Vt denique soliditatem istius carinae reperiamus, sit area totius sectionis aquae AEBF $=$ E; ex qua ob similitudinem habebitur area sectionis SQTR illi similis $= \frac{PQ^2 . E}{CE^2} = \frac{Es^2}{b^2}$ quae multiplicata per differentiale altitudinis CP $= \frac{r}{p}$, dabit elementum soliditatis $= \frac{Es^2 dr}{b^2}$. Ex quo volumen carinae inter sectionem aquae AEBF et hanc sectionem illi parallelam SQTR comprehensae erit $= \frac{E}{b^2} \int s^2 dr$ integrali ita sumto, vt euanescat posito $r = o$. Quare si post integrationem formulae $\int s^2 dr$ hoc modo institutam ponatur $r =$ CD $= c$, prodibit totius carinae volumen $= \frac{E}{b^2} \int s^2 dr$, quod igitur tum ab area sectionis aquae tum a natura sectionis amplissimae pendebit.

§. 40. Ad quantitatem voluminis carinae commodius exprimendam eiusque inuentionem faciliorem reddendam sit sectionis amplissimae EDF area $=$ F, atque huius sectionis semissis CDE centrum grauitatis situm sit in g, ex quo ad CD ducatur perpendicularis gG. Quibus factis erit F $= 2 \int s dr$, atque G$g = \frac{\int s^2 dr}{2 \int s dr}$, his integralibus ita acceptis vt euanescant posito $r = o$, tumque facto $r =$ CD $= c$. Hinc itaque erit $\int s^2 dr = 2$ Gg. $\int s dr =$ F. Gg. Quocirca soliditas carinae propositae erit $= \frac{E . F . Gg}{b^2} = \frac{E . F . Gg}{CE^2}$; vnde facilis regula pro inuenienda carinae soliditate practice emergit. Scilicet productum ex areis sectionis aquae et sectionis amplissimae multiplicetur per interuallum Gg, et quod resultat diuidatur per quadratum CE, quotusque indicabit volumen carinae quaesitum.

§. 41. Vt haec clarius inspiciantur iuuabit rem exemplo illustrasse, sit igitur sectio aquae AEBF ellipsis centrum habens in C, cuius axes sint AB $= 2a$ et EF $= 2b$; erit

erit ex natura ellipſis $q = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - p^2)}$; atque poſita ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$ erit area ſectionis aquae $= \pi ab$. Sit praeterea ſectio ampliſſima EDF parabola verticem habens in D, erit ex natura parabolae $s = b \sqrt{\frac{c-r}{c}}$. Hinc ſtatim natura plani diametralis ADB innoteſcet, quae pariter erit parabola verticem in D et axem DC habens. Nam eius applicata PS abſciſſae CP reſpondens erit $= \frac{as}{b} = a \sqrt{\frac{c-r}{c}}$. Illius quidem parabolae ſectionem ampliſſimam exhibentis parameter eſt $\frac{bb}{c}$, huius vero parameter eſt $= \frac{aa}{c}$.

§. 42. Aequatio vero inter tres variabiles CX $= x$; XY $= y$ et YZ $= z$, quae naturam huius carinae exprimat, inuenietur ex tribus hiſce aequalitatibus, $z = r$; $x = \frac{ps}{b}$ et $y = \frac{qs}{b}$. Quoniam ergo eſt $z = r$ erit $s = b \sqrt{\frac{c-z}{c}}$: atque equatio $\frac{x}{y} = \frac{p}{q} = \frac{ap}{b\sqrt{(a^2-p^2)}}$, dabit $p = \frac{abx}{\sqrt{(a^2y^2+b^2x^2)}}$. His ergo valoribus loco p et s in aequatione $x = \frac{ps}{b}$ ſubſtitutis prodibit $\sqrt{c(a^2y^2+b^2x^2)} = ab \sqrt{(c-z)}$, ſeu $a^2cy^2 + b^2cx^2 = a^2b^2c - a^2b^2z$, vnde habebitur $z = \frac{(a^2b^2 - a^2y^2 - b^2x^2)}{a^2b^2} c$ quae eſt aequatio localis ad ſuperficiem propoſitam: in qua cum variabiles duabus plures dimenſiones non habeant, omnes ſectiones vtcunque factae erunt ſectiones conicae.

§. 43. Ex aequatione locali inuenta intelligitur omnes ſectiones tranſuerſales ſectioni ampliſſimae parallelas quoque eſſe parabolas, itemque omnes ſectiones plano diametrali parallelas. Quamobrem in hac figura non ſolum ſectiones horizontales omnes ſunt figurae inter ſe ſimiles, ſed etiam ſectiones verticales, quae tam ſectioni ampliſſimae quam plano diametrali ſunt parallelae, inter ſe erunt

 ſimiles,

ſimiles, ex quo iſta figura non ſolum ad primam ſpeciem, ſed ſimul ad ſecundam et tertiam pertinet. Soliditas autem huius figurae facile inuenitur; cum enim ſit $E = \pi ab$ et $\int ssdr = \frac{bb}{c}\int dr\ (c-r) = \frac{bb}{2c}\ (2cr-rr)$, ponatur $r = c$ fiet $\int s^2 dr = \frac{bbc}{2}$: ex quo huius carinae volumen, quod generaliter erat $= \frac{E}{bb}\int s^2 dr$ prodibit $= \frac{\pi abc}{2}$.

§. 44. Ad nauium ſpeciem ſecundam referuntur eae figurae, in quibus omnes ſectiones parallelae ſectioni ampliſſimae eidem ſunt ſimiles. Huiusmodi igitur carinam
Tab. III. fig. 1. repraeſentet figura AEDFB, in qua ſit AEBF ſectio aquae, ADB planum diametrale, atque EDF ſectionem transuerſalem ampliſſimam, cui facta ſit ſectio quaecunque parallela RVS, quae ideo illi erit ſimilis. Ex quo ſequitur fore CE : CD = XR : XV, atque hanc ob analogiam planum diametrale ADB et ſemiſectio aquae AEB erunt figurae affines ſuper eadem baſi AB conſtitutae. Si ergo alterutra harum duarum ſectionum fuerit data; altera ſimul determinatur. Ad totius igitur figurae determinationem ſufficit aſſumſiſſe duas ſectiones ampliſſimam ſcilicet EDF et ſectionem aquae AEBF.

§. 45. Maneant vt ante $AC = a$, $CE = CF = b$ et $CD = c$; et pro ſectione ampliſſima poſita abſciſſa $CP = p$; $PM = q$, data erit aequatio inter p et q: in ſectione aquae autem ſumta abſciſſa $CX = r$, ſit applicata $XR = s$ data per r. Eidem autem abſciſſae $CX = r$, quatenus pertinet ad planum diametrale ACD reſpondebit applicata $XV = \frac{cs}{b}$ ex natura ſimilitudinis. Capiatur iam in ſectione transuerſali RVS abſciſſa XY ſimilis abſciſſae CP,

CP, seu $XY = \frac{ps}{b}$ erit applicata respondens $YZ = \frac{qs}{b}$. Ex hac itaque similitudinis conditione, si datae fuerint trium sectionum principalium duae, sectio aqnae scilicet et sectio amplissima, omnes sectiones isti posteriori parallelae facile definientur, atque adeo tota carinae figura leui negotio describi poterit.

§. 46. Sequenti autem modo pro huius modi figuris ad secundam speciem pertinentibus aequatio localis inter tres variabiles reperietur. Cum Z sit punctum in superficie carinae, ponatur $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, erit $x = r$, atque ob s datam per r, fiet s functio quaedam ipsius x, quae sit $= X$, ita vt sit $s = X$. Hanc ob rem erit $XY = y = \frac{pX}{b}$, et $YZ = z = \frac{qX}{b}$; ideoque $\frac{y}{z} = \frac{p}{q}$. Verum quia q per p datur, ex aequatione $\frac{y}{z} = \frac{p}{q}$ valor ipsius p ita definietur, vt fiat $p =$ functioni cuidam ipsarum y et z nullius dimensionis; qui valor in aequatione $y = \frac{pX}{b}$ substitutus dabit $X = \frac{by}{p}$ seu functio quaedam ipsius X aequabitur functioni cuidam ipsarum y et z vnius dimensionis.

§. 47. Ad soliditatem vero seu capacitatem istius modi carinae inueniendam ponatur area sectionis amplissimae $EDF = E$, eritque ex natura similitudinis area sectionis $RVS = \frac{Es^2}{bb}$; quae ducta in dr dabit elementum voluminis $EDFSRV = \frac{Essdr}{bb}$; ex quo ipsum hoc volumen erit $= \frac{E}{bb}\int ss\,dr$. Quare si post integrationem formulae $\int ss\,dr$ ita institutam, vt ea euanescat posito $r = o$, fiat $r = CA = a$, prodibit volumen totius prorae AEFD. Simili vero calculo obtinebitur volumen partis posterioris BEFD seu puppis, quod ad prius volumen prorae additum dabit

totius

totius carinae volumen: ex quo deinceps totius nauis pondus innotescet.

§. 48. Soliditas igitur istiusmodi carinae partim per aream sectionis amplissimae EDF = E partim per formulam integralem $\int ssdr$, quae a natura sectionis aquae pendet, determinatur. Vt autem haec ad praxin accommodentur, notandum est $\int ssdr$ partim ex area sectionis aquae, partim ex situ centri grauitatis semissis istius sectionis aquae determinari. Posita enim area totius sectionis aquae AEBE = F, ac semissis AEB centro grauitatis in g; si ex g ad AB ducatur normalis gG, erit haec ipsa gG = $\frac{\int ss\,dr}{2\int s\,dr} = \frac{\int ssdr}{F}$, ex quo fit $\int ssdr = F.Gg$. Hanc obrem propositae carinae volumen seu soliditas erit $= \frac{E.F.Gg}{bb} = \frac{E.F.Gg}{CE^2}$. Quae expressio ab illa, qua soliditas figuram primae speciei continebatur, hoc tantum differt, quod hic distantia centri grauitatis semissis sectionis aquae AEB ab axe AB ingrediatur, ibi autem distantia centri grauitatis semissis sectionis amplissimae CDE ab axe CD.

§. 49. Ad hanc ergo secundam speciem innumerabiles pertinent figurae, inter quas figurae rotundae, quae inter curuilineas fere solae adhuc sunt considerari solitae, continentur: cuiusmodi sunt eae figurae, quae reuolutione figurae AEB circa axem AB generantur. Tum enim omnes sectiones ad axem AB normaliter factae sunt semicirculi, eoque ipso sectioni amplissimae parallelae ac similes Pro huiusmodi igitur corporibus, si ratio diametri ad peripheriam ponatur $1 : \pi$ erit sectionis amplissimae EDF area, quae posita est $= E = \frac{\pi CE^2}{2}$; ex quo totius figurae volumen prodit $= \frac{\pi F.Gg}{2}$. His igitur casibus volumen re-

perie-

perietur, ſi area ſectionis aquae ducatur in diſtantiam centri grauitatis g, ſemiſſis eiusdem ſectiones aquae ab axe AB, ac productum multiplicetur per $\frac{\pi}{2}$.

§ 50. Tertia nauium ſpecies eas ſub ſe complectitur figuras, in quibus omnes ſectiones verticales plano diametrali parallelae eidem ſunt ſimiles. Huiusmodi nauem ſeu potius carinam repraeſentet figura AEDFB, in qua ſit ADB planum diametrale, ac RQS ſectio verticalis eidem parallela, quae ideo ipſi plano diametrali erit ſimilis; idque ex utraque ſectionis ampliſſimae EDF parte. Hanc ob rem erit $AC:CD = RQ:PQ$, atque $BC:CD = SP:PQ$, ex quibus analogiis patet in iſtis figuris ſectionem aquae et ſectionem ampliſſimam a ſe inuicem ita pendere, vt areae ACE, DCE et BCE inter ſe ſint affines communem baſin CE habentes. Tab. III. fig. 2.

§. 51. In his itaque figuris ſectio aquae ita determinatur, vt eius partes AEF et BEF proram et puppim ſpectantes debeant eſſe affines: ſeu PR ad PS eandem debeat tenere rationem quam AC ad BC. Hanc obrem ponamus praeter plani diametralis figuram ADB datam eſſe figuram ſectionis ampliſſimae CEDF: his enim duabus ſectionibus datis totius carinae figura innoteſcet. Hunc in finem poſitis $AC = a$, $CE = CF = b$ et $CD = c$, ſint pro plano diametrali abſciſſa $CT = p$ et applicata $TV = q$: itemque pro ſectione ampliſſima ſit abſciſſa $CP = r$ et applicata $PQ = s$: atque ob has figuras datas dabitur q per p, ſimiliterque s per r. Propter ſimilitudinem vero erit $CD\ (c) : CA\ (a) = PQ\ (s) : PR$ vnde fit $PR = \frac{as}{c}$, quae eſt applicata anterioris partis ſectionis aquae reſpondens ab-

ſciſſae $CP = r$. Pro parte autem poſteriori erit $PS = \frac{\alpha s}{c}$ poſito $CB = \alpha$.

§. 52. Sumatur nunc pro ſectione RQS abſciſſa PY, quae ſit ad CT, p vt RQ s ad CD, c ſeu $PY = \frac{ps}{c}$ erit applicata reſpondens $YZ = \frac{qs}{c}$. Quamobrem cum punctum Z ſit in ſuperficie carinae, ſi tres variabiles, quibus locus puncti Z determinatur, ponantur $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, erit $CX = x = \frac{ps}{c}$, $XY = y = r$ et $YZ = z = \frac{qs}{c}$. Quoniam vero datur s per r, dabitur quoque s per y, ob $r = y$, ſitque $s = Y$, exiſtente Y functione ipſius y. Deinde aequatio $\frac{x}{z} = \frac{p}{q}$, quia q datur per p praebebit $p =$ functioni nullius dimenſionis ipſarum x et z: ex quo fiet $s = Y = \frac{cx}{p} =$ functioni vnius dimenſionis ipſarum x et z. Haecque eſt proprietas eſſentialis figurarum ad tertiam ſpeciem relatarum.

§. 53. Ad ſoliditatem huiusmodi figurarum inueniendam, ponatur area plani diametralis $ADB = E$, erit area $RQS = \frac{Ess}{cc}$; atque volumen ſpatii $ARQSB = \frac{E}{cc} \int ss\,dr$. Si ergo poſt integrationem ponatur $r = b$, prodibit volumen ſemiſſis carinae AEBD, ex quo volumen totius carinae erit $= \frac{2E}{cc} \int ss\,dr$. Ponatur area ſectionis ampliſſimae EDF $= F$, atque eius ſemiſſis CDE, centrum grauitatis in g, ex quo ad EF ducatur verticalis gG. His factis erit F $2\int s\,dr$. atque $Gg = \frac{\int ss\,dr}{2\int s\,dr}$, vnde habebitur $\int ss\,dr = F.Gg$: ſi quidem integralia, vti decet fuerint accepta. Hinc itaque pro ſoliditate totius carinae emerget ſequens expreſſio $\frac{2E \cdot F \cdot Gg}{c^2} = \frac{2E \cdot F \cdot Gg}{CD^2}$; cuius valor ex datis plano diametrali et ſectione ampliſſima pro operatione practica non difficulter inuenitur.

§. 54.

§. 54. Tres istae priores species hoc inter se conueniunt atque a sequentibus tribus discrepant, quod habeant sectiones vni principalium parallelas inter se similes, cum in sequentibus tantum sint affines. Quoniam autem figurae similes in affinibus continentur, etiam hae tres species priores in sequentibus tribus comprehenduntur. Interim tamen idoneum visum est ex similitudine peculiares species constituere, cum calculus pro iis fiat admodum facilis; ac figurae nauium, quae ad has species pertinent, a reliquis distingui mereantur. Praeterea in his iam expositis tribus speciebus duae sectiones principales sufficiunt ad totam figuram determinandam, atque tertia ex iis sponte definitur: at in sequentibus speciebus omnes tres sectiones principales pro lubitu assumere licet, ex quo earum latissima extensio colligi potest.

§, 55. In sequentibus igitur speciebus omnes tres sectiones principales nobis erunt datae, ex iisque nauium figura triplici prodo determinabitur: primo scilicet eas figuras considerabimus, in quibus omnes sectiones horizontales cum inter se tum sectioni aquae sint affines; secundo sectiones verticales sectioni amplissimae parallelae eidem affines ponentur: tertio denique affinitas statuetur inter sectiones verticales plano diametrali parallelas; haeque tres species constituent nobis species quartam, quintam et sextam. Qui autem haec attentius perpendet facile agnoscet vix dari aut excogitari posse carinae figuram, quae si non ad aliquam trium priorum specierum pertineat, ad quandam posteriorum referri nequeat. Atque hanc ob rem perfectissimam nauium figuram, quam quaerimus, in his sex speciebus contineri, sine vlla haesitatione tuto assumimus.

D 2 §. 56.

§. 56. Cum igitur in posterioribus his tribus speciebus tres sectiones principales a se inuicem non pendeant, singulaeque pro arbitrio accipi queant, dummodo in punctis E, D, et F conueniant, singulas peculiaribus aequationibus exprimemus inter binas coordinatas orthogonales, quarum alterius abscissae scilicet a puncto medio C computentur. Ita pro sectione aquae p denotabit abscissam in axe CA sumtam ac q applicatam respondentem. Porro r denotabit abscissam sectionis amplissimae in axe CE sumtam atque s applicatam respondentem. Denique pro plano diametrali t erit abscissa in axe CD sumta, et u eius applicata. Ob tres igitur sectiones principales vel datas vel tanquam datas considerandas, cognitae erunt aequationes cum inter p et q, tum inter r et s tum etiam inter t et u.

§. 57. Quod denique ad longitudinem, latitudinem et profunditatem cuiusque carinae in genere attinet, a nobis semper denotabit longitudinem prorae CA, puppis autem longitudo CB designabitur littera α. Maximae autem latitudinis EF semissis, hoc est vel CE vel CF erit nobis constanter $= b$. Profunditatem vero CD exprimat littera c. Deinde cum harum trium sectionum principalium areae in calculum sint ingressurae, ponemus aream sectionis aquae AEBF $= 2$ D, quia ex duabus portionibus similibus et aequalibus AEB, AFB quarum vtraque erit $=$ D, constat. Semissis vero sectionis amplissimae sit $=$ E ita vt sit area EDF $= 2$ E. Area tandem plani diametralis ADB, quia non constat duabus portionibus aequalibus et similibus exponatur littera F.

§. 58. Examini ergo ſubiiciamus nauium ſpeciem quartam, in qua omnes ſectiones horizontales ſeu ſectioni aquae parallelae eidem ſint affines. Sit igitur AEDBF eiusmodi figura pro cuius ſectione aquae ponatur abſciſſa CI $= p$; applicata IK $= q$: pro ſectione vero ampliſſima ſit abſciſſa CH $= r$, applicata HQ $= s$; ac pro plano diametrali ſit abſciſſa CP $= t$, et applicata PS $= u$. Ex figura autem intelligitur eſſe CP = HQ ſeu $s = t$; quare cum r per s et u per t detur, erunt r et u functiones vel ipſius t vel ipſius s. Concipiatur nunc per punctum P facta ſectio horizontalis SQTR, quae ita erit comparata, vt tam portio SQR affinis ſit portioni ſectionis aquae AEF, quam portio TQR portioni EBF. Tab. II. fig. 2.

§. 59. In hac igitur ſectione ſi capiatur abſciſſa PO quae ſit ad CI (p) vt PS (u) ad CS (a), ſeu PO $= \frac{pu}{a}$, erit ex natura figurarum affinium applicata OZ : IK (q) = PQ (r) : CE (b) ſiue OZ $= \frac{qr}{b}$. Si nunc ex puncto Z, quod in ſuperficie figurae eſt ſitum, ducatur ad ſectionem aquae normalis ZY, et ex Y ad axem AC normalis YX, erunt CX $= x$; XY $=$; et YZ $= z$ tres coordinatae, quibus natura huius ſuperficiei exprimetur. Erit autem $x =$ PO $= \frac{pu}{a}$; $y =$ OZ $= \frac{qr}{b}$, atque $z =$ CP = HQ $= t = s$: hinc ergo z loco t et s ſubſtituendo fiet tam u quam r functiones ipſius z. Priores vero aequationes praebent $p = \frac{ax}{u}$ et $q = \frac{by}{r}$, vnde ex aequatione inter p et q data, elicietur aequatio inter x, y et z, qua natura ſuperficiei continebitur.

§. 60. Si aequationum $p = \frac{ax}{u}$ et $q = \frac{by}{r}$ altera per alteram diuidatur, habebitur $\frac{p}{q} = \frac{arx}{buy}$ vbi $\frac{ar}{bu}$ erit functio

 quae-

quaepiam ipſius z. Quoniam autem q per p datur, definiri poterit valor ipſius p ex iſta aequatione per x, y et z, qui valor ita erit comparatus, vt ſi ſolae quantitates x et y dimenſiones conſtituere cenſeantur, fiat $p =$ functioni ipſarum x et y nullius dimenſionis, in qua tamen z quoque inſit. Quare cum ſit $u = \frac{ax}{p}$ aequatio localis pro huius generis figuris hanc habebit proprietatem, vt functio quaedam ipſius z aequetur functioni ipſarum x, y et z, in qua variabiles x et y coniunctim vtique vnam dimenſionem obtineant. Ex aequatione autem locali hoc modo inuenta omnes ſectiones huiusmodi figurarum innoteſcent.

§. 61. Ad ſoliditatem vero huius figurae definiendam notare conuenit aream ſectionis SQTR ſe habere ad aream ſectionis aquae AEBF vt ru ad ab. Quare cum ſectionis aquae area poſita ſit $= 2$ D, erit area ſectionis SQTR $= \frac{2Dru}{ab}$; in qua expreſſione quantitates r et u dantur per $s = t = z$; ita vt poſito CP $= z$ futurae ſint ambae quantitates r et u functiones ipſius z. Ex his obtinebitur volumen totius carinae propoſitae $= \frac{2D}{ab} \int r u dz$, ſi quidem poſt integrationem ita inſtitutam, vt integrale euaneſcat poſito $z = 0$, ponatur $z = c$. Atque hoc pacto volumen figurae ex datis tribus ſectionibus principalibus non difficulter definietur.

Tab. III fig. 1. §. 62. Sequitur nauium ſpecies quinta ad quam omnes figuras retulimus, quae ſectiones verticales ampliſſimae parallelas eidem affines habent. Eiusmodi ergo figura ſit AEBFD, cuius ſectio aquae AEBF data ſit per aequationem inter abſciſſam CX $= p$ et applicatam XR $= q$: pro

pro ſectione autem ampliſſima CDF data ſit aequatio inter abſciſſam CP $= r$ et applicatam PM $= s$. Denique plani diametralis natura expreſſa ſit aequatione inter abſciſſam CQ $= t$ et applicatam QV $= u$. Quoniam autem haec figura ad propoſitum caſum eſt accommodata, erit CX $=$ QV ſeu $p = u$; quare cum q per p et t per u dentur erunt q et t functiones eiusdem quantitatis ſiue p ſiue u.

§. 63. Per punctum axis X concipiatur facta ſectio verticalis RVS ſectioni ampliſſimae parallela quae cum eidem ſit affinis, capiatur in ea abſciſſa XY eandem tenens rationem ad abſciſſam CP quam tenet XR ad CE, vnde erit XY $= \frac{qr}{b}$; applicata autem reſpondens YZ ita erit comparata, vt ſit YZ : PM $(s) =$ XV (t) : CD (c), ſeu YZ $= \frac{st}{c}$. Ponatur iam CX $= x$; XY $= y$ et YZ $= z$, erit $x = p = u$; $y = \frac{qr}{b}$ et $z = \frac{st}{c}$: vnde q et t erunt functiones ipſius x: reliquae aequationes praebent $\frac{y}{z} = \frac{cqr}{bst}$, vnde ob s per r datum reperietur $r =$ functioni ipſarum x, y, z, in qua y et z vbique numerum dimenſionum nullum conſtituant. Quamobrem ob $q = \frac{by}{r}$, functio quaepiam ipſius x aequabitur functioni cuidam ipſarum x, y, et z in qua variabiles y et z ſolae conſideratae vnicam dimenſionem conſtituant.

64. Quod ad volumen huius figurae attinet, id ex area ſectionis RVS, quae cognitam tenet relationem ad aream ſectionis ampliſſimae, definietur: cum enim ſit area EDF $= 2$ E, erit area RVS $= \frac{2Eqt}{bc}$ atque quantitates q et t, erunt functiones eiusdem variabilis p vel u propter $p = u$. Quare ſi retineatur abſciſſae CX denominatio

x,

x, erunt q et t functiones ipsius x, quae deriuabuntur ex aequationibus inter q et p atque inter t et u datis, scribendo x loco p et u. Hinc itaque $\frac{2E}{bc}\int qt\,dx$, integrali ita sumto vt euanescat posito $x = 0$, dabit volumen portionis EDFSVR; ac facto post integrationem $x = a$ proueniet soliditas seu volumen prorae AEDF, si ergo simili modo quaeratur volumen puppis, horum voluminum aggregatum dabit totius figurae propositae volumen.

Tab. III. fig. 2. § 65. Peruenimus denique ad nauium speciem sextam, in qua omnes sectiones verticales plano diametrali parallelae eidem sunt affines; huiusmodi figura sit AEDBF. Ponatur igitur pro sectione aquae abscissa CK $= p$, applicata KR $= q$. Pro sectione amplissima vero sit abscissa CP $= r$ applicata PQ $= s$: ac pro plano diametrali sit abscissa CN $= t$, applicata NV $= u$: eritque $q = r$: ita vt futurae sint p et s functiones eiusdem quantitatis variabilis q vel r. Hic quidem vt in praecedentibus speciebus notandum est non necessario esse $q = r$, sed potius q et r sunt quantitates a se inuicem non pendentes. Quoniam vero figura ad casum praesentem accommodari debet, is facillime euoluetur, si perpetuo r ipsi q aequale capiatur.

§. 66. Per punctum P fiat sectio RQS plano diametrali parallela, quae ob CP $=$ KR simul per punctum R transibit: erit ergo eius profunditas PQ $= s$, et longitudo versus proram PR $=$ CK $= p$. Ducto nunc ex V in plano diametrali perpendiculo VT, erit CT $= u$, et TV $= t$; quo facto in sectione RQS capiatur PY : PR $=$ CT : CA seu PY $= \frac{pu}{a}$, erit ob affinitatem YZ : PQ $=$ TV : CD seu YZ $= \frac{st}{c}$. Iam per Y ducta applicata MYX

MYX dicantur $CX = x$; $XY = y$, et $YZ = z$ eritque $y = r = q$; $x = \frac{pu}{a}$ et $z = \frac{st}{c}$; ex quibus tandem haec iſtiusmodi figurarum proprietas eſſentialis deducitur, vt functio quaepiam ipſius y aequalis ſit functioni ipſarum x, y et z in qua variabiles x et z ſolae conſideratae vbique vnam dimenſionem conſtituant.

§. 67. Volumen denique huius figurae pariter ac praecedentium ex natura figurarum affinium determinabitur. Cum enim plani diametralis ADB area poſita ſit $= F$, erit area ſectionis RQS illi affinis $= \frac{Fps}{ac}$, atque ob p et s per q et r datas, et propter $y = r = q$, erunt p et s functiones eiusdem variabilis $y = CP$. Quamobrem $\frac{F}{ac}\int p\,s\,dy$ dabit ſoliditatem portionis ARQSB integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $y = o$. Quare ſi poſt integrationem ponatur $y = b$, prodibit ſoliditas ſemiſſis figurae propoſitae, ex quo totius figurae ſeu carinae propoſitae volumen erit $= \frac{2F}{ac}\int p\,s\,dy$, integratione debito modo peracta.

§. 68. Quoniam figurae ſimiles in figuris affinibus continentur harumque quaſi ſpeciem conſtituunt, ita tres poſteriores ſpecies in ſe priores comprehendunt; ex quo fit, vt quae figura ad ſpeciem primam pertinet, eadem quoque ſub ſpecie quarta contineatur; ſimilique modo ſecunda ſpecies ſub quinta, et tertia ſub ſexta ſit contenta. Hoc igitur modo tres adhuc ſimpliciores ſpecies conſtitui poſſunt, in quibus ſectiones vni principalium parallelae eidem non ſolum ſimiles ſed etiam aequales ſint, cuiusmodi figurae paſſim in minoribus nauigiis reperiuntur. Omnium autem ſimpliciſſima figura erit parallelepipedum,

in qua nullae ſectiones curuilineae locum inueniunt; talem autem figuram arca Noae habuiſſe fertur.

§ 69. Quod ergo ad figuram carinae externam attinet, eius commodiſſime decem ſpecies ſtatuuntur; quarum etiam in ſequentibus rationem habebimus. Prima nimirum ſpecies conſtabit parallelepipedo; ſecunda eiusmodi figuris, quae habent omnes ſectiones horizontales inter ſe aequales et ſimiles. In figuris tertiae ſpeciei erunt omnes ſectiones verticales ſectioni ampliſſimae parallelae inter ſe ſimiles et aequales. Figurae autem quartae ſpeciei habebunt omnes ſectiones verticales plano diametrali parallelas inter ſe ſimiles et aequales. Has deinde ſpecies ſequentur eae ſex, quas ante iam ſumus contemplati, quarum tres priores ex ſimilitudine ſectionum vni principalium parallelarum, poſteriores vero ex affinitate ſunt deſumtae. Quatuor autem ſpecies nunc demum ſuperadditae tractatu tam ſunt faciles, vt hic non ſit opus eas ad aequationes redigere earumque ſoliditatem determinare.

§. 70. Cum igitur in hoc libro nobis ſit propoſitum imprimis in conuenientiſſimam carinae figuram inquirere, ad quamque circumſtantiam, quae ad determinationem figurae nauium quicquam confert, ſingulas recenſitas decem ſpecies euoluemus, ac quo pacto requiſitis conditionibus maxime ſatisfiat, inueſtigabimus. Quodſi ergo hac methodo progrediamur facile intelligetur, quantum quaeque ſpecies capax ſit perfectionis, quibusque impedimentis ſit obnoxia: ex quibus omnibus coniunctio haud difficulter colligetur, ex quanam ſpecie optima nauium figura ſit deſumenda. In hac autem disquiſitione ad vſum, cui naues deſtinari ſolent, potiſſimum eſt reſpiciendum.

§. 71. Quoniam autem, ſi tres poſtremae ſpecies ſpectentur, tres figurae indeterminatae et arbitrariae ſcilicet tres ſectiones principales in calculum ingrediuntur, ne tractatio nimis ſit vaga, iuuabit has ſectiones aequationibus, ſatis late patentibus, includi, quae ita ſint comparatae, vt propemodum omnes figuras, quae in earum locum ſubſtitui poſſunt, ſub ſe comprehendant. Hinc enim id conſequemur commodi, vt pro his ſectionibus definitas habeamus aequationes, quae non ſolum facilius tractari poſſunt, quam prorſus indefinitae, ſed etiam ad determinationes recipiendas magis ſunt accommodatae: conuenit enim ſtatim omnes eas figuras excludi, quae ad ſtructuram ſunt inutiles, atque ad nauium formam formandam ineptae. Hoc vero ſubſidio tum ſolum vtemur, quando circumſtantiae non ita ſunt comparatae, vt figuram alicuius ſectionis omnimode determinent.

§. 72. Maneant igitur conſtanter a longitudo prorae α longitudo puppis, b ſemiſſis amplitudinis maximae, et c maxima altidudo carinae, atque conſideremus ſectionem aquae ſeorſim, quae ſit AEBF, eiusque diameter recta AB a prora A ad puppim B protenſa. Huius figurae Tab. IV.
ſit EF maxima latitudo, diuidens ſectionem aquae in duas fig. 1.
partes, quarum altera verſus proram altera verſus puppim eſt ſita. Quoniam autem ambae partes, ex vtraque diametri AB parte ſitae, ſunt inter ſe ſimiles et aequales, ſufficiet alteram medietatem determinaſſe. Hunc in finem poſita abſciſſa $CP = p$ et applicata $PQ = q$, aequatio inter p et q ita debebit eſſe comparata, vt generalibus quibusdam conditionibus, ad nauium conſtructionem et figuram determinandam neceſſariis, ſatisfaciat.

§. 73. Quoniam igitur eſt CA $= a$; CB $= \alpha$; CE $=$ CF $= b$, aequatio inter p et q ante omnia ita debet eſſe comparata, vt poſito $p = o$, fiat $q = b$: quare ſi P talis fuerit functio ipſius p, quae abeat in B, poſito $p = o$, debebit eſſe $q = \frac{bP}{B}$. Deinde niſi figura ſectionis aquae tum verſus proram tum verſus puppim ſit aperta, id quod quibusdam caſibus euenire poteſt, quos in hoc negotio non ſpectemus, aequatio inter p et q ita debet eſſe comparata, vt poſito vel $p = a$ vel $p = -\alpha$, euaneſcat q. His ambabus conditionibus ſatisfiet ſi pro aequatione, naturam ſectionis aquae exprimente, aſſumatur eiusmodi forma $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m \alpha^n}$ $(1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + \text{etc.})$ denotantibus m et n numeros nihilo maiores. Si enim eſſet vel $m = o$ vel $n = o$, tum ſectio aquae vel in prora vel in puppi non foret clauſa, ſed ad caſus modo commemoratos pertineret, ad quos ergo haec aequatio etſi eos excluſimus, tamen eſt accommodata.

§. 74. Praeterea maxime requiritur vt curuae huius tangens in puncto E ſit axi AB parallela, primo enim in praxi anguli ad latera nauis tolerari non ſolent; deinde vero hoc ipſo, quod applicata CE omnium maxima eſſe debet, neceſſe eſt, vt tangens ad E ſit axi AB parallela. Huic conditioni vt ſatisfiat, oportet vt q nullum incrementum decrementumue capiat, ſi loco $p = o$ ponatur p infinite paruum. Impleta autem hac conditione reperietur eſſe debere $\sigma = \frac{m\alpha - na}{a\alpha}$, reliquae vero coefficientes adhuc manent indeterminatae, vnde ampliſſima habetur aequatio pro omnis generis ſectionibus aquae ad praxin idoneis, quae erit haec $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m \alpha^n}$ $(1 + \frac{(m\alpha - na)}{a\alpha} p + \eta p^2 + \theta p^3 + \iota p^4 + \text{etc.})$

§. 75.

§. 75. Quoniam porro naues per ſatis notabile interuallum eandem fere latitudinem conſeruare ſolent, curuatura in puncto E vehementer exigua eſſe debet, inſuperque radium curuedinis in E verſus axem AB directum, ſeu curuam in E concauam verſus hanc regionem eſſe oportet. Fit autem poſito p infinite paruo $q = b\,(1 - \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2 - 2a^2\alpha^2\eta)}{2a^2\alpha^2}\,p^2$ curua ergo in E concaua erit verſus axem AB ſi fuerit $\eta < \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2)}{2a^2\alpha^2}$. At ſi fuerit $\eta = \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)}{2a^2\alpha^2}a^2$ tum curuatura in E penitus euaneſcet, atque curua hoc loco cum linea recta confundetur, quae conditio ad pleraſque naues perquam idonea videtur.

§. 76. Si ergo ponatur $\sigma = \frac{m\alpha - na}{a\alpha}$, atque $\eta = \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2}{2a^2\alpha^2} - \frac{\gamma}{a\alpha}$, denotante γ quantitatem affirmatiuam, aequatio $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m\alpha^n}(1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + i\,p^4 +$ etc. praebebit figuram conuenientem pro ſectione aquae cuius curuatura in E eo erit minor, quo minor fuerit quantitas γ, atque ſi γ omnino euaneſcat, fiet radius curuedinis in E infinitus. Vt autem applicatae q creſcentibus abſciſſis p continuo decreſcant, oportet coefficientibus θ et i etc. idoneos tribui valores; nam σ et η hoc modo determinata iam praebent differentialia ipſius q negatiua. Hoc vero ſatis tuto obtinebitur, ſi curua in punctis A et B in axem incidat.

§. 77. Si exponentes m et n fuerint nihilo maiores, tum curua in vtroque puncto A et B cum axe concurrit: at per exponentes m et n effici poteſt, vt concurſus curuae cum axe in punctis A et B fiat datus. Scilicet ſi

E 3 $m < 1$

$m < 1$ tum angulus QAP erit rectus, tangens autem in A in ipſum axem incidet, ſi fuerit $m > 1$: at angulus QAP euadet acutus vel obtuſus ſi $m = 1$. vt autem hic angulus ſit acutus inſuper oportet eſſe $1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 +$ etc. > 0 poſito $p = a$, quod quidem ſponte patet, alias applicata q fieret alicubi negatiua. Simili modo poſito $p = -\alpha$ debet eſſe $1 - \varsigma \alpha + \eta \alpha^2 - \theta \alpha^3 +$ etc. > 0. angulus vero ad B pendebit ab exponente n, qui ſi fuerit vnitate maior, euaneſcet angulus EBC, rectus autem erit ſi $n < 1$, at acutus ſi $n = 1$.

§. 78. Neque vero abſolute eſt neceſſarium, vt partes AE et BE vnam eandemque curuam continuam conſtituant, ſed ad vſum practicum ſufficit, ſi ambae hae partes in E ita conueniant, vt ibi communem habeant tangentem axi AB parallelam. Praeſtabit autem hoc modo ſectionem aquae concipere, cum inuentio areae et centri grauitatis multo fiat facilior atque adeo algebraice expediri queat. Conſideremus itaque primo portionem prorae ACE cuius abſciſſa CP poſita $= p$ et applicata PQ $= q$, iſta aequatio $q = \frac{b(a-p)^m}{a^m} \left(1 + \frac{mp}{a} + \frac{(m(m+1)-\gamma)}{2a^2} p^2 + \frac{\sigma p^3}{a^3} + \frac{\eta p^4}{a^4} + \text{etc.}\right)$ conditionibus ſupra allatis ſatisfaciet, ſi quidem γ ſignificet numerum affirmatiuum.

§. 79. Simili modo ſi pro parte poſteriore BCE ponatur abſciſſa C$p = p$ et applicata $pq = q$, ſequens aequatio conditionibus memoratis maxime ſatisfaciet $q = \frac{b(\alpha-p)^n}{\alpha^n} \left(1 + \frac{np}{\alpha} + \frac{(n(n+1)-\delta)}{2\alpha^2} p^2 + \frac{\theta p^3}{\alpha^3} + \frac{ip^4}{\alpha^4} + \text{etc.}\right)$. Ambae enim iſtae curuae non ſolum conuenient in puncto E, ſed etiam hoc loco tangentem habebunt communem axi AB parallelam. Praeterea vero hae curuae in A et B

cum

cum axe conuenient, ſi quidem exponentes m et n fuerint nihilo maiores. Denique hae aequationes, etiamſi innumerabiles termini adiici poſſint, tamen ſatis late patere videntur, ſi tantum termini vsque ad poteſtatem tertiam retineantur, reliqui vero reiiciantur, cum coefficientes duo γ, et σ item δ et θ abunde ſufficiant, ad omnis generis curuas comprehendendas.

§. 80. Vt autem integrationes, quae tam ad aream quam centrum grauitatis inueniendum inſtitui debent, facilius abſoluantur, ponamus iſtam aequationem latiſſime patentem $y = (a-x)^m \left(A + \frac{Bx}{a} + \frac{Cx^2}{a^2} + \frac{Dx^3}{a^3} + \frac{Ex^4}{a^4} + \right.$ etc.), pro qua quaeratur valor ipſius $\int y\,dx$, ſi poſt integrationem ponatur $x = a$; reperietur autem calculo finito $\int y\,dx = a^{m+1} \left(\frac{A}{m+1} + \frac{1B}{(m+1)(m+2)} + \frac{1\cdot 2C}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \right.$ etc. vel generatim poſt integrationem poſito $x = a$ erit $\int (a-x)^m dx \left(A + \frac{Bx}{a} + \frac{Cx^2}{a^2} + \frac{Dx^3}{a^3} + \text{etc.}\right) = \frac{a^{m+1}}{m+1} \left(A + \frac{1B}{m+2} + \frac{1\cdot 2C}{(m+2)(m+3)} + \frac{1\cdot 2\cdot 3D}{(m+2)(m+3)(m+4)} + \text{etc.}\right)$ quae integratio generalis in praeſentibus integrationibus ingentem praeſtabit vtilitatem.

§. 81. Quodſi nunc hac regula vtamur ad aream ſectionis aquae propoſitae AEB inueniendam, reperietur primo area ACE $= \frac{ab}{m+1} \left(1 + \frac{m}{m+2} + \frac{m(m+1)-\gamma}{(m+2)(m+3)} + \frac{6\sigma}{(m+2)(m+3)(m+4)}\right)$, exiſtente aequatione pro portione ACE, $q = \frac{b(a-p)^m}{a^m} \left(1 + \frac{mp}{a} + \frac{(m(m+1)-\gamma)p^2}{2a^2} + \frac{\sigma p^3}{a^3}\right)$. Pro parte autem poſteriore BCE, ſi fuerit aequatio $q = \frac{b(\alpha-p)^n}{\alpha^n} \left(1 + \frac{np}{\alpha} + \frac{(n(n+1)-\delta)p^2}{2\alpha^2} + \frac{\theta p^3}{\alpha^3}\right)$ erit area BCE $= \frac{\alpha b}{n+1} \left(1 + \frac{n}{n+2} + \frac{n(n+1)-\delta}{(n+2)(n+3)} + \frac{6\theta}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right)$, qua-

rum

rum expreſſionum ſumma bis ſumta dabit aream totius ſectionis aquae AEBF.

§. 82. Contemplemur nunc ſectionem ampliſſimam Tab. IV. fig. 2. EDF, cuius latitudo in ſuperficie aquae eſt $EF = 2b$, et profunditas $CD = c$; conſtat autem haec ſectio ex duabus partibus ECD et FCD inter ſe aequalibus et ſimilibus; quare alteram medietatem determinaſſe ſufficiet. Si ergo pro ſemiſſe ECD ponatur abſciſſa $CR = r$, et applicata $RS = s$, aequatio inter r et s ita debet eſſe comparata, vt poſito $r = o$, fiat $s = c$, atque vt quo maior capiatur abſciſſa r applicatae s continuo decreſcant, donec tandem ſi fiat $r = CE = b$, applicata s euaneſcat, ſiquidem curuatura a D vsque ad E fuerit continua. Interim tamen aequatio generalis inter r et s ita concinnari poteſt, vt etiam pro iis caſibus, quibus curua non eſt continua, valeat; quod euenit ſi ſpatium quodpiam linea recta claudatur.

§. 83. His duabus commemoratis conditionibus ſatis fiet, ſi pro curua ESD iſta accipiatur aequatio $s = \frac{c(b-r)^{\varkappa}}{b^{\varkappa}} (1 + \frac{\beta r}{b} + \frac{\varepsilon r^2}{b^2} + \frac{i r^3}{b^3} + \text{etc.})$ cuius ſeriei ſufficit quatuor priores terminos hic exhibitos aſſumere. Si enim ſit exponens $\varkappa$ affirmatiuus, negatiuus enim nullo modo eſſe poteſt; poſito $r = o$ fit $s = c$, facto autem $r = b$, prodit $s = o$. At ſi $\varkappa = o$ aequatio ad eos caſus accommodata erit, quibus ſectio haec ad E linea recta verticali terminatur, vti ſi haec ſectio fuerit parallelogrammum rectangulum. Sin r capiatur infinite paruum, prodit $s = c (1 - \frac{(\varkappa-\beta)r}{b} + \frac{(\varkappa^2 - \varkappa - 2\beta\varkappa + 2\varepsilon)r^2}{2o^2})$ quae ergo expreſſio maior eſſe non debet quam c, quoniam CD eſt maxima applicata.

§. 84.

§. 84. Nisi ergo sit $\beta = \varkappa$, quo casu tangens ad D fiet horizontalis, atque angulus CDE rectus, oportet esse $\beta < \varkappa$; atque a defectu $\varkappa - \beta$ pendebit quantitas anguli CDE, ita vt per coefficientem β angulus CDE ad arbitrium formari possit, erit enim anguli CDE tangens $= \frac{b}{(\varkappa - \beta)c}$. At si angulus hic CDE capiatur rectus, quo casu erit $\beta = \varkappa$, necesse est vt sit $\varkappa(\varkappa + 1) - 2\varepsilon > 0$, quo curuatura ad D fiat concaua versus superficiem aquae EF. Quod denique ad angulum, quem curua in E cum axe CE conficit, attinet, is erit rectus si fuerit $\varkappa < 1$, nullus si $\varkappa > 1$ at arbitrariam quantitatem habebit, si sumatur $\varkappa = 1$. Ceterum area huius sectionis amplissimae ex assumta aequatione algebraice poterit definiri.

§. 85. Quae ante de figura sectionis aquae monuimus, eadem locum habent in plano diametrali ADB; haec enim figura ita quoque esse debet comparata, vt positis coordinatis $CV = u$ et $VT = t$, fiat $t = CD = c$ facto $u = 0$; atque vt curua in punctis A et B in axem AB incidat. Hanc ob rem vel vna curua continua pro sectione ADB poterit assumi, vel duae diuersae, quae in D concurrant, ibique tangentem habeant communem horizontalem. Quo circa pro portione CDA accipi poterit haec aequatio $t = \frac{c(a-u)^{\mu}}{a^{\mu}}\left(1 + \frac{\mu u}{a} + \frac{(\mu(\mu+1)-g)u^2}{2a^2} + \frac{fu^3}{a^3}\right)$ pro parte autem posteriore existente $Cv = u$ et $vt = t$, haec aequatio $t = \frac{c(\alpha-u)^{v}}{\alpha^{v}}\left(1 + \frac{vu}{\alpha} + \frac{(v(v+1)-d)u^2}{2\alpha^2} + \frac{bu^3}{\alpha^3}\right)$, de quibus aequationibus eadem omnino sunt tenenda, quae supra de sectione aquae annotauimus. Tab. IV. fig. 3.

§. 86. Cum in hoc capite constituissem naues in genere contemplari, atque omnes varietates, quae quidem in nauibus locum habere possunt, perpendere, vt mox intelligatur, quibusnam rebus determinandis nauibus summa perfectio inducatur; conueniebat praecipuas nauium diuisiones commemorari. Primam itaque distinctionem desumsi ex quantitate vel pondere nauium, qua eae secundum onera, quibus gerendis pares sunt, distingui solent. Secunda diuisio petita est a figura partis aquae immersae seu carinae, huiusque varietates, quamuis sint innumerabiles, ad decem species reuocaui, in quibus omnes omnino nauium formae, quaecunque excogitari queunt, comprehendi posse videntur. Reliquum igitur est, vt ad ceteras varietates nauium attendamus, quae cum ex vsu tum ex modo eas mouendi originem trahunt.

§. 87. Quod quidem ad vsum, cui naues destinari solent, spectat, ingens deprehenditur discrimen; aliae enim naues ad onera vehenda, aliae ad homines sunt accommodatae, aliae autem ad bellum gerendum, quae bellicae vocantur, sunt instructae, cuius diuersitatis vtique in constructione nauium ratio haberi debet, vt aptae reddantur ad scopum intentum consequendum. Sed haec varietas ad nostrum institutum non admodum pertinet, cum hic non tam ad nauium structuram internam, quam externam respiciamus, a qua potissimum cursus et gubernatio pendet. Interim tamen hanc distinctionem notasse iuuat, cum a varietate onerationis non solum locus centri grauitatis, sed etiam momenta nauium afficiantur, quarum rerum cognitio maxime est necessaria.

§. 88. Vltimam ac principalem fere nauium diuisionem suppeditat varietas virium, quibus naues in aqua propelli

pelli ſolent. Cum enim naues non ideo fabricari ſoleant, vt in aqua quieſcant, ſed vt de loco in locum promoueantur, viribus ad hoc eſt opus quibuscunque, quarum ingens datur multiplicitas. Aliae enim naues a curſu fluminis abripiuntur, aliae vel a hominibus vel pecudibus ad ripam protrahuntur, aliae remis propelli ſolent, aliae denique ope venti in vela irruentis promouentur. Ac praeter has vires complures aliae excogitari atque in vſum transferri poſſent. Praecipue autem a nobis notari merentur duo tantum virium genera cum a remis tum a vento petita, non ſolum quod haec maxime ſunt in vſu, ſed etiam quod nauium conſtructio ad ea potiſſimum ſit accommodanda.

§. 89. Cum igitur, quae ad ſitum nauium aequilibrium atque ad firmitatem itemque ad reſiſtentiam attinent, et quae praeterea res omnibus nauibus ſunt communes expoſuero, reliqua tractatio erit bipartita, quarum altera circa naues remis propulſas, altera autem circa eas, quae vento promouentur, erit occupata. Neque vero hinc reliquae vires, quae ad naues propellendas adhiberi poſſunt, prorſus excluduntur, ſed quo quaeque vis cum altera harum duarum maiorem habebit affinitatem, ex iis, quae tradentur colligere licebit, quaenam ſtructura, quaeque gubernandi ratio ad eiusmodi naues maxime ſit idonea. Deinde quoque ſi naues coniunctim remis et vento promoueantur, iudicare licebit, quomodo iſtius modi naues comparatas eſſe oporteat. Earum ſcilicet ſtructura medium tenere debebit, inter eam, quae remis conuenit, atque inter eam, quam vela requirunt: eoque magis ad alteram rationem accedere debebit, quo magis altera vis alteri prae-

valebit; qua de re iudicium ex vſu, cui nauis quaeque deſtinatur, erit petendum.

§. 90. Antequam autem, quae ſtructura nauibus remis propellendis conueniat, inueſtigari queat, effectus, qui ab actione remorum proficiſcitur, determinari debet: quae inquiſitio, cum a nemine adhuc ſatis ſit euoluta, diligentius ex principiis motus erit pertractanda. Eo igitur loco non ſolum erit definiendum, quantum remi ad nauem propellendam efficiant, ſi data vi agitentur, ſed etiam, quod praecipuum eſt, forma remorum maxime idonea et virium remigum applicatio maxime lucroſa determinari debebit. Plurimum enim in hoc negotio intereſt, effectum per easdem vires maximum lucrari, ne remigum numerus praeter neceſſitatem nimium ſit multiplicandus quae cautio, ſi ventus adhibeatur, non tantopere eſt attendenda, cum vis a vento excipienda ſine ingentibus ſumtibus multiplicari queat, remigum numerus autem non item.

§. 91. Cum ergo in nauibus, quae remis ſunt inſtruendae, potiſſimum requiratur, vt eiusdem vis ope maximus effectus obtineatur, ſtructura nauium in hunc finem aptiſſima definiri debet. Reſiſtentia igitur, quam naues in aqua progredientia patiuntur, quantum fieri poteſt, diminui debebit, cum reſiſtentia aquae ſolum ſit obſtaculum, quod viribus promouentibus eſt ſuperandum. Quo circa pro huius generis nauibus diligentiſſime in eam nauium figuram erit inquirendum, quae in aqua promota minimam perpetiatur reſiſtentiam. Atque in hoc negotio ad ſolum curſum directum reſpici oportet, cum nulla ſit ratio, ob quam nauis vnquam ad curſum obliquum dirigatur: remorum enim ratio ad omnes plagas aequaliter eſt comparata.

§. 92.

§. 92. Longe aliter res ſe habet in nauibus, quae a vi venti ad motum cientur, quoniam enim mali et vela citra notabiles ſumtus pro lubitu augeri poſſunt, non tantam curam ad vim diminuendam adhiberi conuenit. Quin potius in hoc eſt incumbendum, vt naues maximam vim ſuſtinere queant: hunc enim naues plerumque habere ſolent defectum, vt vi, quae a vento excipitur, nimium acuta, ſitum erectum retinere nequeant, ſed ſubuerſioni ſint obnoxiae. Quocirca non ſolum idonea velorum applicatio, ſed etiam aptiſſima nauium forma erit inveſtiganda, quae a venti vi quantumuis magna minimam inclinationem producat; hocque pacto plures nauium defectus maximi momenti tollentur.

§. 93. Priusquam autem hoc examen ſuſcipiatur, vis venti generatim atque effectus quem in vela expanſa vtcunque impingens exerit, conſiderari debent; quo loco ſi vela non ſint maxime extenſa, curuatura, quam ventus velis inducit, erit determinanda, quoniam ſine ea media directio vis venti in vela exerta cognoſci nequit. Definita autem cum quantitate tum directione virium a vento exceptarum, inueſtigari oportebit, non ſolum quantum motus progreſſiuus augeatur, ſed etiam quanta nauis inclinatio inde oriatur. Hoc enim cognito diſpicere licebit, quomodo inclinatio vel omnino impediatur, vel quantum fieri poteſt diminuatur; quo in negotio primo firmitas maxime erit ſpectanda, tum vero etiam reſiſtentia, quippe quae ita poteſt eſſe comparata, vt niſu contrario vim ſubuerſionem adeo minantem penitus deſtruere poſſit.

§. 94. Ex his iam ſatis liquet, in conſtructione nauium velis inſtruendarum non tam ad minimam reſiſten-

tiam esse respiciendum quam ad firmitatem, qua omni inclinationi reluctatur. Parum enim lucri accederet, si quidem nauis minimam pateretur resistentiam, simul vero esset tam debilis, vt vim venti sustinere non posset. Interim tamen dubium non est, quin, si simul et summa resistentiae diminutio, et maxima firmitas obtineri possent, id plurimam sit allaturum vtilitatem, sed plerumque hae conditiones, ita solent esse comparatae, vt si vni satis fiat, alteri detrahatur: accedent autem praeter resistentiam et firmitatem plures aliae circumstantiae, quarum ratio quoque est habenda, vnde adhuc maior collisio regularum nascitur: de quibus suo loco fusius explicabitur.

§. 95. In nauibus autem huius generis motus seu cursus obliquus maxime habet locum, qui instituitur, si directio venti nimis a cursu destinato discrepat, vt cursui directo nullus relinquatur locus. Hanc ob causam operam adhiberi oportet, vt quantum fieri potest, cursus contra directionem venti dirigi queat, quo in negotio praeter dispositionem velorum figura carinae plurimum valet. Atque ideo multo magis est efficiendum, vt naues ope cursus obliqui aduersus ventum moueri possint, quam vt resistentia in cursu directo diminuatur. Ex hisque abunde intelligitur, quantum ratione structurae tantum intersit inter naues, quae remis, easque, quae vento propelluntur, adeo vt haec distinctio maxime sit necessaria, ad hanc tractationem absoluendam.

Cap. II.
DE SITV AEQVILIBRII NAVIVM.

§. 96.

Quemadmodum omne corpus aqua ſpecifice leuius, ſi aquae immittatur, pluribus ſitibus aequilibrium tenere poteſt, vti in praecedenti libro fuſius eſt expoſitum; ita etiam nauis quaecunque, quamcunque habeat formam, dummodo leuior ſit quam aequale volumen aquae, non ſolum vnius aequilibrii ſitus erit capax, ſed etiam plurium. Neque vero ad inſtitutum noſtrum attinet omnes hos aequilibrii ſitus inueſtigare, ſed potius naues ita inſtrui oportet, vt datus et determinatus ſitus aequilibrii proprietatibus gaudeat. Omnis enim nauis, cuiuscunque ſit generis, ita eſſe debet comparata, vt aquae immiſſa praeſcriptum ſitum occupet, ac data eius portio aquae immergatur. Quare cum ſitus aequilibrii non inter res quaerendas, ſed datas reperiatur, naues ad eum induendum ante omnia accomodatas eſſe conuenit.

§. 97. Statim enim ac nauis cuiusque conſtructio ſuſcipitur, non ſolum quantitas voluminis immerſi, ſed etiam ipſa nauis portio aquam ſubeunda determinari ſolet. Hoc vero ipſa nauium ratio et vſus requirunt, quae aquae innatantes ſitum erectum tenere debent; qui ſitus per conſtructionem obtinetur, ſi ea ipſa nauis portio in aqua verſetur, quae ab initio in hunc finem eſt deſtinata. Cum igitur in capite praecedente partem ſubmerſam iam deſcripſcrimus, eamque a reliqua parte diſtinxerimus, conſtructionem atque onerationem nauium ita abſolui oportet, vt ea ipſa

por-

portio determinata aquae immerſa nauem in aequilibrio conſeruet, ideoque aequilibrii proprietatibus in libro ſuperiore deſcriptis ſit praedita.

§. 98. Ponamus igitur nauem aquae ita immitti vt determinata illa pars ſub aqua ſit ſubmerſa, atque inueſtigemus, quomodo nauem comparatam eſſe oporteat, vt in hoc ſitu quieſcere, atque aequilibrium conſeruare queat. Manifeſtum autem eſt ex primis hydroſtaticae legibus, ad hoc duas requiri, quarum altera pondus totius nauis ſpectat, altera locum ipſius centri grauitatis. Primo enim totius nauis pondus tantum eſſe debet, vt aequale ſit ponderi maſſae aquae, cuius volumen aequale eſt volumini partis ſubmerſae. Deinde neceſſe eſt, vt centrum grauitatis totius nauis ac centrum grauitatis ſpatii, quod in aqua occupat, ſeu centrum magnitudinis partis ſubmerſae, in eadem recta verticali ſint ſita.

§. 99. Volumen igitur partis ſubmerſae, ſi in menſura cognita fuerit datum, praebebit leui calculo, grauitati aquae innixo pondus, quod toti naui eſt conferendum, vt neque maior nauis pars neque minor in aquam ingrediatur. Pondus autem cuiusuis nauis tanquam ex duabus partibus conflatum conſiderandum eſt; ex pondere ſcilicet ipſius nauis et rerum ad ipſam pertinentium, cuiusmodi ſunt mali, remi, ancorae, aliaeque machinae; atque inſuper ex pondere onerum impoſitorum. Cum igitur pondus ipſius nauis in ſe ſpectatae fuerit cognitum, ex quantitate partis ſubmergendae colligere licebit, quanta onerum copia addi debeat, vt nauis definitum obtineat pondus. Ex quo perſpicitur, vt nauis maximae onerum copiae capax reddatur, cum ipſum nauis corpus quantum fieri poteſt,

le-

leuiſſimum, tum partis ſubmergendae volumen maximum eſſe oportere.

§. 100. Neque vero onerum quantitatem cuique naui imponendorum tam diligenter definiri opus eſt, quoniam in ipſa oneratione manifeſtum fit, quando debita onerum copia eſt ingeſta. Cum enim a prima conſtructione portio nauis aquae immergenda definiatur tamdiu oneribus imponendis erit continuandum, quoad definita illa pars ſub aquam prematur. Quamobrem in ipſa conſtructione potius ad finem praepoſitum reſpici oportebit, nauemque ita accommodari, vt praeſcriptam onerum copiam capere queat. Ad quoduis enim partis aquae ſubmergendae volumen per vſum practicum determinabitur pondus totius nauis in ſe ſpectatae, quod a pondere aequalis voluminis aquae ablatum praebebit pondus onerum imponendorum, vnde viciſſim ſi praeſcribatur onerum pondus, cum nauis magnitudo tum etiam quantitas carinae cognoſcentur.

§. 101. Quanquam autem omnis nauis ad determinatum pondus portandum deſtinari ſolet, tamen ita naues confectas eſſe oportet, vt etiam, ſi minus habeat pondus, in aqua ſitum teneat erectum, qui pariter requiſitis praerogatiuis gaudeat. Primum enim cum nauis nuper conſtructa atque etiam nunc vacua aquae immittitur, non ſolum eiusmodi ſitum in aqua tenere debet, quo planum diametrale ſit verticale, ſed etiam prora et puppis ad ſenſum aequaliter immergi debebunt: quod idem tenendum eſt, ſi nauis quamcunque onerationem debita minorem acceperit. Pro huiusmodi igitur caſibus regula huc redit, vt pro quaque onerum impoſitorum copia ſectio aquae parallela fiat illi ſectioni aquae, quam nauis, cum com-

pletam onerum copiam est consecuta, tenere debet. Hac enim regula vtrumque obtinetur, cum vt planum diametrale sit verticale, tum vt prora et puppis aequaliter submergantur.

§. 102. Regula haec ad situm nauium vacuarum spectans maximi est momenti, ac si in constructione cuiuspiam nauis contra eam peccatur, id pro ingenti damno haberi solet. Duplici autem modo contra istam regulam impingitur; quorum alter in inaequalitate laterum nauis constat, indeque euenit, vt, cum nauis in aquam demittitur, planum diametrale non teneat situm verticalem, sed versus latus grauius inclinetur. Alterum vitium committitur, si vel prora vel puppis nimis fabricetur ponderosa, tum enim ea pars quae grauior est aquae profundius immergitur, leuior vero extra aquam magis eminebit quam decet. Haecque vitia eo plus incommodi afferunt, quo sunt maiora: atque si ambo coniunctim in eadem naui deprehendantur, id merito maximo vitio verti solet.

§. 103. Quanquam vero his vitiis, si quaedam nauis iis laboret, per onerationem remedium afferri posse videtur, dum parti leuiori maior onerum quantitas imponitur; tamen ista medela cum aliis maioris momenti incommodis est coniuncta. Praeterquam enim quod eiusmodi nauis ante, quam haec vitia tolli queant, in eo maiore periculo versatur, quo ea sint maiora, atque adeo statim subversione perire possit, ipsa quoque oneratio, per quam alias plura atque insignia emolumenta nauibus afferri possunt, nimis restringitur, ac si memorati defectus satis sint enormes, nihil omnino commodi ex oneratione consequi licet. Quin etiam scopus, cui nauis est destinata saepe numero



ro obtineri non poteſt, eo quod in eam nauis partem, quae per ſe iam eſt nimis ponderoſa, onera omnino imponere non licet, quo fit vt non ſolum ſpatium ab oneribus vacuum ſit relinquendum, quod alias maxime idoneum foret ad onera capienda, ſed etiam eo ipſo ſtatus aequilibrii infirmitati fiat obnoxius.

§. 104. Quando autem nauis ab his vitiis fuerit immunis, atque aquae commiſſa etiam nunc vacua ſitum accipiat erectum, quo ſectio aquae, illi quam habere debet, cum fuerit onerata, ſit parallela, tum non ſolum nauis ab incommodis memoratis erit libera, ſed etiam ad onerationem debito modo perficiendam maxime erit accommodata. Hoc enim ſolo caſu licebit onera imponenda aequaliter per totam nauis cavitatem diſtribuere, ac regulas, quae infra circa onerationem praeſcribentur obſeruare. Si enim hoc modo onera tam verſus latera, quam verſus proram et puppim aequaliter diſtribuantur, tum nauis motu ſibi parallelo continuo magis immergetur, donec debita pars ſub aqua verſetur. Omnes autem rationes quae infra circa onerationem afferentur, aequabilem diſtributionem requirunt.

§. 105. Quo magis igitur perfecta nauium conſtructio requirit, vt nauis adhuc vacua in aqua ſitum erectum obtineat, eo magis eſt cauendum, ne in conſtructione vitia committantur. Quod quidem ad ſitum verticalem plani diametralis attinet, is niſi ingens incuria adſit, facile obtinetur ambobus lateribus non ſolum ratione figurae ſed etiam ratione ponderis partium, quibus latera conſtant, aequalibus conſtruendis. Ratione prorae autem et puppis ſitus erectus difficilius producitur, niſi volumine fere ſint inter ſe ſimiles hae duae nauium partes. At ſi altera pars

alteram mole multum excedat; tum difficulter, euitatur quia pars maior magis immergatur quam minor. Quare, quo altera pars alteram mole magis ſuperat, eo magis erit augendum minoris pondus, maioris autem partis pondus diminuendum: ad quod recte obſeruandum, ad centrum grauitatis voluminis aquam ſubeundi maxime eſt reſpiciendum; qua de re mox neceſſaria praecepta proferentur.

§. 106. Quantumuis autem magna cura ad incommoda haec effugienda adhibeatur, tamen ſaepenumero memorati defectus euitari non poſſunt. Neque vero ideo iſtiusmodi naues, niſi multum a ſcopo aberrent, tanquam ineptae ſunt cenſendae et regiciendae, ſed opera potius ſumma eſt adhibenda, vt talis defectus quam commodiſſime tollatur. Fiet hoc, dum illi nauis parti, quae extra aquam nimium eminet, ſeu quae illi quae nimium immergitur, eſt opoſita, tanta onerum copia imponatur, donec obliquitas ſitus omnino ſit ſublata. Atque in hac correctione praeſtabit ponderibus maxime grauibus vti, quo iis ſpatium quam minimum occupetur, ſatisque ſpatii ſuperſit, ad reliqua onera ſecundum praecepta imponenda. Interim tamen id eſt tenendum, quo longius haec pondera a communi centro grauitatis remoueantur, eo paucioribus ponderibus intentum aequilibrii ſitum obtineri.

§ 107. Expoſitis his, quae tum ad ipſius nauis pondus tum onerum imponendorum quantitatem ſpectant; quibusque quantitas voluminis aquae immergendi determinatur, inquiramus in alteram huius capitis partem, qua effici debet, vt data portio aquam ſubeat, dataque ſupra aquam emineat, ſeu vt data nauis ſectio fiat horizontalis, atque in aquae ſuperficiem incidat. Quoniam autem haec

pro-

proprietas nauibus tam vacuis quam onuſtis communis eſſe debet, primo nauem vacuam ita eſſe oportet, comparatam, vt aquae immiſſa ſeſe in ſitum erectum recipiat, deinde inueſtigandum eſt, quomodo onera ſint diſponenda, vt iis impoſitis nauis denuo ſitum erectum accipiat. Cum igitur ſitus erectus ſit is, quo ſectiones, quae ſupra vocatae ſunt horizontales actu ſecundum horizontem collocantur, vtroque caſu id tantum eſt praeſtandum, vt ſectiones horizontales dictae ſitum horizonti parallelum conſequantur.

§. 108. Cum autem tanta nauis portio infra aquae ſuperficiem eſt depreſſa, vt aqua de loco ſuo depulſa pondere adaequet ipſam nauem, id ad aequilibrium nondum ſufficit, ſed inſuper requiritur vt centrum grauitatis totius nauis in eandem rectam verticalem incidat, in qua centrum grauitatis ſpatii, quod nauis in aqua occupat, verſatur; quod centrum in ſuperiori libro breuitatis et diſtinctionis gratia centrum magnitudinis partis ſubmerſae appellare conſueuimus. Hoc enim centrum minus congrue vocaretur ſimpliciter centrum grauitatis carinae, etſi carina nobis eam nauis partem denotat, quae aquae eſt immerſa; ſed addenda eſſet conditio, qua tota carina ex homogenea materia conſtare ponatur. Qua propter altera conditio ad aequilibrium producendum neceſſaria huc redit, vt centrum grauitatis totius nauis et centrum magnitudinis carinae in eandem rectam verticalem incidant.

§. 109. Contemplemur nunc nauem ſiue vacuam ſiue onuſtam, ac ponamus huic alteri conditioni iam eſſe ſatisfactum, ita vt aquae immerſa ſitum teneat erectum. Quoniam igitur in hoc ſitu planum diametrale eſt verti-

 cale,

cale, carina ſeu pars aquae immiſſa conſtabit ex duabus partibus ratione figurae externae inter ſe aequalibus et ſimilibus: atque hanc ob rem eius centrum magnitudinis in ipſo plano diametrali erit ſitum. Quia autem poſitio verticalis plani diametralis ſola ad ſitum erectum non ſufficit, ſed praeterea requiritur, vt eae ſectiones ad planum diametrale normaliter factae, quas ante vocauimus horizontales, actu ſecundum horizontem ſint diſpoſitae; ex figura carinae externa ipſe centri magnitudinis locus in plano diametrali per calculum definiri debebit, quo cognito rectae verticalis, in qua hoc centrum exiſtit, poſitio innoteſcet.

§. 110. Cum igitur ſine calculo iam conſtet centrum magnitudinis partis ſubmerſae ſeu carinae in plano diametrali eſſe ſitum, ſi quidem nauis ſitum teneat erectum, duabus inſuper determinationibus ad ipſum huius puncti ſitum definiendum erit opus. Primum enim eius diſtantia a prora vel a puppi determinari debet, ſeu quod eodem redit a ſectione transuerſali ampliſſima: niſi enim in ipſam hanc ſectionem ampliſſimam cadat, vel in proram vel in puppim incidet, atque vtroque caſu eius diſtantia a ſectione ampliſſima ope calculi eſt inueſtiganda. Deinde ſingulari calculo profunditatem iſtius centri magnitudinis inveniri oportet, ſiue diſtantiam a ſectione aquae. Si enim hae duae res fuerint exploratae, ipſum punctum in plano diametrali aſſignari poterit, in quod centrum magnitudinis carinae cadit.

§. 111. Quoniam autem ad inſtitutum noſtrum ſufficit rectam verticalem, in qua centrum hoc magnitudinis eſt ſitum determinaſſe; poſteriore determinatione in

hoc

hoc capite superſedere poterimus. Cum enim per priorem determinationem cognita fuerit diſtantia centri iſtius a ſectione ampliſſima vel verſus proram vel verſum puppim; ſimul poſitio rectae verticalis, in qua hoc centrum eſt ſitum, innoteſcet. Namque ſi in plano diametrali ad tantam diſtantiam a ſectione ampliſſima vel verſus proram vel puppim, quantum centrum magnitudinis ab eadem ſectione diſtare inuentum eſt, ducatur recta verticalis, erit haec ipſa recta verticalis illa linea nobis cognitu neceſſaria, in qua ſimul centrum grauitatis totius nauis debet eſſe ſitum. Neque igitur in praeſenti negotio opus eſt, vt ipſum huius rectae punctum, in quod centrum magnitudinis incidit, definiatur; cum ſola rectae verticalis per id tranſeuntis poſitio ad ſitum aequilibrii ſufficiat. At in ſequentibus, cum de firmitate ſitus aequilibrii agetur, iſta determinatio, quam hic tuto negligere poſſumus, maxime erit neceſſaria: contra vero altera negligetur.

§. 112. Conſideremus primum eam tantum lineae verticalis per centrum magnitudinis partis ſubmerſae tranſeuntis affectionem, qua inuenimus eam in ipſo plano diametrali eſſe ſitum. Cum igitur centrum grauitatis totius nauis in eandem rectam verticalem cadere debeat, id ante omnia in plano diametrali poſitum ſit neceſſe eſt. Quoniam vero nauis adhuc vacua, ſi in aquam demittatur ſitum erectum tenere debet, etiam nauis vacuae centrum grauitatis in plano diametrali ſitum eſſe oportet. Huic vero conditioni facillime ſatis fit; cum enim nauis ex duabus portionibus ad vtramque plani diametralis partem ſitis conſtet ſimilibus et aequalibus, ſi conſtructio vtrinque

ſimilis

ſimilis adhibeatur, eo ipſo centrum grauitatis in planum diametrale incidet.

§. 113. Quando nauis vacua iſta proprietate iam gaudet, eiusque centrum grauitatis in planum diametrale incidit, tum oneratione eadem conditio non difficulter ad implebitur. Quantum enim onerum pondus in vnum nauis latus imponitur, tantumdem in alterum latus erit collocandum; vtrinque in eadem a plano diametrali diſtantia. Hac namque regula obſeruata onerum impoſitorum commune centrum grauitatis in planum diametrale cadet et proinde etiam centrum grauitatis nauis et onerum coniunctim. Hanc ob rem onera vehenda in duas partes aequales diſtribui conuenit, atque ambas ſemiſſes per ambo nauis latera aequaliter diſponi. Neque vero aliae rationes huic onerandi modo aduerſantur, quin potius omnes eundem requirunt. Atque hinc vitium merito cenſetur, ſi ob inaequalitatem ponderis laterum nauis amborum haec lex in oneratione obſeruari non poteſt.

§. 114. Contemplemur nunc ipſam iſtius rectae verticalis, quae per centrum magnitudinis partis ſubmerſae eſt ducta, poſitionem; ac primo quidem ponamus proram puppi omnino ſimilem eſſe et aequalem, ita vt etiam ſectio ampliſſima nauem in duas partes ſimiles et aequales diuidat. Manifeſtum igitur eſt rectam illam verticalem hoc caſu per medium plani diametralis eſſe tranſituram, atque in interſectione huius plani cum ſectione ampliſſima fore ſitam. Hanc ob rem tam ipſius nauis vacuae quam onuſtae centrum grauitatis in eadem recta debebit eſſe poſitum. Qnod quidem ad centrum grauitatis ipſius nauis attinet, id ſponte in hanc rectam cadet, ſi quidem porra

et

et puppis ſimili modo ſuerint conſtructae, quae conditio ob harum partium ſimilitudinem externam facile obtinetur.

§. 115. Cum igitur hoc caſu nauis ex quatuor partibus aequalibus et ſimilibus conſtet, in quas cum a plano verticali diametrali tum a ſectione ampliſſima diſpeſcitur, onera quoque per has quatuor partes aequabiliter diſtribui oportebit. Interim tamen, ſi quae rationes poſtulent, vt in puppim maior minorue onerum copia collocetur, quam in proram; etiam huic conditioni facillime ſatis fieri poteſt. Quo enim plura paucioraue onera puppi debent imponi quam prorae, eo vel propius vel longius a ſectione ampliſſima debent collocari; vt, etiamſi onerum copia proram et puppim occupantium ſit inaequalis, tamen eorum centrum grauitatis in rectam verticalem per medium nauis tranſeuntem cadat. Huicque conditioni, innumerabilibus modis ſatis fieri poteſt, ita vt inſuper plures aliae conditiones, quas firmitas aliaeque circumſtantiae requirent, per onerationem, hac conditione non laeſa ſeruari queant.

§. 116. Hypotheſis haec, qua proram et puppim inter ſe aequales et ſimiles poſuimus, latiſſime patet, ac non ſolum ad omnes decem nauium ſpecies in ſuperiore capite recenſitas extenditur, ſed etiam eiusmodi figuras, quae ad illas ſpecies reuocari nequeunt, ſub ſe complectitur. Quaecunque enim figura prorae detur, ſi eadem ipſa figura etiam puppi tribuatur, orietur figura nauis ſub iſta hypotheſi comprehenſa; in qua centrum magnitudinis partis ſubmerſae in recta verticali per medium nauis ducta ſitum erit. Quamobrem modus, quem tum in conſtru-

ctione tum in oneratione istiusmodi nauium tenere oportet, diligenter est notandus, quo, quantum ab eo recedi debeat, si nauis figura fuerit diuersa, facilius intelligi queat. Manifestum enim est, quo magis figura nauis ab ista hypothesi discrepet, eo magis ab exposita cum constructionis tum onerationis ratione esse discedendum.

§. 117. In quacunque autem recta verticali centrum magnitudinis partis submersae situm esse reperiatur non solum oneratio sed etiam constructio nauium maxime manet indeterminata. Cum enim, quantum quidem ad praesens institutum attinet, id tantum efficiendum sit, vt centrum grauitatis totius nauis et onerum in eandem rectam verticalem cadat; momenta ponderum omnium respectu huius rectae quaquauersus aequalia esse debent. Neque vero hac aequalitate quicquam aliud determinatur, praeter aequalitatem productorum ex singulis ponderibus in distantias a duabus rectis horizontalibus per rectam illam verticalem ductis; prouti ex statica satis constat: cui quidem requisito innumerabilibus modis satisfieri potest. Haec vero ideo monenda sunt, ne regulae, quae infra circa onerationem occurrent, superfluae videantur, sed iam ante intelligatur per onerationem pluribus conditionibus satisfieri posse.

§. 118. Infinita multiplicitas onerandi modorum, quibus idem scopus, incidentia scilicet centri grauitatis in datam lineam verticalem, obtinetur, adhuc clarius percipietur, si consideremus duo tantum pondera infinitis modis ita disponi posse, vt eorum centrum grauitatis locum non mutet: ac si tria fuerint pondera, numerus modorum ea collocandi fit denuo infinities maior, hocque pacto multipli-

plicitas crefcit, quo numerus ponderum fit maior. Cum igitur haec ftupenda varietas ex dato centro grauitatis fit orta, perfpicuum eft eam denuo in infinitum augeri fi ponderum imponendorum non ipfum centrum grauitatis, fed tantum linea recta, in quam id cadere debet, praefcribatur. Hicque cafus ad noftrum praefens inftitutum eft accommodatus, quo ad fitum aequilibrii producendum fufficit, fi centrum grauitatis totius nauis onuftae in datam rectam verticalem incidat.

§. 119. Ob hanc incomprehenfibilem multiplicitatem onerationis facillime fitus aequilibrii erectus obtineri poterit. Non enim ad onerationem perficiendam tam ad pofitionem rectae illius verticalis quam ad ipfum fitum erectum erit refpiciendum. Quamuis enim incognita fit rectae illius pofitio, tamen onera ita poterunt difponi, vt nauis fitum erectum accipiat. Ac fi eueniat, vt poft onerationem quaepiam nauis pars nimis immergatur, medela in promtu erit, vel oneribus illi parti impofitis diminuendis, vel propius verfus medium nauis admouendis, quorum vtroque modo eorum momentum diminuitur. Neque vero in hoc negotio ad minutias erit refpiciendum, cum nauis in fitu aequilibrii firmitatem habere debeat, qua fit, vt, etiam fi centrum grauitatis omnium onerum parumper immutetur, tamen inde minima inclinatio a fitu erecto oriri debeat.

§. 120. Quoniam autem hoc non obftante accuratam cognitionem pofitionis rectae illius verticalis, in qua centrum magnitudinis partis fubmerfae eft fitum, habere conuenit, cum ea non folum ad conftructionem nauium fed etiam ad diiudicationem fit neceffaria, confideremus

H 2 nauem,

nauem, in qua prora quantumuis diſſimilis ſit puppi: caſus enim, quo hae ambae partes inter ſe ſunt ſimiles et aequales, nihil habet difficultatis, et iam eſt ſatis euolutus.
Tab. V. fig. 1. Repraeſentet igitur figura α AHEβ planum diametrale eiusmodi nauis, quod cum ſitus adeſt erectus, non ſolum verticale eſſe debet, ſed etiam neceſſe eſt, vt lineae AB, $a\,b$ quae ſectiones horizontales dictas repraeſentant, ſecundum horizontem ſint diſpoſitae. Sitque $a\,b$ ſectio aquae, ad quam recipiendam nauis etiam nunc vacua debet eſſe accommodata; atque AB ſectio aquae naui onuſtae reſpondens.

§. 121. Conſideremus primo nauem vacuam, ac cum ea aquae immiſſa ſectio aquae debeat eſſe ab, erit aHEb pars aquae immerſa cuius volumen proportionale erit ponderi nauis: ſeu poſito hoc volumine $=$ V, pondus navis aequale erit ponderi molis aquae volumen V habentis. Sit porro $f\,h$ recta verticalis, in qua centrum grauitatis iſtius voluminis V eſt ſitum; in eandem ergo rectam verticalem centrum grauitatis nauis vacuae incidere debebit. Ponamus autem nauem iam vtrinque aequaliter eſſe fabricatam, ita vt eius centrum grauitatis in ipſa plano diametrali ſit poſitum, atque in id tantum inquiramus, per quod centrum grauitatis in ipſam erectam $f\,h$ conſtituatur. Ponamus igitur pondus partis nauis, quae ante rectam $f\,h$ ad proram vsque extenditur, eſſe $=$ M, reliquae vere portionis poſt rectam $f\,h$ ad puppim vsque extantis pondus eſſe $=$ N; ita vt M$+$N praebeat pondus totius nauis volumini partis ſubmerſae V proportionale.

§. 122. Diuiſio nauis in duas has partes aptiſſime fieri concipitur per ſectionem transuerſalem ad rectam $a\,b$

in

in puncto γ normalem, quae partem anteriorem a posteriore discernet. Sit nunc partis anterioris $\alpha\,A\,b\,f$ centrum grauitatis in recta verticali R M r; partis autem posterioris $\beta\,E\,b\,f$ centrum grauitatis in recta verticali S N s positum. Cum igitur commune centrum grauitatis ambarum partium in rectam $f\,b$ cadere debeat, oportebit esse $M.Mg = N.Ng$. Si ergo hae duae partes pondere fuerint aequales, necesse est vt etiam interualla Mg et Ng sint aequalia. At si pondera M et N fuerint inaequalia, tum interualla Mg et Ng eorum rationem inuersam tenere debebunt. Ex quibus perspicitur ad constructionem nauium positionem rectae $f\,b$ omnino debere esse cognitam, ad eamque constructionem dirigi oportere.

§. 123. Non exiguum ad hoc negotium afferetur adiumentum, si nauis per sectionem aquae ab situi erecto nauis vacuae competentem in partem superiorem extra aquam eminentem, et partem inferiorem sub aqua versantem diuisa concipiatur: si enim pars inferior ex vniformi materia constaret, tum eius centrum grauitatis sponte in rectam $f\,b$ caderet. Tametsi autem ista pars caua esse soleat, tamen non difficulter aberratio eius centri grauitatis ab hac recta $f\,b$ aestimabitur: sufficit enim in hoc negotio ad veritatem proxime aestimando accedere, neque opus est geometrico rigore; cum per firmitatem naui inducendam omnibus huiusmodi erroribus occurri debeat. Cum autem partis inferioris centrum grauitatis fuerit definitum, facile regulae pro construenda superiori parte formabuntur, vt commune grauitatis centrum in praescriptam rectam $f\,b$ incidat.

§. 124. Cum igitur nauis vel iam ita erit constructa, vt vacua situm erectum in aqua obtineat, vel error non nimis magnus, qui forte sit commissus, oneribus quibusdam rite collocatis, erit sublatus, efficiendum insuper erit, vt nauis onusta situm teneat erectum: ad quod obtinendum cum formae nauis tum etiam onerationis rationem haberi oportet. Practice quidem nauis ad istum situm erectum non difficulter instruetur: si enim recta AB repraesentet sectionem aquae situi erecto nauis onustae convenientem; primo tanta onerum copia imponenda erit, vt volumen AHEB in aquam imprimatur; deinde onera ita disponi oportet, vt haec ipsa assignata pars in aquam ingrediatur. Hocque negotium eo promtius perficietur si impositio onerum ita dirigatur, vt perpetuo sectio aquae parallela maneat sectioni ab, hocque modo pergatur donec AB superficiem aquae contingat.

§. 125. Vt autem inuestigemus, quo pacto tum constructio tum oneratio comparata esse debeat, ad istum scopum attingendum; ponamus superficiem sectionis aquae ab esse $= E$; ac cum sectio aquae AB pro naue onusta illi debeat esse parallela, sit distantia harum sectionum $Cc = b$. erit volumen denouo per onera submergendum proxime $= Eb$; si quidem amplitudo nauis per spatium Cc fuerit fere eadem. At si superficies sectionis AB multum differat a sectione $ab = E$, ponatur sectio AB $= F$; ac volumen inter has sectiones contentum propius erit $= \frac{Cc(E + \sqrt{EF} + F)}{3}$: considerata hac portione, vti sine notabili errore fieri potest, instar coni truncati. Ex hoc itaque volumine cognoscetur quantitas onerum imponendorum;

dorum; ex qua iusta nauis oneratio oritur, simulque pondus nauis onustae innotescit.

§. 126. Ponatur volumen huius portionis nauis inter sectiones horizontales AB et ab contentae $= U$; atque cum pondus nauis nondum onustae esset $= M + N$, volumenque partis submersae naui vacuae respondentis $= V$; prodibit quantitas iustae onerum imponendorum copiae $=$ ponderi $\frac{U(M+N)}{V}$. Quoniam autem ante omnia requiritur, vt nauis onustae centrum grauitatis in ipsum planum diametrale incidat, ista onerum copia per cauitatem nauis ita disponi debet, vt eorum commune grauitatis centrum in hoc planum cadat. Huic quidem requisito facile satisfit, disponenda vtraque onerum medietate per ambo latera nauis aequaliter. Quo facto simul vtriusque onerum portionis cum parti anteriori $\alpha A h f$ tum posteriori $\beta E h f$ impositae centrum grauitatis in planum diametrale collocabitur.

§. 127. Quia vero in oneratione ad centrum magnitudinis totius partis submersae AHEB est respiciendum, portionis autem $aHEb$ centrum magnitudinis in rectam verticalem hf cadit, verticalem illam definiri oportet, in qua centrum magnitudinis partis submersae AHEB erit positum. Hanc in finem ponamus portionis $AabB$ centrum magnitudinis versari in recta verticali Cc, quae versus proram dissita sit a recta fh interuallo $Cg = c\gamma$. Hoc posito centrum magnitudinis partis submersae AHB, quae naui onustae competit, in rectam quandam FH mediam inter Cc et fh cadet. Atque ex natura centri grauitatis erit $V. Gg = U. GC.$ seu $V. Cg - V. CG = U. GC$, ex quo fit $CG = \frac{V.Cg}{V+U}$ atque $Gg = \frac{U.Cg}{V+U}$. Hinc itaque practi-

practice ſatis commode poſitio rectae FH determinabitur, cuius cognitio ad vniuerſam nauium doctrinam ſumme eſt neceſſaria.

§. 128. Retineamus nauis diuiſionem ante factam in partem anteriorem $\alpha A b f$ et poſteriorem $\beta E b f$, diſcrimine poſito in ſectione transuerſali per verticalem $f b$ facta: ſitque onerum parti anteriori impoſitorum pondus $=$ P, eorumque centrum grauitatis commune in recta verticali IPt. Simili modo ſit pondus onerum parti poſteriori imponendorum $= Q$, quorum commune centrum grauitatis exiſtat in recta verticali VQv. Cum autem omnium onerum pondus aequale eſſe debeat ponderi $\frac{U(M+N)}{V}$, habebitur haec aequatio $P+Q=\frac{U(M+N)}{V}$: ex qua ſumma onerum $P+Q$ determinatur, diſtributio autem in partes P et Q etiamnum arbitrio relinquitur. Quia ergo totius nauis pondus erit $= M+N+P+Q$, fiet id $= \frac{(V+U)(M+N)}{V}$.

§. 129. Cum igitur ad aequilibrium huius ſitus erecti requiratur, vt totius nauis centrum grauitatis in rectam FH incidat, momenta reſpectu huius rectae cum ipſius nauis tum onerum ſequentem ſuppeditant aequationem $M.MG+P.PG=N.NG+Q.QG$. At ſupra ob ſitum erectum nauis vacuae eſſe debebat $M.Mg=N.Ng$. ſeu $M.MG+M.Gg=N.NG-N.Gg$. Cum igitur ſit $Gg=\frac{U.Cg}{V+U}$ erit $N.NG=M.MG+\frac{U(M+N)Cg}{V+U}$: quae aequatio in ſuperiorem introducta dabit $P.PG=Q.QG+\frac{U(M+N)Cg}{V+U}$ ſiue $P.PG-Q.QG=\frac{V(P+Q)Cg}{V+U}$. vnde oritur $P=\frac{U(M+N)QG}{V.PQ}+\frac{U(M+N)Cg}{(V+U)PQ}$ atque $Q=\frac{U(M+N)PG}{V.PQ}-\frac{U(M+N)Cg}{(V+U)PQ}$.

§. 130.

§. 130. Formulae istae atque hinc totius onerationis idea multo fiunt simpliciores, si recta verticalis C c in ipsam $f h$ incidat. Tum enim ob C $g = o$, tota onerationis ratio reducetur ad has duas aequationes $P = \frac{U(M+N)QG}{V.PQ}$ et $Q = \frac{U(M+N)PG}{V.PQ}$. Casus hic quidem in infinitis nauium figuris locum inuenit; at si idem in omnes sectiones aquae medias inter A B et $a b$ aeque competat, tum id aliter euenire nequit, nisi vnius cuiusque sectionis horizontalis intra sectiones A B et $a b$ contentae centrum grauitatis in rectam verticalem $f h$ incidat. Quodsi autem omnes omnino sectiones horizontales ita formentur, vt singulae habeant suum centrum grauitatis in eadem recta verticali situm, tum simul in quocunque situ erecto centrum magnitudinis partis submersae in eandem rectam cadet.

§. 131. Praeterquam autem quod eiusmodi nauis figura iudicium facilius reddat; aliae proprietates, quibus quamque nauem praeditam esse opertet, eandem conditionem requirunt. Ex superiori enim libro intelligitur, atque in sequentibus fusius exponetur, motum reciprocum nauium esse maxime tranquillum, ac succussionibus minime obnoxivm, si centrum grauitatis sectionis aquae in eandem rectam verticalem cadat, in qua cum centrum grauitatis totius nauis tum centrum magnitudinis partis submersae sunt sita. Quare cum quaelibet sectio horizontalis diuersis onerationibus vicem sectionis aquae sustinere queat, necesse est vt omnes sectiones horizontales sua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant disposita.

§. 132. Quanquam autem ista ratio ad eas tantum sectiones horizontales, quae intra sectiones A B et $a b$ continentur, proprie pertinet, quippe quae solae vicem sectio-

nis aquae ſuſtinere ſolent, tamen commode eadem proprietas omnibus prorſus ſectionibus horizontalibus tribuitur. Si enim diuerſae ſectiones horizontales ſua centra grauitatis in diuerſis rectis verticalibus haberent diſpoſita, ita vt modo propius ad proram modo propius ad puppim caderent, figura nauis prodiret perquam irregularis; eo quod aliae ſectiones horizontales ampliores forent in parte anteriore aliae in poſteriore, id quod naues vehementer deformaret. Ad hoc accedit, quod, cum haec proprietas per ſpatium C *c* adeſſe debent, eadem ſine laeſione continuitatis reliquis ſectionibus horizontalibus denegari nequeat.

§. 133. Has igitur ob cauſas tanquam vnam ex principalibus regulis figuram nauium ſpectantibus ſtabilimus, per quam omnes naues ita conformatas eſſe oportet; vt ſingulae ſectiones horizontales ſuum grauitatis centrum in eadem recta verticali habeant poſitum. Quae conditio tametſi figuram nauium non determinat, tamen iam innumerabiles figuras excludit et tanquam ineptas reiicit, ex quo determinatio figurae perfectiſſimae eo facilior redditur, quo magis numerus figurarum, ex quibus electio eſt facienda, reſtringitur. Ad hanc itaque normam conueniet decem ſupra conſtitutas nauium ſpecies examinari, ac ſingulas ſpecies ita inſtrui, vt iſta proprietas in eas cadat. Qnod cum euoluemus, commode euenire deprehendemus, iſtam proprietatem aliquibus ſpeciebus iam eſſe propriam, reliquas autem noua determinatione indigere. Quamobrem inſtitutum hoc ſequentes ſingulas memoratas decem ſpecies percurremus, iisque inſignem hanc proprietatem inducemus.

§. 134. Quoniam prima nauium ſpecies alias figuras ſub ſe non complectitur, niſi quarum carinae ſunt parallelepipeda

pipeda rectangula, omnes ſectiones horizontales erunt parallelogramma rectangula inter ſe aequalia; earumque adeo centra grauitatis in eandem rectam verticalem incident. Quare ſi per centrum grauitatis ſectionis aquae ducta concipiatur recta verticalis, ea ſimul per vnius cuiusque ſectionis parallelae centrum grauitatis tranſibit. Omnes igitur nauium figurae ad primam iſtam ſpeciem pertinentes iſta proprietate, qua ſingulae ſectiones horizontales ſua grauitatis centra in eadem recta verticali poſita habere debent, iam ſponte ſunt praeditae, neque ad hunc finem vlla noua determinatione aut reſtrictione habent opus: vnde perſpicuum eſt Arcam Noae ad tranquillam innatationem apprime fuiſſe accommodatam.

§. 135. Simili praerogatiua gaudent omnes figurae ad ſpeciem ſecundam relatae, in quibus pariter omnes ſectiones horizontales non ſolum ſimiles ſed etiam aequales conſtituuntur. Sit enim huismodi figurae ſectio aquae AEBF, diametro ACB praedita; atque ipſa carina formabitur, dum iſta ſectio aquae motu ſibi parallelo ſecundum directionem verticalium $A\alpha$ Bb promoueri concipitur. Ex qua formatione manifeſtum eſt, ſi ſectionis aquae centrum grauitatis ſit in G, vniuscuiusque ſectionis ipſi parallelae centrum grauitatis verticaliter ſub puncto G fore poſitum; ideoque omnium ſectionum horizontalium centra grauitatis in recta verticali Gg fore poſita. In eadem ergo recta Gg ſitum erit centrum magnitudinis carinae totius, idque in eius puncto medio O, atque in eandem incidere oportet centrum grauitatis totius nauis. Nullam igitur nouam reſtrictionem hoc requiſitum figuris Tab. V. fig. 2.

 ſecun-

ſecundae ſpeciei inſert, ſed omnes eadem proprietate iam ſponte ſunt praeditae.

§. 136. Quia in praecedente capite hanc ſpeciem leviter tantum attigimus, eo quod eius proprietates facillime percipiuntur, hic in tranſitu eius praecipuas proprietates notaſſe conueniet. Ac primo quidem manifeſtum eſt ſectionem ampliſſimam E F fe eſſe parallelogrammum rectangulum altitudinem habens C D altitudini carinae aequalem, latitudinam vero E F aequari maximae latitudini ſectionis aquae. Porro omnes ſectiones verticales huic ſectioni ampliſſimae erunt pariter parallelogramma eiusdem altitudinis $\mathrm{P}p = \mathrm{CD}$; ſed earum latitudines Q Q reſpondent latitudinibus ſectionis aquae. Deinde tam planum diametrale A B ba quam ſectiones ipſi parallelae omnes erunt pariter parallelogramma, quorum omnium eadem communis eſt altitudo C D: latitudines vero ex data ſectionis aquae figura determinantur.

§. 137. Inquiramus nunc in locum centri grauitatis G ſectionis aquae AEBF, vt poſitio rectae verticalis Gg innoteſcat. Sumta itaque in axe C A abſciſſa $\mathrm{CP} = p$, ſit applicata $\mathrm{PQ} = q$. Capiatur verſus puppim aequalis applicata $\mathrm{RS} = q$; ſitque $\mathrm{CP} = p = \mathrm{P} + \sqrt{\mathrm{Q}}$, exiſtentibus P et Q functionibus quibuscunque ipſius q, quarum altera Q non ſit quadratum; erit $\mathrm{CR} = \sqrt{\mathrm{Q}} - \mathrm{P}$, atque $\mathrm{PR} = \mathrm{QS} = 2\sqrt{\mathrm{Q}}$; rectae igitur QS centrum grauitatis cadet in V exiſtente $\mathrm{QV} = \mathrm{SV} = \sqrt{\mathrm{Q}}$, vnde erit $\mathrm{TV} = \mathrm{P}$. Multiplicetur per dq, atque inuenietur $\mathrm{CG} = \frac{\int p\,dq\sqrt{\mathrm{Q}}}{\int dq\sqrt{\mathrm{Q}}}$: ſumtis integralibus vt a valore $q = o$ vsque ad valorem $q = \mathrm{CE} = b$ pateant. Ex quo manifeſtum eſt, ſi ſit $\mathrm{R} = o$ ſeu $\mathrm{TQ} = \mathrm{TS}$ tum centrum grauitatis G in ipſum punctum

punctum C incidere, ac tum rectam verticalem Gg in ipsa sectione amplissima fore positam. Contingit ergo hoc quando prora et puppis eandem habent figuram.

§. 138. Pergamus ad figuras tertiae speciei, cuiusmodi Tab. VI. fig. 1. figura citata repraesentat, in qua omnes sectiones transversales EDF eique parallelae sunt inter se aequales et similes. In his igitur figuris non datur sectio amplissima transuersalis, quoniam omnes sunt aeque amplae; atque prora ac puppis terminantur figuris planis HaH et IbI sectioni cuique mediae EDF aequalibus. Cum itaque in huius speciei figuris sectio aquae sit parallelogrammum rectangulum HHII, eius centrum grauitatis situm erit in puncto medio C axis AB existente $AC = BC$. Quoniam porro omnes sectiones horizontales reliquae MM NN sunt pariter parallelogramma rectangula longitudinis $mn = AB$, earum omnium centra grauitatis verticaliter sub C erunt sita in punctis G; vnde vniuscuiusque sectionis horizontalis centrum grauitatis in eandem rectam verticalem CD cadet.

§. 139. Quod igitur ad hoc requisitum attinet, vi cuius omnium sectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta verticali posita esse oportet; eo tres species priores hactenus consideratae iam sua sponte sunt praeditae, neque vlla noua determinatione ad huic conditioni satisfaciendum est opus. Singulae ergo hae species sua natura aquae maxime quiete insidebunt, neque succussionibus erunt obnoxiae, sicut eiusmodi naues, in quibus centrum magnitudinis carinae extra rectam verticalem per centrum grauitatis sectionis aquae ductam cadit Maxime autem diuersae indolis deprehendentur istae species, si cum ad fir-

 mita-

mitatem, tum vero potiſſimum ad reſiſtentiam atque ad propulſionem reſpiciemus; vbi tam inſignia incommoda ſe prodent, vt nulla harum ſpecierum apta reperiatur tum ad reſiſtentiam facillime ſuperandam, quam ad potentias ſollicitantes ſuſtinendas.

Tab. VI. fig. 2. §. 140. Species quarta eiusmodi ſub ſe comprehendit figuras, in quibus omnes ſectiones verticales plano diametrali ADB parallelae eidem ſint ſimiles et aequales. Huius igitur carinae latera vtrinque terminabuntur figuris planis H*e*I et H*f*I aequalibus et ſimilibus ſectioni diametrali ADB. In huiusmodi ergo figuris ſectio aquae erit parallelogrammum rectangulum HHII, cuius adeo centrum grauitatis cadet in rectae AB punctum medium C. Concipiatur nunc ſectio quaecunque horizontalis MMNN, quae pariter erit parallelogrammum rectangulum, cuius centrum grauitatis vt cadat in punctum G rectae verticalis CD, neceſſe eſt vt ſit $Gm = Gn$: quod cum vbique eſſe debeat, requiritur vt recta CD ſit diameter plani diagonalis ADB. Ex quo ſequitur figuras quartae ſpeciei ad hunc ſcopum non eſſe accommodatas, niſi puppis et prora figuram habeant ſimilem atque aequalem.

§. 141. Secus itaque res ſe habet in hac ſpecie quarta ac in praecedentibus, cum praecedentes ſua ſponte gaudeant ea proprietate, vt omnium ſectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta verticali ſint poſita; haec vero ſpecies limitatione indigeat. Scilicet vt figurae quartae ſpeciei ad hoc requiſitum accommodentur, oportet ſectionem transuerſalem ampliſſimam E*ef*F ſimul carinam in duas partes ſimiles et aequales diſpeſcere. Ex quarta igitur ſpecie iam omnes excluduntur figurae, in quibus

puppis

puppis et prora inter ſe ſunt diſſimiles, tanquam penitus ineptae ad naues formandas. Quo circa ex hac ſpecie eae ſolae figurae nobis ad vlteriorem inueſtigationem ſupererunt, in quibus planum diametrale diametrum habet verticalem in ſectione ampliſſima ſitam.

§. 142. Ne autem in ſimili examine ſequentium ſpecierum tam a multiplicatione figurarum, quam earundem perplexitate impediamur, viſum eſt relictis figuris ſtereometricis figuras tantum planas, eas carinae ſectiones repraeſentantes, adhibere, quibus ad explicationem opus habebimus. Seorſim itaque conſpectui exponimus cum tres ſectiones principales cuiusque carinae, tum etiam totidem ſectiones illis reſpectiue parallelas; vnde ſex exoriuntur figurae ſimplices, quas ad ſpeciem quamcunque accommodare licebit. Atque hoc pacto non ſolum diſtinctius omnes partes, quas conſiderari oportet, oculis offeruntur ſed etiam linearum ſectionumque perturbatae declineationes euitantur, quibus figurae ſtereometricae ſolent eſſe obnoxiae.

§. 143. Cuiuscunque igitur ſpeciei carina nobis ſit propoſita, figura prima nobis deſignabit ſectionem aquae, cuius diameter A B, maximaque latitudo E F: ac prora verſus A puppis vero ad B ſita ponitur. Figura ſecunda repraeſentat ſectionem ampliſſimam, ortam ſectione verticali per rectam E F in ſectione aquae facta. Tertia autem figura ſignificat planum diametrale, ſeu ſectionem verticalem per diametrum A B ſectionis aquae factam. Tres hae figurae ſectiones principales exhibentes ita ſunt litteris notatae, vt iisdem lineis punctisque eaedem litterae reſpondeant: ita figurae prima et ſecunda communem habent lineam E C F; prima vero et tertia communem habent lineam Tab. VII. fig. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

lineam AB; ac ſecunda et tertia profunditatem CD habent communem.

§. 144. Vt etiam vbique easdem denominationes retineamus, maneant, vt hactenus poſuimus $AC = a$; $BC = \alpha$; $EC = FC = b$, et $CD = c$. Deinde ſectionis aquae natura exprimatur aequatione inter coordinatas CP et PQ, ſitque conſtanter $CP = p$ et $PQ = q$; vnde aequationem inter p et q ita comparatam eſſe oportet, vt poſito $p = o$ fiat $q = b$, poſitoque vel $p = a$ vel $p = -\alpha$ euaneſcat q, ſi quidem ſectio aquae curua continua cingatur. Pro ſectione ampliſſima ſint coordinatae $CR = r$ et $RS = s$, eademque aequatio pro vtraque ſemiſſe CDE, CDF valebit. Naturam denique plani diametralis contineat aequatio inter coordinatas $CT = t$ et $TV = u$: ac vel eadem aequatione comprehendantur ambae partes ACD, BCD vel diuerſis, prouti hae partes vel continuam curuam conſtituant vel ſecus.

§. 145. Tribus hiſce ſectionibus principalibus conſideratis, quae ad omnes ſpecies pertineant, contemplemur totidem ſectiones iſtis parallelas; ac primo quidem figura quarta exhibeat ſectionem horizontalem quamcunque, ſeu ſectioni aquae parallelam; quae ſectio ſecet ſectionem ampliſſimam per rectam MTM, planum diametrale vero per rectam VTU, vti conuenientia litterarum indicat. Simili modo figura quinta repraeſentet ſectionem verticalem ſectioni ampliſſimae parallelam, ſectionem aquae ſecantem in QPQ, planum diametrale vero in PN. Denique ſexta figura offert ſectionem verticalem plano diametrali parallelam, quae facta eſt per rectam IRK in ſectio-

ſectione aquae ſumtam, ac per rectam RS in ſectione ampliſſima conſtitutam.

§. 146. Cum igitur intelligatur, quemadmodum ſingulae iſtae figurae ad quamque carinam oblatam ſint referendae, ex iisque ipſa carinae figura determinetur, ad ſequentes ſpecies examinandas progrediamur Primum autem ſe offert ſpecies quinta, in qua omnes ſectiones horizontales cum inter ſe tum ſectioni aquae ſunt ſimiles. Hanc obrem erit $AC : CE = TV : TM$ atque $BC : CE = UT : TM$: ex quo ſequitur ſectionem ampliſſimam in figura ſecunda expreſſam, ac planum diametrale in fig. 3. ita a ſe inuicem pendere, vt altera figura ex altera determinetur. Sumtis enim in CD aequalibus portionibus CT, erit $TV : AC = TM : CE$ atque etiam ex altera parte $TU : BC = TM : CF$: vnde iſtae figurae inter ſe erunt affines; dataque earum altera vna cum ſectione aquae, totius carinae figura determinatur.

§. 147. Cum autem requiratur, vt omnes ſectiones horizontales habeant ſua grauitatis centra in eadem recta verticali poſita; ſi ſectionis aquae centrum grauitatis ſitum ſit in G, ſectionis vero ei parallalae ſeu figurae 4. in g, oportet vt ſit $CG = Tg$, eo quod punctam C et T in eadem recta verticali ſint poſita. At ob ſimilitudinem figurarum eſt $CG : Tg = CA : TV$: vnde duplici modo requiſita proprietas obtinebitur; primo nempe, ſi $CA = TV$, hocque euenit, ſi omnes ſectiones horizontales non ſolum inter ſe fuerint ſimiles, ſed etiam aequales; qui caſus ad ſpeciem ſecundam recidit. Altero autem modo, qui proprie ad hanc ſpeciem ſpectat requiſita proprietas obtinetur, ſi fuerit $CG = o$. Quocirca figurae huius

quintae ſpeciei ad ſcopum non erunt idoneae, niſi ſectionis aquae centrum grauitatis G in ipſum punctum C, in quo ſectio ampliſſima diametrum ſecat, incidat.

§. 148. Vt igitur carina ad hanc quintam ſpeciem pertinens praedita ſit requiſita proprietate, eius ſectionem aquae ita comparatam eſſe oportet, vt ſit $CG = o$, ſeu vt eius centrum grauitatis G in ipſum punctum C cadat; atque omnes figurae, quae hac proprietate carent, tanquam ineptae ſunt reiiciendae idque eo magis, quo magis centrum grauitatis ſectionis aquae G a puncto C recedit. Sed vt CG euaneſcat, oportet aggregatum omnium RI^2 in porra aequale eſſe aggregato omnium RK^2 in puppi: id quod ob tangentes in E et F ipſi AC parallelas vſu venire non poteſt, niſi partes EAF et EBF inter ſe ſimiles ſint et aequales; ſaltem proxime. Si enim alicubi eſſet $RI^2 > RK^2$, alio loco deberet eſſe $RI^2 < RK^2$, quae compenſatio locum habere commode nequit; niſi vbique inaequalitas ſit fere inſenſibilis.

§. 149. Si igitur ad hanc ſpeciem inſtituto accommodatam efficiendam requiratur aequalitas inter ſectionis aquae partes EAF et EBF, haec ipſa aequalitas poſt ſe trahet aequalitatem inter partes plani diamatralis ACD et BCD. Primo enim erit $BC = AC$; ac deinde quia portio BCD affinis eſt ſemiſſi ſectionis ampliſſimae FCD, cui etiam affinis eſſe debet portio ACD, erit vbique $TV = TU$ ob $CE : TM = CA : TV$ et $CF : TM = BC : TU$. Hinc autem porro ſequitur aequalitas inter partem carinae anteriorem et poſteriorem, ſeu proram et puppim. Quoties vero iſta aequalitas adeſt inter proram et puppim, tunc nauis iſta proprietate perpetuo gaudet, ad quamcunque ea etiam ſpeciem referatur; prouti ſupra iam notauimus.

§. 150.

§. 150. Quoniam autem tamen aliqua inaequalitas inter partes sectionis aquae EAF et EBF intercedere potest, dummodo hae partes ita sint comparatae, vt earum commune centrum grauitatis in punctum C cadat, videamus quanta dissimilitudo admitti possit. Ponamus igitur primum partem alteram ACEI esse parallelogrammum rectangulum, alteram vero partem CEb esse triangulum, ita vt AIEb semissem sectionis aquae repraesentet. Haec igitur figura maximam habebit dissimilitudinem partium AIEC et ECb, cum in nauibus neque pars AME ad rectangulum excrescere, neque altera pars ENB vsque ad triangulum extenuari possit. Ex quo inaequalitas harum partium AICE et CEb terminum constituet, quem nequidem in constructione nauium attingere licebit. Tab. VIII. fig. 1.

§. 151. Inquiramus igitur in rationem inter longitudines AC et Cb, quae centrum grauitatis totius figurae in punctum C inferat. Sit igitur AC $= a$; C$b =$ α; et CE $= b$; ducaturque recta mPn parallela axi Ab, positoque EP $= x$ erit P$m = a$, et P$n = \frac{\alpha x}{b}$. Vt autem huius figurae centrum grauitatis in rectam CE incidat, oportet esse summam omnium Pn^2 aequalem summae omnium Pm^2, seu $\int \frac{\alpha^2 x^2 dx}{b^2} = \int a^2 dx$. Hinc itaque oritur $\frac{\alpha^2 x^3}{3 b^2} = a^2 x$ et facto $x =$ CE $= b$, prodit $\alpha^2 =$ $3 a^2$ seu bC $=$ AC $\sqrt{3}$. Maxima ergo inaequalitas, quae inter partes axis AC et Cb intercedere potest, minor esse semper debet, quam ratio $\sqrt{3} : 1$: tantaque inaequalitas nunquam locum habere potest.

§. 152. Quando igitur, id quod semper ob alias caussas euenire debet, portio sectionis aquae altera AME intra

tra rectangulum continetur, tum altera portio, siquidem maneat triangulum, breuior erit efficienda, fietque ex hoc capite iam $Cb < AC\sqrt{3}$. Deinde cum figura altera FCB pariter esse debeat concaua versus CB, eo magis eius longitudo Cb contrahetur, ratioque inter AC et CB eo propius ad rationem aequalitatis reducetur. Atque ista inaequalitas insuper diminuetur, si curuae ENB tangens in E debet esse axi AB parallela: quae conditio in nauium constructione praecipue requiri solet.

§. 153. Examinemus ergo aliquos casus latius patentes, quibus figurae ex inaequalibus partibus constantes ad vicem sectionis aquae sustinendam aptae redduntur. Manentibus igitur vt ante $EC = b$; $CA = a$; $CB = \alpha$ sit $EP = x$; $PM = y$ et $PN = z$; ac ponamus $yy = mbx + nxx + \frac{kx^3}{b}$; et $zz = \mu bx + \nu xx + \frac{\varkappa x^3}{b}$; quarum aequatio vtraque tangentem in E praebet axi AB parallelam curuamque realem, dummodo m et μ sint numeri affirmatiui. Cum autem posito $x = b$ fiat $y = a$ et $z = \alpha$, erit $a^2 = b^2(m + n + k)$ et $\alpha^2 = b^2(\mu + \nu + \varkappa)$. Praeterea autem ob locum centri grauitatis in C praescriptum debet esse $\int yydx = \int zzdx$ posito $x = b$, vnde consequitur ista aequatio $\frac{m}{2} + \frac{n}{3} + \frac{k}{4} = \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{3} + \frac{\varkappa}{4}$.

§ 154. Deinde autem natura rei postulat, vt applicatae PM et PN, accedente P ad C continuo crescant; quamobrem differentialia dy et dz, quamdiu x intra limites o et b versatur affirmatiuum valorem habere debebunt. Vnde oportebit esse $mb + 2nx + \frac{3kxx}{b} > o$ itemque $\mu b + 2\nu x + \frac{3\varkappa xx}{b} > o$. Casu ergo quo $x = b$, fiet $m + 2n + 3k > o$ et $\mu + 2\nu + 3\varkappa > o$ nisi curua in A et B axi AB normaliter occurrat, quo

casu

casu isti valores fierent $= o$, ex quo id saltem requiritur, vt nec $m + 2n + 3k$ nec $\mu + 2\nu + 3\varkappa$ fiant numeri negatiui. At sumto $x < b$, omnino habere debent quantitates illae valores affirmatiuos, vnde posito $x = \frac{1}{2}b$, vtique debebit esse $m + n + \frac{3k}{4} > o$ et $\mu + \nu + \frac{3\varkappa}{4} > o$.

§. 155. Quia porro necesse est, vt ambae curuae AME et ENB vbique sint concauae versus axem AB, oportet tam ddy quam ddz negatiuos tenere valores, quamdiu saltem $x < b$: cui conditioni satisfit si fuerit $m^2 > \frac{6mkx^2}{b^2} + \frac{4nkx^3}{b^3} + \frac{3k^2x^4}{b^4}$ et $\mu^2 > \frac{6\mu\varkappa x^2}{b^2} + \frac{4\nu\varkappa x^3}{b^3} + \frac{3\varkappa^2x^4}{b^4}$. Ergo si $x = b$, debet esse $m^2 > 6mk + 4nk + 3kk$, et $\mu^2 > 6\mu\varkappa + 4\nu\varkappa + 3\varkappa\varkappa$. Atque posito $x = \frac{1}{2}b$, multo magis esse oportebit $m^2 > \frac{3mk}{2} + \frac{nk}{2} + \frac{3k^2}{16}$ atque $\mu^2 > \frac{3\mu\varkappa}{2} + \frac{\nu\varkappa}{2} + \frac{3\varkappa^2}{16}$.

§. 156. Vt his conditionibus satisfiat ponamus p, r, ϱ denotare numeros affirmatiuos; p quidem satis ingentem, at r et ϱ eiusmodi, vt etiam euanescere possint. Sitque $\frac{m}{2} + \frac{n}{3} + \frac{k}{4} = \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{3} + \frac{\varkappa}{4} = p$; reperieturque $n = \frac{12p - 5m - r}{2}$; $\nu = \frac{12p - 5\mu - \varrho}{2}$; $k = \frac{2r - 12p + 4m}{3}$ et $\varkappa = \frac{2\varrho - 12p + 4\mu}{3}$. Reliquae vero conditiones implebuntur, sumendo $m < 8p - 4\sqrt{(pp + \frac{1}{2}pr)}$ et $\mu < 8p - 4\sqrt{(p^2 + \frac{1}{2}p\varrho)}$ ad quod vlterius opus est, vt sit $r < 6p$ et $\varrho < 6p$. Sit $r = 6p - 2s$; $\varrho = 6p - 2\sigma$; debebit esse $m < 8p - 4\sqrt{(pp - ps)}$ et $\mu < 8p - 4\sqrt{(p^2 - p\sigma)}$ $n = 3p + s - \frac{5m}{2}$; $\nu = 3p + \sigma - \frac{5\mu}{2}$; $k = \frac{4m - 4s}{3}$; $\varkappa = \frac{4\mu - 4\sigma}{3}$.

§. 157. His valoribus introductis reperietur $a^2 = b^2(3p - \frac{m}{6} - \frac{s}{3})$ et $\alpha^2 = b^2(3p - \frac{\mu}{6} - \frac{\sigma}{3})$ vnde se habebit $a^2 : \alpha^2 = 18p - m - 2s : 18p - \mu - 2\sigma$. Vt nunc maxima prodeat inaequalitas tribuatur ipsi s maximus, ipsi σ autem

autem minimus valor, faciendo $s = 3p$ et $\sigma = 0$; erit $m < 4p$ et $\mu < 0$. Fiat $m = 4p$ et $\mu = 0$, qui ſunt extremi limites maximamque inaequalitatem inter a et α producent. Prodibit autem $a^2 : \alpha^2 = 8 : 18 = 4 : 9$; vnde maxima inaequalitas inter a et α erit, ſi $a : \alpha = 2 : 3$, neque maior imo nequidem tanta inaequalitas locum habere poteſt, niſi figurae omnino ineptae admittantur.

§. 158. Ponamus ad caſus reales eruendos $s = 3p - \eta p$ et $\sigma = \theta p$, denotantibus η et θ numeros affirmatiuos quidem ſed valde paruos: cum ſit $m < 8p - 4p\sqrt{(1+\eta)}$ ſeu $m < 4p - 2\eta p + \frac{\eta^2 p}{2}$ ponatur propterea $m = 4p - 2\eta p$: quia deinde eſt $\mu < 8p - 4p\sqrt{(4-\theta)}$ ſeu $\mu < \theta p + \frac{\theta^2 p}{16}$, ponatur ergo $\mu = \theta p$. Hinc erit $n = -4(1-\eta)p$; $\nu = 3p - \frac{3\theta p}{2}$; $k = \frac{4p(1-\eta)}{3}$, $\varkappa = 0$. ex quibus valoribus naſcuntur hae aequationes $yy = 2p(2-\eta)bx - 4(1-\eta)pxx + \frac{4p(1-\eta)}{3b}x^3$; et $zz = \theta pbx + \frac{3p(2-\theta)}{2}xx$ atque $a^2 = \frac{2pbb}{3}(2+\eta)$ et $\alpha^2 = \frac{pbb(6-\theta)}{2}$) vnde $a^2 : \alpha^2 = 8 + 4\eta : 18 - 3\theta$.

§. 159. Quando igitur aliae circumſtantiae ſectionem aquae poſtulabunt, quae ex duabus partibus diſparibus EAF et EBF conſtet, niſi diſparitas ſit nimis magna, haec ſpecies quinta figuras idoneas ſuppeditare poterit. Inuenta autem figura idonea, quae centrum grauitatis ſitum habeat in C tota carinae figura non difficulter deſcribetur. Sumta enim pro lubitu ſectione ampliſſima EDF; planum diametrale ADB ita erit formandum, vt partes ACD et BCD ſint figurae affines tum inter ſe, tum ſemiſſi ſectionis aquae CDE, ad eandem altitudinem CD relatae: quo facto ſupereſt, vt omnes ſectiones horizontales inter ſe ſimiles conficiantur.

Tab. VII. f. 1. et ſeqq.

§. 160.

§. 160, Contemplemur nunc ſpeciem ſextam in qua omnes ſectiones verticales ſectioni ampliſſimae parallelae eidem ſint ſimiles. Sit igitur ſectio quaecunque transuerſalis QNQ per ordinatam QQ ſectionis aquae facta, quae cum ſit ſimilis ſectioni ampliſſimae EDF, erit CE : CD = PQ : PN; ex qua analogia perſpicuum eſt figuram plani diametralis (vid. fig. 3) affinem eſſe ſemiſſi ſectionis aquae AEB. Ita ſi fuerit in vtraque figura CP $= p$, et PQ $= q$, erit PN $= \frac{cq}{b}$. Data ergo ſectione aquae vna cum carinae profunditate CD $= c$, ſimul determinabitur figura plani diametralis, ac ſi praeterea detur figura ſectionis ampliſſimae E D F totius carinae figura definita erit, eo quod omnes ſectiones transuerſales ſectioni ampliſſimae parallelae eidem ſint ſimiles. Tab. VII. fig. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

§. 161. ponatur in ſectione ampliſſima abſciſſa CR $= r$ et applicata RS $= s$, dataque erit aequatio inter r et s, ex qua vel s per r vel r per s definiri poterit. Quare ſi in ſectione transuerſali QNQ capiatur P$r = \frac{qr}{b}$, erit $rs = \frac{qs}{b}$. Concipiatur nunc per punctum s facta ſectio horizontalis VMU, in qua punctum q congruat cum puncto s erit $pq =$ P$r = \frac{qr}{b}$; T$p =$ CP $= p$; et T C $= rs = \frac{qs}{b}$; quae recta CT denotabit profunditatem huius ſectionis horizontalis ſub ſectione aquae. Cum igitur per totam hanc ſectionem horizontalem CT eandem ſeruet quantitatem, ponatur C T $= \frac{qs}{b} = h$ abſciſſa T$p = x$, applicata $pq = y$; erit $x = p$, $y = \frac{qr}{b}$, atque $\frac{qs}{b} = h$. Quare cum detur q per $p = x$ erit q functio ipſius x, vnde oritur $r = \frac{by}{q}$, et quia s datur per r habebitur s per x et y, ex quo aequatio $\frac{qs}{b} = h$ exprimet naturam ſectionis horizontalis in fig. 4.

§. 162.

§. 162. Cum igitur ex datis aequationibus pro sectione aquae et sectione amplissima detur aequatio inter x et y, qua natura sectionis horizontalis cuiusque exprimitur; hanc aequationem ita comparatam esse oportet, vt praebeat huius sectionis centrum grauitatis in puncto g. quod tantum distet a puncto medio T, quantum est interuallum CG, centri grauitatis sectionis aquae G a puncto C. Quoniam autem natura huius sectionis horizontalis non a sola sectione aquae pendet, sed insuper a sectione amplissima, difficillimum est calculum ita instituere, vt isti requisito satisfiat; curuae enim istae sectionum horizontalium admodum inter se fiunt dissimiles, ex quo vniuscuiusque centrum grauitatis non sine summa molestia definiri potest. Quodsi autem pro sectione amplissima curua definita accipiatur, tum duae tantum supererunt variabiles, quibus calculus facilius absolui poterit.

§. 163. Sin autem id tantum requiratur, vnde praesens regula nata est, scilicet vt centrum grauitatis sectionis aquae G perpendiculariter immineat centro magnitudinis carinae, huic conditioni per solam aquae sectionem satisfieri poterit, neque figura sectionis amplissimae in considerationem venit. Cum enim sectio QNQ similis sit sectioni amplissimae EDF areae tenebunt rationem duplicatam laterum homologorum PQ. Quare si G fuerit centrum grauitatis sectionis aquae, summa momentorum omnium PQ^2 respectu G versus partem anteriorem aequalis esse debet summae similium momentorum in parte posteriore inter G et C sumtorum, ex qua conditione, figurae idoneae pro sectione aquae determinari debent.

§. 164. Haec ergo conditio, qua centrum grauitatis ſectionis aquae et centrum magnitudinis partis ſubmerſae in eandem rectam verticalem incidere debent, huc recidit, vt cum ipſa ſectio aquae tum ſolidum rotundum genitum rotatione ſectionis aquae circa axem AB commune habeant centrum grauitatis. Atque ex hac proprietate figurae idoneae ab ineptis, quae vicem ſectionis aquae ſuſtinere queant, diſcernuntur; ac quomodo figurae ad ſextam ſpeciem pertinentes ad vſum ſint accomodandae intelligitur. Primo quidem aequalitas partium EAF et EBF ſponte ſe offert, quae autem non ſolum huius ſpeciei, ſed omnium figuras iſti requiſito aptas reddit; quare quanta inaequalitas iſtarum partium pro hac ſpecie admitti queat, videamus.

§. 165. Ponamus iterum, vt quaſi vltimum inaequalitatis terminum definiamus, ſectionis aquae alteram partem eſſe parallelogrammum rectangulum CAIE, alteram vero triangulum ECb; quaeramusque rationem inter AC $= a$ et bC $= \alpha$, vt tam figurae planae AIEb, ſi eadem ſimul ad alteram partem axis Ab conſtituta concipiatur, quam ſolidi conuerſione huius figurae circa axem Ab geniti centrum grauitatis in idem punctum G incidat. Sit AI $=$ CE $= b$, erit area rectanguli CI $= ab$, trianguli CE$b = \frac{\alpha b}{2}$; vnde ex natura centri grauitatis habebitur AG. $b\,(a + \frac{\alpha}{2}) = ab.\frac{a}{2} + \frac{\alpha b}{2}\,(a + \frac{\alpha}{3})$, ſiue

$$AG = \frac{\frac{aa}{2} + \frac{a\alpha}{2} + \frac{\alpha\alpha}{6}}{a + \frac{\alpha}{2}} = \frac{3a^2 + 3a\alpha + \alpha^2}{6a + 3\alpha} = \frac{a}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{12(2a+\alpha)}.$$

quae aequatio locum centri grauitatis ipſius ſectionis aquae indicat.

Tab. VII fig. 1.

§. 166. Solidum autem rotundum, quod generatur conuerſione figurae AIEb circa axem Ab conſtabit ex cylindro, cuius volumen erit $= ab^2$ neglecto coefficiente a quadratura circuli pendente: atque ex cono cuius ſoliditas eſt $= \frac{\alpha b^2}{3}$. Huius igitur corporis compoſiti centrum grauitatis cadet in punctum G, ita collocatum vt ſit AG. $b^2(a+\frac{\alpha}{3}) = ab^2 . \frac{a}{2} + \frac{\alpha b^2}{3}(a+\frac{\alpha}{4})$ vnde fit $AG = \frac{\frac{a^2}{2}+\frac{a\alpha}{3}+\frac{\alpha^2}{12}}{a+\frac{\alpha}{3}} = \frac{a}{2}+\frac{\alpha}{6}+\frac{\alpha^2}{12(3a+\alpha)}$. Quodſi igitur iſte valor ipſius AG praecedenti aequalis ponatur, prodibit iſta aequatio: $\frac{a}{2}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha^2}{12(2a+\alpha)} = \frac{a}{2}+\frac{\alpha}{6}+\frac{\alpha^2}{12(3a+\alpha)}$ quae reducta dat vel $\alpha = 0$, vel $\alpha^2+6a\alpha+6a^2 = 0$. quarum neutra figuram realem exhibet.

§. 167. Cum igitur nulla detur figura ex parallelogrammo rectangulo et triangulo compoſita, quae pro ſpecie ſexta vicem gerere queat ſectionis aquae; intelligitur ſumme difficile eſſe eiusmodi definire figuras, quae memorata proprietate gaudeant, quaeque ſimul ex duabus partibus diſſimilibus ſint compoſitae. Quare cum iſti conditioni, qua tantum centrum magnitudinis partis ſubmerſae ac centrum grauitatis ſectionis aquae in eadem recta verticali poſita eſſe debent, tam difficulter ſatisfiat, niſi puppis ſimilis ſit prorae, multo difficilius erit eiusmodi aſſignare figuras, quarum omnes ſectiones horizontales ſua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant poſita, quae conditio non minus eſt neceſſaria quam altera cum non ſemper eadem ſectio horizontalis in ſuperficie aquae verſetur.

Tab. VII fig. 1. 2. 3. 4. 5. 6. §. 168. Specie ſexta examinata inueſtigemus quomodo ſpeciei ſeptimae figuras comparatas eſſe oporteat, vt

prae-

praeſcripta proprietate gaudeant. Retulimus autem ad ſpeciem ſeptimam eiusmodi carinas, in quibus ſectiones verticales plano diametrali parallelae eidem ſunt ſimiles. Quare cum fig. 3. ipſum planum diametrale, fig. 6. vero ſectionem quamcunque ipſi parallelam repraeſentet, erit ob ſimilitudinem primo $CA:CB = RI:RK$, quae analogia ad figuram primam translata indicat ambas ſectionis aquae portiones EAF et EBF inter ſe eſſe affines ſuper communi baſi EF conſtitutas; ita vt ſit $RI:RK = AC:BC = a:\alpha$, ideoque in ratione conſtante. Hinc ſi data fuerit partis anterioris EAF centrum grauitatis in O, cadet totius ſectionis aquae centrum grauitatis in punctum G, ita vt ſit $CG = \frac{(a-\alpha)}{a} CO$. quam expreſſionem computus centri grauitatis ad caſum propoſitum accommodatus ſponte ſuppeditat.

§. 169. Deinde eadem ſimilitudo ſectionum verticalium plano diametrali parallelarum praebet $CA:CD = RI:RS$, quae eaedem lineae cum in figuris 1. et 2. occurrant, intelligitur ſectionem ampliſſimam EDF pariter affinem eſſe alteri ſectionis aquae portioni EAF vel EBF: cum enim vtrinque Baſis CE ſit eadem, ſi in ea vtrinque capiatur eadem portio CR, tenebunt applicatae RI et RS vbique eandem rationem, eam ſcilicet quam habet $CA = a$ ad $CD = c$. Quare ſi ſola profunditas carinae CD fuerit data, ſimul tota ſectio ampliſſima ex ſectione aquae determinatur; his autem duabus ſectionibus principalibus datis, ſi detur praeterea figura plani diametralis ADB, omnes ſectiones verticales ipſi parallelae ſimul ſimiles erunt conficiendae, ex quo totius carinae figura erit determinata; ac vel omnes ſectiones transuerſales vel horizontales definiri poterunt, ad quas conſtructio nauium commodiſſime dirigetur.

§. 170. Cum igitur ex sectione aquae et profunditate carinae detur sectio amplissima EDF, in qua erit $CE = CF = b$, $CD = c$, sumatur ea pro fundamento, quia vicissim ex ea sectio aquae definitur. Ponatur itaque abscissa $CR = r$, applicata $RS = s$, erit in ipsa sectione aquae pariter $CR = r$, at $RI = \frac{as}{c}$ et $RK = \frac{\alpha s}{c}$ ob $AC = a$ et $BC = \alpha$. Quare cum O denotet centrum grauitatis partis anterioris sectionis aquae EAF, fiet ex calculo centri grauitatis $CO = \frac{a\int ssdr}{2c\int sdr}$ integralibus ita sumtis, vt a valore $r = o$ vsque ad $r = b$ pateant. Hinc itaque totius sectionis aquae centrum grauitatis incidet in punctum G vt sit $CG = \frac{(a-\alpha)\int ssdr}{2c\int sdr}$ in qua expressione $\frac{\int ssdr}{2\int sdr}$ denotat distantiam centri grauitatis sectionis amplissimae EDF a superficie aquae EF.

§. 171. Cum igitur ante omnia requiratur vt centrum grauitatis sectionis aquae G in ipsa recta verticali per centrum grauitatis totius carinae ducta sit situm; huius rectae verticalis positionem calculo definiamus: transibit autem per rectam AB. Ad hoc sit area plani diametralis $ADB = F$, cuius, quia data ponitur, centrum grauitatis situm sit in recta verticali per punctum H transeunte: ponatur ergo $CH = f$. Quoniam vero huic figurae similis est sectio ISK erit eius area $= \frac{s^2 F}{c^2}$, eiusque centrum grauitatis sub h cadet existente $Rh = \frac{s}{c} f$. Hinc summa omnium momentorum respectu EF ex sectionibus verticalibus plano diametrali parallelis ortorum erit $= \frac{Ff\int s^3 dr}{c^3}$, volumenque totius carinae $= \frac{F}{c^2}\int s^2 dr$: ex quibus oritur $CG = \frac{f\int s^3 dr}{c\int ssdr}$, quoniam recta verticalis per centrum grauitatis carinae ducta rectam AB in ipso puncto G secare ponitur.

§. 172.

§. 172. Quodſi nunc has binas interualli CG expreſſiones inter ſe aequales ponamus, prodibit $\frac{(a-\alpha)\int ssdr}{2\int sdr} = \frac{f\int s^3 dr}{\int ssdr}$ ſeu $(a-\alpha)(\int ssdr)^2 = 2f\int sdr.\int s^3 dr$. Aſſumamus itaque pro ſectione ampliſſima hanc aequationem generalem $r = b - \frac{ms^2}{c^2} - \frac{ns^3}{c^3} + \frac{(m+n-b)s^4}{c^4}$, quae ita eſt comparata vt poſito $s = c$ fiat $r = o$, et $s = o$, fiat $r = b$. Praeterea, quia in ſectione aquae tangens in E parallela eſſe debet axi AB, in ſectione ampliſſima tangens E normalis eſſe debebit ad CE, cui conditioni aequatio aſſumta pariter ſatisfacit. Erit itaque $dr = -\frac{2msds}{c^2} - \frac{3ns^2ds}{c^3} + \frac{4(m+n-b)s^4}{c^4}$, vnde integralia $\int sdr$, $\int s^2 dr$ et $\int s^3 dr$ debito modo aſſumta ita ſe habebunt $\int sdr = c(\frac{2}{3}m + \frac{3}{4}n - \frac{4}{5}(m+n-b))$ $\int s^2 dr = c^2(\frac{2}{4}m + \frac{3}{5}n - \frac{4}{6}(m+n-b))$ et $\int s^3 dr = c^3(\frac{2}{5}m + \frac{3}{6}n - \frac{4}{7}(m+n-b))$.

§. 173. His valoribus in aequatione ſuperiore ſubſtitutis obtinebitur $(a-\alpha)(\frac{2}{3}b - \frac{1}{6}m - \frac{1}{10}n)^2 = 2f(\frac{4}{5}b - \frac{2}{15}m - \frac{1}{20}n)(\frac{4}{7}b - \frac{6}{35}m - \frac{1}{14}n)$ ex qua aequatione cum dentur quantitates a, α et b ex ſectione aquae, itemque f ex figura plani diametralis, definiri poterit alterutra quantitatum m vel n; quo facto ob alteram etiam nunc indeterminatam innumerabiles naſcentur formae ſectioni ampliſſimae inducendae, vt propoſito requiſito ſatisfiat. Neque igitur hinc aequalitas inter a et α infertur, ſed hae longitudines quantumuis inaequales aſſumi poterunt; quam latitudinem praecedentes carinae ſpecies non admittebant. Interim ſi huic conditioni eſt ſatisfactum, vt recta verticalis per centrum grauitatis carinae ducta per centrum grauitatis ſectionis aquae tranſeat, de altera conditione, qua etiam omnium ſectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta ſita

 eſſe

esse debeant, non admodum erimus solliciti: cum haec proprietas in sectiones horizontales non nimis remotas proxime cadat.

§. 174. Potest etiam sectio amplissima EDF pro lubitu assumi, ex qua simul, si litteris a et α definiti valores tribuantur, sectio aquae determinabitur. Dati igitur erunt valores formularum integralium $\int s\,dr$, $\int s^2\,dr$ et $\int s^3\,dr$, ex quibus definitur $f = \frac{(a-\alpha)(\int ss\,dr)}{2\int s\,dr.\int s^3\,dr}$. Hinc ergo eiusmodi figura idonea pro plano diametrali ADB exquiri debebit, cuius centrum grauitatis interuallo f a recta CD versus anteriora distet, cui quidem conditioni infinitis modis satisfieri poterit. Interim tamen id est ante omnia efficiendum vt sit CA $= a$ et CB $= \alpha$; itemque applicata CD $= c$ omnium fiat maxima. Haec itaque species maxime est foecunda ad figuras carinarum, quae ex partibus dissimilibus constent, suppeditandas: qua fertilitate praecedentes species non gaudent. Neque etiam receptae nauium formae ab hac specie multum dissentire videntur.

§. 175. Pergamus nunc ad reliquas tres species, quae latissime patent, ac iam tractatas sub se complectuntur. Primo enim in his reliquis speciebus sectiones, quae vni principalium parallelae sunt factae, inter se non similes sed tantum affines ponuntur. Deinde ex vna sectione principali pro lubitu assumta neutra reliquarum determinatur, sed omnes tres sectiones pro lubitu accipere licet, dummodo ista conditio obseruetur, vt lineae AC, BC sectioni aquae ac plano diametrali, lineae EF sectioni aquae et sectioni amplissimae, atque profunditates EF sectioni amplissimae et plano diametrali sint communes. Deinde etiam necesse est, vt in sectione aquae tangentes ad E et

F sint

F ſint axi AB, in plano diametrali vero tangens ad O pariter eidem axi AB ſint parallelae. Alias conditiones ipſa praxis conſtructionis nauium et vſus ſuppeditant, quarum rerum ſupra iam mentio eſt facta.

§. 176. Conſideranda itaque venit ſpecies decima, in qua omnes ſectiones horizontales ſectioni ampliſſimae ſunt affines. Manentibus igitur vt hactenus $AC = a$; $BC = \alpha$; $CE = CF = b$ et $CD = c$, datae ſint pro arbitrio omnes tres ſectiones principales; ac primo quidem pro ſectione aquae ſit abſciſſa $CP = p$, applicata $PQ = q$; pro ſectione vero ampliſſima $CR = r$, $RS = s$; atque pro plano diametrali $CI = t$ et $TV = u$. Concipiatur nunc facta ſectio horizontalis VMU per punctum T, quod ſectioni ampliſſimae et plano diametrali eſt commune; erit igitur cum longitudo VU tum latitudo MM ex datis ſectionibus principalibus definita. Fiat igitur in ſectione ampliſſima $s = t$, exprimet r ſimilitudinem TM ſectionis horizontalis. Hanc obrem habebitur $TV = u$, et $TM = r$, atque ob $s = t$, tam u quam r per t erunt determinata.

§. 177. Ponatur nunc in hac ſectione horizontali abſciſſa $Tp = x$, applicata $pq = y$, fiatque, vt affinitatis ratio habeatur $AC\ (a) : CP\ (p) = TV\ (u) : Tp\ (x)$ ſeu ſumatur $x = \frac{pu}{a}$; atque erit $CE\ (b) : PQ\ (q) = TM\ (r) : pq\ (y)$ ſiue $y = \frac{qr}{b}$. Quoniam vero pro iſta ſectione horizontali VMU quantitas t manet perpetuo eadem ſeu conſtans, quantitates quoque ab ea pendentes r et u erunt conſtantes; quare cum q detur per p, hinc obtinebitur relatio inter x et y, qua natura huius ſectionis horizontalis definietur. Sit huius ſectionis horizontalis centrum

trum grauitatis in g situm, erit $Tg = \frac{\int yxdx}{\int ydx} = \frac{u\int pqdp}{a\int qdp}$. At si ipsius sectionis aquae centrum grauitatis statuatur in G, erit $CG = \frac{\int pqdp}{\int qdp}$, quamobrem habebitur $CG : Tg = a : u = AC : TV$ seu $Tg = \frac{u \cdot CG}{a}$. Vt igitur vbique sit $Tg = CG$, oportet esse vel $CG = o$, vel $u = a$ vbique, qui posterior casus huc non pertinet.

§. 178. Haec ita se habent si et altera portio MUM eandem teneat affinitatis legem respectu alterius portionis EBF sectionis aquae, quam priores portiones proram respicientes tenent, hoc est si fuerit $CA : TV = CB : TU$, qui casus obtinet, quando in plano diametrali ADB portiones ACD et BCD fuerint inter se affines. Vt igitur hoc casu singularum sectionum horizontalium centra grauitatis in eandem rectam verticalem cadant, oportet vt sectionis aquae centrum grauitatis situm sit in ipso puncto C. Quodsi autem portio CDB non debeat esse affinis portioni ACD, tum vbicunque sectionis aquae centrum grauitatis fuerit situm, ex natura centri grauitatis semper ad datum ipsius TV valorem definiri potest quantitas TU, quo huius sectionis horizontalis centrum grauitatis perpendiculariter sub G cadat.

§. 179. Quod vt clarius perspiciatur, sit sectio aquae proposita quaecunque, quae in binas partes anteriorem EAF et posteriorem EBF sit diuisa. Sit porro partis anterioris centrum grauitatis in a posterioris in b, erit totius sectionis aquae centrum grauitatis situm in G, ita, vt sit $CG = \frac{Ca \cdot EAF - Cb \cdot EBF}{EAF + EBF}$. Simili modo si sectionis horizontalis VMU partis anterioris centrum grauitatis statuatur in v, posterioris in u, fiet $Tg = \frac{Tv \cdot MVM - Tu \cdot MUM}{MVM + MUM}$.

At

At vero eſt $MVM = \frac{TM \cdot TV}{CE.AC} \cdot EAF$; $MUM = \frac{TM \cdot TU}{CE.BC} \cdot EBF$, atque $Tv = \frac{TV}{AC} \cdot Ca$ et $Tu = \frac{TU}{BC} \cdot Cb$. Quocirca vt ſit $Tg = CG$, eſſe debet $\frac{Ca \cdot EAF - Cb \cdot EBF}{EAF + EBF} = CG = \frac{BC^2 \cdot TV^2 \cdot Ca \cdot EAF - AC^2 \cdot TU^2 \cdot Cb \cdot EBF}{AC.BC^2 \cdot TV.EAF + BC.AC^2 \cdot TU \cdot EBF}$, quae aequatio relationem praebet inter TV et TU, inſtituto idoneam.

§. 180. Sumi igitur poteſt curua quaecunque pro ſectione aquae AEBF hacque aſſumta datae erunt quantitates EAF, EBF ſeu areae partium eius tam anterioris quam poſterioris, itemque diſtantiae Ca et Cb, quibus determinatis habebitur aequatio inter TV et TU. Quodſi ergo pars plani diametralis altera vel anterior ACD vel poſterior BCD pro lubitu formetur, exinde altera pars determinabitur, quoniam autem euenire poteſt vt aſſumto valore TV altera linea TU fiat vel imaginaria vel negatiua vel ſaltem incogruae quantitatis, praeſtabit neutram partem plani diametralis prorſus ad arbitrium ſumere, ſed ope aequationis inuentae vtramque ita accommodare, vt aliis ſcopis maxime ſatisfiat. Sectio autem ampliſſima omnino manet indeterminata, atque hanc ob rem haec ſpecies octaua maxime apta eſt ad carinas nauium idoneas ſuppeditandas.

§. 181. Pergamus ad ſpeciem nonam inueſtigandam, in qua ſingulae ſectiones verticales ſectioni ampliſſimae parallelae eidem ſint affines. Maneant igitur omnes tres ſectiones principales datae, eaedemque denominationes, quas in praecedente ſpecie adhibuimus atque concipiatur facta ſectio verticalis per ordinatam QQ ſectionis aquae, quae ſit QNQ. In hac capiatur abſciſſa $Pr = y$, applicata $rs = z$; eritque ex ſectionibus principalibus $PQ = q$, $PN = t$. Dabitur autem ex natura ſectionis aquae q

 per

per $p^{\urcorner}$, atque ex natura plani diametralis t per u: ſumi autem debet $u = p$, et quia punctum P pro iſta ſectione Q N Q manet inuariatum, erit $CP = p = u$ quantitas conſtans, indeque etiam q et t. Quamobrem ſi fiat CD (b): CR $(r) = $ PQ (q) : Pr (y) ſeu $y = \frac{qr}{b}$ erit CD (c) : RS $(s) = $ PN (t) : rs $(z) = \frac{ts}{c}$, vnde ex aequatione inter r et s data, dabitur aequatio inter y et z, quae naturam huius ſectionis exprimet.

§. 182. Quoniam ex his, niſi ad caſus particulares deſcendere velimus, aequationes pro ſectionibus horizontalibus difficulter eruuntur, multo erit difficilius rem ita expedire, vt omnes ſectiones horizontales ſua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant poſita. Quamobrem contenti erimus figuram carinae ita adornare, vt totius centrum grauitatis perpendiculariter ſub centrum grauitatis ſectionis aquae G cadat. Ad hoc noſſe oportet aream ſectionis Q N Q, quae ſi area ſectionis ampliſſimae EDF ponatur $= 2$ E, erit $= \frac{2qt}{bc}$ E. Nunc quia tam q quam t ſunt functiones ipſius p erit $\frac{\int 2qtdp}{bc}$ E ſoliditas totius carinae, integrali per totam amplitudinem extenſo; diſtantia vero centri grauitatis carinae ab axe verticali CD verſus proram erit $= \frac{\int qtpdp}{\int qtdp}$, vbi integrale $\int qtpdp$ quod ex parte EBF oritur ſubtrahi debet, ab altero ex parte anteriori orto.

§. 183. Cum igitur ambo integralia $\int qtdp$ et $\int qtpdp$ debito modo fuerinr accepta, efficiendum eſt, vt fiat CG $= \frac{\int qtpdp}{\int qtdp}$, ex qua aequatione functio idonea pro t ſubſtituenda debet definiri, quo facto planum diametrale quodammodo determinatur. Expediet autem pro t vel potius pro qt expreſſiones latius patentes aſſumere, vt ſupra feci-

mus

mus, quae tamen figuram idoneam plano diametrali inducant, atque coefficientes ita definire vt aequationi datae ſatisfiat. In integrationibus vero formularum $\int qtpdp$ et $\int qtdp$ id probe eſt tenendum, vt in priore valor quem puppis ſuppeditat ab eo, qui ex prora oritur ſubtrahatur, in poſteriore vero integratione ambo valores addantur, id quod ad calculum centri grauitatis reſpicienti palam eſt.

§. 184. Reſtat tandem ſpecies decima, quae vltima nobis eſt, in qua ſingulae ſectiones verticales plano diametrali parallelae eidem ſunt affines. Quodſi ergo in diſtantia $CR = r$ ab axe AB fiat huiusmodi ſectio verticalis ISK. Quoniam nunc natura ſectionis aquae exprimitur aequatione inter $CP = p$ et $PQ = q$, ſi fiat $q = r$, abibit p in RI, ſimilique modo ex parte poſteriori prodibit RK. Deinde ex ſectione ampliſſima obtinebitur $RS = s$ per r. At in ſectione, quam nunc contemplamur ISK erit $RS = s$, et $RI = p$, quae quantitates ambae dantur vel in q vel in r, ac quamdiu iſta ſectio ISK conſideratur, manent conſtantes. Ponatur nunc in hac ſectione $Rt = z$ et $tv = x$, quae ob affinitatem cum figura ADB ita definientur vt ſit $z = \frac{ts}{c}$ et $x = \frac{up}{a}$, hincque propter datam aequationem inter t et u elicietur aequatio inter z et x, qua tum ſingulae ſectiones plano diametrali parallelae, tum ipſa figura carinae determinabitur.

§. 185. In hac ſpecie non ſolum difficile eſt aequationem pro quaque ſectione horizontali eruere, eiusque centrum grauitatis determinare, ſed etiam non tam commode totius carinae centrum grauitatis definiri poteſt quam in reliquis ſpeciebus. Etſiamſi enim detur plani diametralis centrum grauitatis, tamen ex eo ſectionum ipſi

 pa-

parallelarum centrum grauitatis non innotescit. Quanquam enim alias affinitas figurarum determinationem centri grauitatis facilem reddit, tamen hic portiones proram ac puppim spectantes seorsim sunt affines, neque hic valet haec ratio $AB : VU = IK : vu$, etiamsi seorsim sit $AC : VT = IR : vt$ et $BC : UT = KR : ut$. Hanc ob rem cum calculo in hac specie nil possit commode expediri, eam tanquam minus idoneam ad praesens institutum reiiciemus.

§. 186. His igitur decem euolutis carinarum speciebus, quae tam late patent, vt vix figura excogitari queat, quae non in aliqua earum comprehendatur, manifestum est, quaenam species magis sint accommodatae ad naues formandas, et quaenam minus. Hic autem potissimum respiciendum est ad eas figuras, quae inaequalitatem inter proram ac puppim admittunt; quodsi enim prora aequalis similisque fuerit puppi, tum, ad quamcunque etiam speciem figura pertineant, non solum illi satisfit requisito, quo centrum grauitatis sectionis aquae et centrum magnitudinis partis submersae in eandem rectam verticalem cadunt, sed etiam alteri, quo postulatur, vt omnium omnino sectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta verticali sint posita. Quocirca si quae species alias figuras idoneas non suppeditet, nisi in quibus puppis prorae sit similis, ea species tanquam inutilis est reiicienda.

§. 187. Quoniam igitur duo stabiliuimus requisita, quorum priore tantum requiritur, vt centrum grauitatis sectionis aquae et centrum magnitudinis carinae in eadem recta verticali sit positum, posteriore vero, vt omnes sectiones horizontales sua centra grauitatis in eadem recta

ver-

verticali habeant ſita: hocque poſterius requiſitum in ſe prius iam complectitur; manifeſtum eſt eas ſpecies, quae ad poſterius requiſitum ſunt accomodatae, iis, quae priori tantum ſatisfaciunt, longe eſſe anteferendas. In quibus autem ſpeciebus hoc nequidem obtineri poteſt, vt centrum grauitatis ſectionis aquae in eandem rectam verticalem cadat, in quo collocatur centrum magnitudinis partis ſubmerſae, niſi prora puppi ſimilis fiat, eae ſpecies omnino ſunt reiiciendae. Tales ſunt ſpecies quarta, quae abſolute adhiberi nequit, niſi prora ſimilis puppi conficiatur, ac ſexta nona et decima, quae vix ad inſtitutum accommodari poſſunt.

§. 188. Si requiſito priore contenti eſſe velimus, ſpecies ſeptima innumerabiles ſuppeditat figuras idoneas, vti oſtendimus in eius pertractatione; ac fortaſſe etiam ſpecies decima, quippe quae ſeptimam in ſe complectitur, plures ſuppedditaret, niſi difficultas calculi obſtaret. Sed quoniam poſterius requiſitum, quo ſingulae ſectiones horizontales ſua grauitatis centra in eadem recta verticali ſita habere debent, maximis coniunctum eſt emolumentis in nauigatione, id minime negligi poteſt, et hanc ob rem etiam hae ſpecies prae reliquis, quae ſimul hac praerogatiua gaudent, in conſiderationem venire non merentur. Ex quo ad naues perfecte conſtruendas nobis tantum relinquuntur ſpecies prima, ſecunda, tertia, quinta et octaua, quarum poſtrema praecedentes in ſe omnes complectitur; in omnibus enim ſectiones horizontales inter ſe ſunt vel aequales vel ſimiles vel ſaltem affines.

§. 189. Cum igitur ſub affinitate tam aequalitas quam ſimilitudo contineatur, omnes naues ita comparatas eſſe

oportebit, vt ſectiones horizontales omnes carinae ſaltem, partem enim nauis ſupra aquam eminentem non conſideramus, ſint inter ſe affines. Atque ſi nauis hac fuerit praedita, proprietatem eandem conſeruabit, quaecunque ſectio horizontalis vicem ſectionis aquae ſubeat. Quae proprietas locum non habet, ſi ſectiones verticales vel ſectioni ampliſſimae vel plano diametrali parallelae inter ſe ſint affines; quodſi enim ſectio aquae mutetur, ac nauis vel magis vel minus immergatur, quam poſuimus, tum ſimul affinitas harum ſectionum ceſſabit. Quare cum eae figurae, quae omnes ſectiones horizontales inter ſe affines habent, hanc ipſam proprietatem conſeruent, quaecunque ſectio horizontalis ſuperficiem aquae occupet, iſtae figurae reliquis omnibus merito praeferuntur.

§. 190. Vt igitur nauis iis requiſitis, quae quidem hoc caput ſuggeſſit, ſatisfaciat, duplici modo obtineri poteſt: quorum primus in hoc conſiſtit, vt carinae pars anterior parti poſteriori ſimilis ſit et aequalis. Quaecunque enim prorae detur figura, ſiue in aliqua recenſitarum decem ſpecierum contenta ſiue minus, ſi eadem puppi tribuatur, carina ad inſtitutum praeſens erit accommodata. Namque omnes ſectiones horizontales ſua centra grauitatis habebunt ſita in eadem recta verticali, quae cum proram a puppi tum ambo nauis latera a ſe inuicem diſpeſcit. Atque ad hanc nauium formam recidit tota ſpecies prima atque tertia, quippe in quibus prora et puppis ſunt figurae inter ſe ſimiles et aequales. Ex quo hae ſpecies non tam ideo aptae ſunt cenſendae, quod habeant ſectiones omnes horizontales inter ſe affines, quam quod puppim ſimilem et aequalem prorae praebeant.

§. 191.

§. 191. Cum autem plures circumſtantiae, quae infra occurrent, prohibeant, quo minus puppis prorae ſimilis conficiatur, figurae conuenientes ex ſpeciebus ſecunda, quinta et octaua ſunt petendae. Species quidem ſecunda nulla indiget reſtrictione, ſed omnes figurae ad eam pertinentes per ſe ita ſunt comparatae, vt eadem recta verticalis per ſingularum ſectionum horizontalium centra grauitatis tranſeat. Species autem quinta vehementer reſtringi debet, vt hanc proprietatem aſſequatur, neque enim nimium diſſimiles figuras pro prora ac puppi admittit. Species vero octaua minori opera ad hoc inſtitutum accommodari poteſt, quoniam tam ſectionem aquae quam ſectionem ampliſſimam pro lubitu aſſumere licet. Ita igitur in inueſtigandis figuris idoneis nauium ſumus verſati, vt ſufficiens rerum adhuc indeterminatarum copia ſuperſit, quibus determinandis pluribus aliis requiſitis, quae aliae conſiderationes ſuggerent, ſatisfieri queat.

Cap.

Cap. III.

DE STABILITATE SITVS AEQVILIBRII.

§. 192.

Quando nauis ita iam fuerit constituta, vt aquae in situ erecto immissa aequilibrium teneat, quod euenit, si centrum grauitatis totius nauis et centrum magnitudinis partis submersae in eandem rectam verticalem cadant, tum insuper efficiendum est, vt iste aequilibrii situs sit stabilis, ac viribus inclinantibus resistat. Quodsi enim nauis, cum parumper ex situ hoc aequilibrii declinetur, sese vel non restituat vel adeo subuertatur, ea nullo modo mari committi poterit, vbi continuo praesto sunt, vires vel venti vel ipsius maris, quae nauem de situ suo erecto declinant. Quamobrem circa constructionem nauium hoc maxime requiritur, vt situs aequilibrii, ad quem nauis est apta reddita, satis ingenti praeditus sit stabilitate, cuius ope nauis sine subuersionis periculo omnibus maris ac tempestatis iniuriis exponi possit. Quo enim stabilitas est maior eo minus nauis a viribus vrgentibus inclinabitur, eoque minus subuersioni erit obnoxia.

§. 193 Stabilitas autem haec, qua corpus aquae innatans in situ aequilibrii perseuerat, ortum suum trahit a viribus aquae, quibus externa carinae superficies premitur; quae vires, siquidem aequilibrium affuerit, sese destruunt, nullumque effectum ad statum mutandum exercent. At si nauis ex situ aequilibrii fuerit depulsa, tum istae aquae vi-

res nauem extra ſitum aequilibrii perſiſtere non patientur, ſed eam vel in priſtinum aequilibrii ſitum cogent, vel in alium. Quodſi igitur nauis ex ſitu aequilibrii depulſa ab aquae viribus in eundem aequilibrii ſitum reſtituatur, tum iſte ſitus ſtabilitatem habere cenſetur: e contrario autem, ſi nauis in priſtinum aequilibrii ſitum non reſtituatur, ſed in alium aequilibrii ſitum compellatur, tunc ille aequilibrii ſitus non ſtabilis ſeu labilis vocatur, in quo nauis, niſi ſumma adſit quies, permanere non poteſt. Datur etiam tertius caſus, quo nauis ex ſitu aequilibrii depulſa in eodem ſtatu perſeuerat, neque reſtituitur neque ſubuertitur, cuiusmodi aequilibrii ſitum indifferentem appellari conuenit.

§. 194. Ad ſtabilitatis quantitatem aeſtimandam in ſuperiori libro nauem ex ſitu aequilibrii, cuius ſtabilitas quaeritur, aliquantillum ſeu angulo infinite paruo inclinari poſuimus, ac momentum virium definiuimus, quae ad reſtituendam nauem tendunt. Prodiit autem eiusmodi expreſſio, quae per angulum illum infinite paruum, quo nauem ex ſitu aequilibrii inclinatam fuiſſe aſſumſimus, erat multiplicata; atque hanc ob rem illam expreſſionem per hunc angulum diuiſam elegimus ad ſtabilitatis quantitatem exprimendam. Quando itaque ſtabilitas cuiuspiam aequilibri ſitus tali expreſſione definitur, conſtabit quantum virium inclinantium momentum requiratur, ad nauem ex ſitu aequilibrii ad datum angulum inclinandam. Expreſſio enim ſtabilitatis, ſi multiplicetur per angulum illum, ad quem inclinatio fieri debet, dabit virium momentum, quibus iſta inclinatio produci poteſt. Quoniam autem angulum hunc infinite paruum poſuimus, manifeſtum eſt angulos tantum valde exiguos aſſumi debere.

§. 195. Quicquid autem ſit, quoniam hic non de-actuali inclinatione quaeſtio inſtituitur, ſed de poteſtate, qua nauis in ſitu aequilibrii conſtituta inclinationi reluctatur; expreſſio deſcripta congrue ad ſtabilitatem metiendam adhibetur. Perſpicuum enim eſt quo maior ſit iſta expreſſio, eo quoque fore maiorem ſtabilitatem, et quidem in eadem ratione; namque duorum aequilibrii ſtatuum ſtabilitates proportionales ſtatui conuenit viribus ſeu potius momentis virium, quibus aequalis inclinatio produci poteſt. Quodſi ergo expreſſio ſtabilitatis euaneſcat, id indicio erit, ſitum aequilibrii eſſe indifferentem, ſeu ita comparatum, vt facta minima inclinatione neque reſtitutio neque ſubverſio conſequatur. Sin autem expreſſio ſtabilitatis fiat negatiua, tum ſitus aequilibrii adeo erit inſtabilis ſeu labilis, atque vel minima facta inclinatione non ſolum non reſtituetur ſed etiam conuertetur, donec nauis in alium aequilibrii ſitum qui ſtabilitate praeditus ſit, fuerit reducta.

§. 196. Quoniam igitur ſtabilitas declarat, quantum datus aequilibrii ſtatus inclinationi reſiſtat, inclinatio autem infinitis modis fieri poteſt, palam eſt, ſtabilitatem abſolute definiri non poſſe, ſed directionem ſecundum quam inclinatio fieri concipitur, ſimul in computum duci debere. Pro ſingulis igitur plagis, in quas inclinatio ex ſitu aequilibrii fieri poteſt, ſtabilitatem ſeorſim determinari oportet; atque ex ſtabilitate reſpectu datae plagae cognita innoteſcet quantum nauis inclinationi ſecundum eam plagam reſiſtat. Fieri enim omnino poteſt, vt corpus aquae innatans inclinationi verſus vnam plagam magis reſiſtat, quam verſus alias, atque adeo vt datus aequilibrii ſitus in alias plagas ſit ſtabilis, qui reſpectu aliarum plagarum eſt in-

ſtabili-

ſtabilis ac labilis. Sic facile perſpicitur naues inclinationi verſus proram ſeu puppim magis reſiſtere, quam inclinationi verſus latera; ex quo cuiusque nauis ſtabilitas reſpectu prorae et puppis maior erit quam ſtabilitas reſpectu laterum. Quoties igitur quaeſtio de ſtabilitate cuiuspiam aequilibrii ſitus inueſtiganda inſtituitur ſimul plagam indicari oportet, reſpectu cuius ſtabilitas requiritur.

§. 197. Corpus autem aquae innatans de ſitu aequilibrii non declinatur, niſi quatenus circa axem horizontalem conuertitur. Quodſi enim corpus eiusmodi circa axem verticalem quemcunque conuertatur, neque portio aquae immerſa neque ſitus relatiuus centrorum grauitatis ac magnitudinis immutatur; vnde tali conuerſione ſtatus aequilibrii non turbatur. Contra vero corpus aquae inſidens circa axem horizontalem conuerti ſeu inclinari nequit, quin ſimul ſtatus aequilibrii perturbetur. Quam ob rem idea ſtabilitatis penitus figetur, ſi ſimul axis ille horizontalis indicetur, circa quem inclinationes fieri concipiantur, quibus ſtabilitas reſiſtit. Vt ergo ſtabilitas dati aequilibrii ſtatus perfecte cognoſcatur, omnes axes horizontales contemplari, et quanta ſit ſtabilitas reſpectu ſingulorum horum axium aſſignari oportebit: hoc enim pacto conſtabit, quantum nauis cuicunque inclinationi circa axem horizontalem aliquem oriundae reſiſtat.

§. 198. Si nunc hanc de ſtabilitate quaeſtionem ad naues accommodemus, inter infinitos axes horizontales, circa quos inclinatio nauis ex ſitu aequilibrii fieri poteſt, duos habebimus principales, quorum alter a puppi ad proram porrigitur, alter ad hunc eſt normalis. Priorem illum axem, qui a puppi ad proram ducitur, vocemus

longitudinalem, posteriorem latitudinalem; ex quo pro quaque naui circa stabilitatem duae *nascuntur quaestiones principales, quarum altera quaeritur, quanta sit stabilitas* respectu axis longitudinalis, altera vero quanta sit stabilitas respectu axis latitudinalis. Priore scilicet quaestione definiri oportet, quantum nauis inclinationi circa axem longitudinalem, seu quae fit ad latera nauis, resistat, posteriori vero, quantum nauis inclinationi circa axem latitudinalem, seu quae versus proram puppimue fiat, reluctetur.

§. 199. Facile autem intelligitur, si cognita fuerit stabilitas nauis respectu vtriusque axis longitudinalis scilicet ac latitudinalis, tum ex eo satis prope colligi posse stabilitatem respectu alius cuiusuis axis horizontalis. Quodsi enim constiterit quanta vi nauis cum inclinationibus versus proram ac puppim, tum etiam versus latera resistat, non difficulter aestimabitur vis, qua inclinationi in quamcunque aliam plagam resistat. Interim tamen hic facilem trademus viam, cuius ope, si cognita fuerit stabilitas respectu duorum axium horizontalium inter se normalium, stabilitas respectu cuiusuis alius axis horizontalis determinari queat. Hancobrem praecipuum negotium nostrum in hoc versabitur, vt, quaque naui proposita, eius stabilitatem respectu binorum illorum axium principalium longitudinalis ac latitudinalis definiamus, quippe quae cognitio ad stabilitatem respectu omnium omnino axium horizontalium diiudicandam sufficit. Atque hoc pacto quaestio de stabilitate, quae initio ob axes infinitos visa est infinita, nunc ad quaestionem bipartitam est reducta.

§. 200. In superiori autem libro ostensum est, dati aequilibrii status stabilitatem respectu cuiusuis axis horizontalis

talis determinari ex ſequentibus quatuor rebus. Primo ſcilicet in expreſſionem ſtabilitatis ingreditur pondus totius nauis, deinde diſtantia inter centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae, tertio volumen partis ſubmerſae, et quarto denique ſectio aquae. Harum quatuor rerum tres priores aequaliter ingrediuntur, quicunque axis, cuius reſpectu ſtabilitas deſideratur, conſideretur; atque huius axis ratio in ſola ſectione aquae habetur. Per centrum ſcilicet grauitatis ſectionis aquae duci debet recta illi axi horizontali, cuius reſpectu quaeritur ſtabilitas, parallela, atque vtrinque ad hunc axem applicatas orthogonales duci oportet, quarum omnium cuborum ſumma dabit illam quantitatem, quae in expreſſionem ſtabilitatis ingreditur.

§. 201. Ponamus igitur AEBF eſſe ſectionem aquae Tab. VIII. fig. 2. per eiusque centrum grauitatis C ductam eſſe rectam AB parallelam illi axi cuius reſpectu ſtabilitas quaeritur; ad hanc itaquae rectam tanquam axem ducantur vtrinque applicatae normales PM, pm, PN, pn, quo facto quaeri debet per integrationem valor huius expreſſionis $\int (PM^3 + PN^3) Pp$, quo cognito ſtabilitas reſpectu axis AB facile determinabitur. Scilicet ſi ponatur pondus nauis $= M$, volumen partis ſubmerſae $= V$ atque interuallum inter centrum grauitatis et centrum magnitudinis $= b$, erit ſtabilitas reſpectu axis $AB = M\left(\frac{\int (PM^3 + PN^3) Pp}{3V} \pm b\right)$, vbi ſignum $+$ ſumi debet ſi centrum grauitatis infra centrum magnitudinis cadat, contra vero ſignum $-$. Simili modo ſtabilitas reſpectu axis EF erit $= M\left(\frac{\int (Qm^3 + Ql^3) Qq}{3V} \pm b\right)$, prouti ſuperiori libro luculenter eſt oſtenſum.

§. 202. Quodſi iam in naturam harum formularum integralium diligentius inquiramus, deprehendemus formulam

lam $\int \frac{(PM^3 + PN^3) Pp}{3}$ omnino congruere cum ea, quae prodit, si singulae sectionis aquae particulae multiplicentur per quadrata distantiarum ab axe AB, haecque producta in vnam summam colligantur. Namque consideretur particula quaecunque Ww, quae posita $PW = w$ erit $= Pp.dw$, multiplicetur haec per quadratum distantiae suae PW ab axe AB hoc est per w^2, prodibit $Pp.w^2 dw$, cuius integrale vsque in M sumtum est $\frac{PM^3.Pp}{3}$: ex quo manifestum est $\int \frac{(PM^3 + PN^3) Pp}{3}$ denotari aggregatum omnium productorum, quae oriuntur, si singulae sectionis aquae particulae multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab axe AB.

§. 203. Eiusmodi autem aggregata productorum, quae oriuntur, si figurae cuiusuis singulae particulae multiplicentur per quadrata distantiarum suarum a recta quadam linea fixa, in praecedente libro appellare consueuimus momenta earum figurarum respectu lineae illius rectae fixae. Quodsi igitur sectionis aquae AEBF momentum respectu axis longitudinalis AB per centrum grauitatis C sectionis aquae ducti ponatur $= I$, atque eiusdem figurae momentum respectu axis latitudinalis EF $= K$, erit stabilitas nauis respectu axis longitudinalis $= M(\frac{I}{V} \pm b)$, ac stabilitas eiusdem nauis respectu axis latitudinalis EF $= M(\frac{K}{V} \pm b)$. Vnde ope illius calculi, quo momenta quarumcunque figurarum definire supra docuimus, facile erit stabilitatem cuiusque nauis propositae tam pro axe longitudinali quam latitudinali determinare.

§. 204. Perspicuum igitur est, si sectionis aquae non solum denter momenta respectu axium binorum longitudinalis

dinalis A B et latitudinalis E F, ſed etiam reſpectu cuiuscunque alius axis per centrum grauitatis C ſectionis aquae ducti, tum pari modo ſtabilitatem nauis reſpectu eiusdem axis aſſignari poſſe. Quoniam vero inuentio momenti reſpectu iſtiusmodi axium obliquorum plerumque fit vehementer moleſta, methodum hic indicabimus, cuius ope ex datis momentis I et K reſpectu axium longitudinalis A B et latitudinalis E F, momentum reſpectu cuiuscunque alius axis P Q per centrum grauitatis C ſectionis aquae citra calculum definiri queat: ita vt huius compendii beneficio ſufficiat tantum bina momenta ſectionis aquae reſpectu axium A B et E F determinaſſe, ad nauis ſtabilitatem reſpectu axis cuiuscunque definiendam.

§. 205. Ponatur anguli ACP, quem axis propoſitus PQ cum axe longitudinali AB conſtituit, ſinus $= m$, coſinus $= n$ exiſtente ſinu toto $= 1$, ita vt ſit $m^2 + n^2 = 1$. Iam conſideretur ſectionis aquae particula quaecunque w, ex qua cum ad axem AB tum ad PQ perpendiculares ducantur wp et wq, dicaturque $Cp = x$; $pw = y$; $Cq = t$; et $wq = u$, erit $tt + uu = xx + yy$; $\frac{xu + yt}{xx + yy} = m$; et $\frac{xt - yu}{xx + yy} = n$. Ex his reperitur $u = mx - ny$ et $t = nx + my$. Momentum igitur ſectionis aquae reſpectu axis PQ erit $= \int w.\, u^2 = \int w (mx - ny)^2 = m^2 \int xx.w + n^2 \int yy.w - 2mn \int xy.w$. Simul vero etiam obtinebitur eiusdem ſectionis aquae momentum reſpectu axis RS, normalis ad PQ quippe quod eſt $= \int w.\, t^2 = n^2 \int x^2.w + m^2 \int y^2.w + 2mn \int xy.w$. Tab. VIII. fig. 3.

§. 206. Quoniam vero momenta ſectionis aquae reſpectu axium longitudinalis ac latitudinalis dantur, erit $\int y^2.w = I$ et $\int x^2.w = K$. Vnde eiusdem ſectionis aquae mo-

momentum respectu axis PQ erit $= n^2.I + m^2.K - 2mn\int xy.w$, momentum vero respectu axis ad hunc normalis RS erit $= m^2 I + n^2.K + 2mn\int yx.w$. Summa igitur binorum momentorum respectu duorum axium inter se normalium erit $= I + K$ ob $m^2 + n^2 = 1$. Quare pro eadem sectione aquae summa duorum momentorum respectu axium inter se normalium semper est constans, atque ea summa perpetuo aequalis aggregato omnium productorum, quae oriuntur si singulae superficiei particulae w. multiplicentur per quadrata distantiarum suarum wC a centro grauitatis C, per quod bini illi axes transeunt. Quodsi itaque habeatur istud aggregatum ac praeterea momentum respectu cuiusuis axis, statim inde innotescet momentum respectu axis ad illum normalis.

§. 207. Cum igitur momentum respectu axis PQ sit $= n^2.I + m^2.K - 2mn\int yx.w$, id ex datis momentis I et K assignari poterit, dummodo constaret valor formulae $\int yxw$. At quoniam omnis sectio aquae ita est comparata, vt axi longitudinali AB in duas portiones similes et aequales diuidatur, quatuor portionum ACE, ACF BCE et BCF, in quas sectio aquae binis axibus principalibus AB et EF diuiditur, tam binae priores ACE et ACF quam posteriores BCE et BCF inter se erunt similes et aequales. Hinc igitur valor ipsius $\int yx.w$, qui ex portione ACF oritur aequalis erit et negatiuus illius valoris, quem portio ACE praebet; ex quo $\int yx.w$ pro parte EAF euanescet; similique modo valor ipsius $\int yx.w$, qui respondet parti posteriori EBF erit $= 0$. Cum ergo totalis valor formulae $\int yx.w$ euanescat, erit momentum sectionis aquae respectu axis PQ $= n^2.I +$

$m^2.K$,

$m^2.K$, ac momentum reſpectu axis $RS = m^2.I + n^2.K$; ex quo datis momentis reſpectu axium principalium AB et EF, facili negotio ſine calculo momentum reſpectu cuiuscunque axis, per centrum grauitatis C tranſeuntis, determinari poterit.

§. 208. Quia eſt $nn = 1 - mm$, erit momentum ſectionis aquae reſpectu axis $PQ = I - m^2 (I - K)$, vbi m denotat ſinum anguli ACP, quem axis PQ cum axe longitudinali AB conſtituit. Quod ſi ergo angulus ACP euaneſcat, ſeu axis PQ in AB incidat, prodibit momentum reſpectu eius $= I$ ob $m = 0$, id quod eſt momentum reſpectu axis AB; at ſi axis PQ incidat in latitudinalem EF, ob $m = 1$, fiet momentum eius reſpectu $= K$. Ponamus autem angulum ACP eſſe ſemirectum, ſeu axem PQ medium interiacere inter axes principales AB et EF, erit $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ atque momentum erit $= \frac{I + K}{2}$: quod ergo eſt medium arithmeticum inter momenta reſpectu axium principalium, ac propterea aequale momento reſpectu axis RS normalis ad axem PQ, id quod ipſa rei natura indicat, cum axis RS hoc caſu ſimiliter ſit poſitus reſpectu axium principalium, ac axis PQ.

§. 209. Quoniam in omnibus ſectionibus aquae, quae occurrere ſolent momentum reſpectu axis latitudinalis EF maius eſt, momento reſpectu axis longitudinalis AB ſeu $K > I$, erit momentum reſpectu axis obliqui $PQ = I + m^2 (K - I)$. Quare momentum reſpectu axis obliqui PQ maius eſt, quam momentum reſpectu axis longitudinalis AB; atque hoc momentum continuo creſcet, quoad axis PQ in latitudinalem EF incidat. In omni igitur naui momentum ſectionis aquae reſpectu axis longitudinalis

omnium est minimum, momentum vero respectu axis latitudinalis omnium maximum. Quodsi ergo nauis habeat stabilitatem respectu axium binorum principalium, ea respectu omnium omnino axium firmiter in situ aequilibrii persistet, ex quo sufficit ad stabilitatem nauibus conciliandam ad binos tantum axes principales attendere, eorumque respectu stabilitatem satis magnam efficere, quippe quo reliquis axibus omnibus simul erit consultum.

§. 210. Si igitur momentum sectionis aquae respectu axis latitudinalis aequale fuerit momento respectu axis longitudinalis, tum eidem momento aequalia erunt momenta respectu omnium axium obliquorum. Quare si nauis eiusmodi habeat figuram, vt respectu binorum axium principalium aeque sit stabilis, tum eandem stabilitatem habebit
Tab. VIII. fig. 4. respectu alius cuiusuis axis horizontalis. Si ergo sectio aquae fuerit quadratum AEBF, quia momenta eius respectu axium AB et EF inter se sunt aequalia, momenta quoque respectu omnium omnino axium per C transeuntium erunt aequalia, hincque corpus aquae innatans, cuius sectio aquae est quadratum, secundum omnes plagas aeque erit stabile, atque aequali vi inclinationibus resistet. Eadem vero proprietas locum habebit si sectio aquae fuerit quaecunque alia figura, dummodo ea ita sit comparata, vt eius momenta respectu binorum axium principalium sint inter se aequalia.

§. 211. Cum igitur ad iudicium de stabilitate cuiusque nauis respectu cuiuscunque axis horizontalis ferendum sufficiat sectionis aquae momenta cum respectu axis longitudinalis tum latitudinalis determinasse, ante omnia necesse erit figuras aliquot instar sectionis aquae considerare,

pro

pro iisque momenta reſpectu axium principalium analytice definire. Quodſi enim plurium figurarum momenta fuerint cognita, ex iis aliarum quarumcunque figurarum, quae alias difficulter ad calculum reuocentur, momenta ſatis prope, id quod ad vſum practicum ſufficit, colligi poterunt. Calculo quidem hic vtemur eodem, quo in Tab. VIII. fig. 2. ſuperiori libro ſumus vſi; ſcilicet ſectionem aquae in quatuor portiones ACE, ACF, BCE, et BCF diuiſam contemplabimur per axes principales AB et EF; calculumque pro ſingulis portionibus ſeorſim inſtituemus. Sic ſi pro quadrante ACE vocetur $CP = x$, $PM = y$, dabit $\frac{1}{3}\int y^3 dx$ momentum huius quadrantis reſpectu axis AB, ac $\int y x^2 dx$ momentum reſpectu axis EF. Tantum igitur opus eſt, vt hae expreſſiones pro ſingulis quadrantibus quaerantur atque in vnam ſummam colligantur; vbi quidem hoc compendium affert, quod momenta cum quadrantum ACE et ACF, tum quadrantum BCE et BCF ſint aequalia, ex quo calculus duplo fit curtior.

§. 212. Sit igitur primum ſectio aquae quadratum AEBF, per cuius centrum grauitatis C ducti ſint axes Tab. VIII. fig. 4. principales longitudinalis AB et latitudinalis EF. ponaturque $AC = a$, erit poſitis $Cp = x$, $pm = y$, $y = a$ vnde $\int y^3 dx = a^4$ et $\frac{1}{3}\int y^3 dx = \frac{a^4}{3}$; atque $\int y x^2 dx = \frac{ax^3}{3} = \frac{a^4}{3}$. Quam ob rem momentum reſpectu axis AB erit $= \frac{4a^4}{3} = \frac{AB^4}{12}$, cui aequale eſt momentum reſpectu axis latitudinalis EF, et reſpectu cuiuscunque alius axis PQ per centrum grauitatis C ducti. Quodſi ergo aream huius ſectionis aquae ponamus $= 2D$, quam deſignationem ſemper ad aream cuiusuis ſectionis aquae deſignandam adhibebimus,

 erit

erit $AB^2 = 2D$; hincque ſtabilitas reſpectu cuiusuis axis per C tranſeuntis erit $= \frac{AB^2.D}{6} =$. Commodum autem erit in ſequentibus conſiderationem areae ſectionis aquae in expreſſionem momenti inducere, quo ea facilius per volumen partis ſubmerſae, quod pariter per aream ſectionis aquae in rectam quandam ductae exprimere conuenit, diuidi queat.

Tab. VIII. fig. 5. §. 213. Sit nunc ſectio aquae parallelogrammum rectangulum AEBF, cuius axis longitudinalis ſit AB, latitudinalis EF. Ponatur $AC = a$, $CE = b$, erit $AB = 2a$, $EF = 2b$ et area ſectionis aquae $2D = 4ab$. Poſito ergo $CP = x$ erit $PM = y = b$, atque $\int y^3 dx = b^3 x$; vnde momentum reſpectu axis longitudinalis AB erit $= \frac{4ab^3}{3} = \frac{2D.bb}{3} = \frac{EF^2.D}{6}$. Pari vero ratione prodibit momentum reſpectu axis latitudinalis $= \frac{AB^2.D}{6}$; ex quo momentum huius ſectionis aquae reſpectu axis longitudinalis AB ſe habebit ad momentum axis latitudinalis EF inuerſe vt quadratum axis longitudinalis AB ad quadratum axis latitudinalis EF.

Tab. IX. fig. 1. §. 214. Sit porro ſectio aquae rhombus AEBF cuius diagonales AB et EF repraeſentent axes principales, illa AB ſcilicet longitudinalem haec EF latitudinalem. Ponatur $AC = a$, $CE = b$, erit $AB = 2a$, $EF = 2b$ et area $2D = 2ab$. Quodſi ergo ponatur $AP = x$ et $PM = y$ erit $y = \frac{bx}{a}$ et $\int y^3 dx = \frac{b^3}{a^3} \int x^3 dx = \frac{b^3 x^4}{4a^3}$. Poſito itaque $x = a$ prodibit momentum reſpectu axis longitudinalis $AB = \frac{ab^3}{3} = \frac{D.bb}{3} = \frac{EF^2.D}{12}$; ex quo momentum reſpectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{AB^2.D}{12}$; quae expreſſiones a praecedentibus, quae pro parallelogrammo

grammo rectangulo prodierunt, hoc tantum differunt, quod ibi diuisum erat per 6, hic vero per 12. Manentibus igitur eadem longitudine ac latitudine, momenta parallelogrammi rectanguli duplo sunt maiora quam rhombi.

§. 215. Accipiatur pro sectione aquae trapezium Ae Tab. IX. Bf constans ex duabus triangulis aequicruris eAf et eBf, fig. 2. quae figura hoc discrepat a rhombo, quod hic triangula eAf et eBf, sint inaequalia. Manebit igitur quidem AB axis longitudinalis, at ef, quia per centrum grauitatis figurae non transit, non erit axis latitudinalis. Ad veram igitur positionem axis latitudinalis EF inueniendam, determinari oportet centrum grauitatis figurae C; id quod ita reperietur. Natura centri grauitatis hanc praebet aequationem $AB.ce.Cb = Bc.ce.\frac{1}{3}Bc - Ac.ce.\frac{1}{3}Ac$, ex qua oritur $Cc = \frac{ce(Bc^2 - Ac^2)}{3AB.ce} = \frac{Bc - Ac}{3}$. Ducta itaque per punctum C recta EF parallela ipsi ef, erit verus axis latitudinalis cuius respectu momentum huius figurae definiri oportet.

§. 216. Quaeramus primum momentum huius trapezii respectu axis longitudinalis AB, ponaturque $Ac = a$; $ce = b$; et $Bc = c$. Dicta itaque $AP = x$ erit $PM = \frac{bx}{a} = y$, et $\int y^3 dx = \frac{ab^3}{4}$. Trianguli igitur Ace momentum respectu axis AB erit $= \frac{ab^3}{12}$, trianguli vero $Bce = \frac{cb^3}{12}$, vnde totius figurae momentum respectu axis AB erit $= \frac{ab^3 + cb^3}{6} = \frac{Dbb}{3} = \frac{ef^2.D}{12}$. Quod si vero momentum figurae respectu axis ef quaeratur, quia huius respectu momentum trianguli Ace est $= \frac{a^3b}{12}$, et trianguli $Bce = \frac{c^3b}{12}$, prodiret id $= \frac{a^3b + c^3b}{6} = \frac{D(aa - ac + cc)}{3}$, posito $2D$ pro area totius sectionis aquae.

Tab. IX. fig. 3. §. 217. Ex hac ipsa autem expressione momenti figurae respectu axis ef definiri poterit sine peculiari calculo momentum respectu axis latitudinalis veri EF. Namque si figurae cuiuscunque AEBF detur momentum respectu axis ef per eius centrum grauitatis non transeuntis, quod sit $= L$, ex eo definiri poterit momentum respectu axis EF illi axi ef paralleli ac per centrum grauitatis C transeuntis. Consideretur enim figurae particula quaecunque w, erit momentum figurae respectu axis ef quod datum ponitur scilicet $L = \int w . wn^2$; at momentum respectu axis EF quod quaeritur $= \int w . w N^2$. Est vero $\int w . wn^2 = \int w . w N^2 - 2 Nn \int w . w N + Nn^2 \int w$. Quoniam autem axis EF per centrum grauitatis figurae C transire ponitur, valor huius expressionis $\int w . w N$ vtrinque sese destruit fitque $= 0$, atque $\int w$ abit in aream figurae $= 2D$. Quocirca momentum figurae respectu axis EF erit $= L - 2D . Nn^2 = L - 2D . Cc^2$.

Tab. IX. fig. 2. §. 218. Cum igitur momentum sectionis aquae $Ae Bf$ respectu axis ef inuentum sit $= \frac{D(aa - ac + cc}{3}$, verus autem axis latitudinalis EF distet ab axe ef interuallo $Cb = \frac{c-a}{3}$; obtinebitur per regulam modo inuentam momentum figurae respectu axis $EF = \frac{D(aa - ac + cc)}{3} - \frac{2D(c-a)^2}{9} = \frac{D(aa + ac + cc)}{9} = \frac{D(a+c)^2}{12} + \frac{D(c-a)^2}{36} = \frac{D . AB^2}{12} + \frac{D . Cc^2}{4}$. Maius igitur est momentum huius figurae respectu axis latitudinalis EF, quam si esset $Ac = Bc$. In huiusmodi ergo figuris quadrilateris, quae eandem habent longitudinem AB eandemque latitudinem ef, momentum respectu axis latitudinalis eo erit maius, quo magis fuerint partes Ac et Bc inter se inaequales.

§. 219.

§. 219. Sit nunc ſectio aquae ellipſis AEBF, cuius axis maior AB axem longitudinalem, minor vero EF latitudinalem exhibeat. Sit $AC = BC = a$, $CE = CF = b$, $CP = x$ et $PM = y$, erit $y = b\sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})}$. Hinc itaque momentum quadrantis ACE reſpectu axis latitudinalis CE erit $= \int bxxdx\sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})} = \frac{a^2 b}{4}\int dx\sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})}$. At $b\int dx\sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})}$ exprimit aream quadrantis elliptici $ACE = \frac{D}{2}$, ex quo momentum quadrantis reſpectu axis EF erit $= \frac{a^2 D}{8}$, totiusque ellipſis $= \frac{AB^2 . D}{8}$. Hinc ſine vlteriori calculo conſtat ellipſis momentum reſpectu axis longitudinalis AB fore $= \frac{EF^2 . D}{8}$; quae formulae iterum ſimiles ſunt iis, quae pro parallelogrammo rectangulo ac rhombo prodierunt, excepto ſolo denominatore, qui pro parallelogrammo rectangulo erat 6, pro rhombo 12, nunc vero pro ellipſi, 8. Tab. IX. fig. 3.

§. 220. Quoniam ſupra circa figuras quadrilateras vidimus, eas quae partibus diſſimilibus circa axem latitudinalem ſint praeditae, maiora habere momenta, quam eas, quae conſtent partibus ſimilibus, ſeu rhombos ceteris paribus; operae pretium erit hic inueſtigare vtrum idem in figuris curuilineis eueniat. Sit igitur propoſita pro ſectione aquae figura AEBF, quae cum praecedente ellipſi communem habeat axem longitudinalem AB, et maximam latitudinem ef, itemque totam aream, ſed in qua maxima latitudo ef axem AB non ſecet bifariam ſed inaequaliter in c, exiſtente O puncto axis longitudinalis medio. Huius ergo figurae centrum grauitatis cadet in punctum C, eritque EF axis latitudinalis cuius reſpectu momentum figurae determinari oportet. Ponatur ergo $AO = BO = a$; $ce = cf = b$, atque $Oc = c$. Tab. IX. fig. 4.

§. 221. Huiusmodi autem curuae, quae aequalem habeant aream ellipsi, cuius axes sunt AB et ef innumerabiles exhiberi possunt; posito enim $AP = x$, $PM = y$, haec aequatio $x = a + Y \pm a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$, vbi Y denotat functionem eiusmodi ipsius y, quae euanescat posito $y = o$, infinitas curuas istius proprietatis praebebit. Posito namque $y = o$, fit x vel $= o$ vel $= 2a$, ex quo axis transuersus huius curuae erit $AB = 2a$. Deinde maxima huius curuae latitudo est $= b$, respondetque abscissae $x = a + Y$, posito in Y loco y valore b, ex quo maxima applicata ce non in punctum axis medium O cadet. Denique vero vt curua haec ad vtramque partem axis AB duas habeat partes AEB et AFB similes et aequales, necesse est vt Y sit functio par ipsius y. Hancobrem ponamus $Y = \frac{-cyy}{bb}$, quo fiat interuallum $Oc = c$ vti assumsimus.

§. 222. Primum autem dico, quamcunque Y significet functionem ipsius y, dummodo non ambiguam cuiusmodi sunt eae quae signum radicale $\sqrt{}$ inuoluunt, aream huius curuae AEBF aequalem esse areae ellipsis, cuius axes sint $2a$ et $2b$. Cum enim sit $x = a + Y \pm a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$, valor $x = a + Y - a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$ valebit pro portione Ace, alter autem valor $x = a + Y + a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb}})$ pro portione Bce. Erit itaque portionis Ace area $= \int y\,dx = \int y\,dY + \frac{a}{b} \int \frac{yy\,dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$, si post integrale ita acceptum, vt euanescat posito $y = o$, ponatur $y = b$. Contra vero portionis Bce area erit $= \int y\,dY - \frac{a}{b} \int \frac{yy\,dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$ si post integrale ita acceptum vt euanescat posito $y = b$ ponatur $y = o$. Quamobrem area AEB erit $= \frac{2a}{b} \int \frac{yy\,dy}{\sqrt{(bb - yy)}} = D$, quippe quae expressio dat aream semiellipseos.

§. 223.

§. 223. Deinde dico huius figurae momentum respectu axis longitudinalis AB idem prodire, quicquid sit functio Y, seu aequale esse momento ellipsis respectu axis AB, posito enim $Y = o$ curua nostra abit in ellipsin. Est enim momentum portionis Ace respectu axis $AB = \frac{1}{3}\int y^3 dx = \frac{1}{3}\int y^3 dY + \frac{a}{3b}\int\frac{y^4 dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, si post integrale ita sumtum vt euanescat posito $y = o$, fiat $y = b$. Portionis vero Bce respectu eiusdem axis momentum est $= \frac{1}{3}\int y^3 dY - \frac{a}{3b}\int\frac{y^4 dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, si post integrationem institutam, vt fiat integrale $= o$ posito $y = b$, ponatur $y = o$. Areae igitur AEB momentum respectu axis AB erit $= \frac{2a}{3b}\int\frac{y^4 dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, in quo quantitas Y non inest. Erit igitur totius figurae plane vt ellipsis momentum respectu axis longitudinalis $= \frac{Dbb}{2} = \frac{ef^2 D}{b}$.

§. 224. Vt nunc etiam momentum huius figurae respectu axis latitudinalis EF definiamus, determinemus id prius respectu axis cuiusdam illi paralleli, puta respectu rectae aa in A ad AB normalis: cognito enim hoc momento facile erit momentum respectu axis EF assignare, dummodo distantia AC fuerit definita. Portionis quidem Ace momentum respectu axis Aa est $= \int y\left(d.Y + \frac{aydy}{b\sqrt{(bb-yy)}}\right)\left((a+Y)^2 - \frac{2a(a+Y)}{b}\sqrt{(bb-yy)} + aa - \frac{aayy}{bb}\right) = \int y(a+Y)^2 dY - \frac{2a}{b}\int y\,dY(a+Y)\sqrt{(bb-yy)} + \frac{aa}{bb}\int y\,dY(bb-yy) + \frac{a}{b}\int\frac{yydy(a+Y)^2}{\sqrt{(bb-yy)}} - \frac{2aa}{bb}\int yydy(a+Y) + \frac{a^3}{b^3}\int yydy\sqrt{(bb-yy)}$, integralibus ita sumtis vt euanescant posito $y = o$ tumque posito $y = b$. Portionis vero Bce momentum respectu axis Aa est $= \int y(a+Y)^2 dY + \frac{2a}{b}\int y\,dY(a+Y)\sqrt{(bb-yy)} + \frac{aa}{bb}\int y\,dY(bb-yy) - \frac{a}{b}\int\frac{yydy(a+Y)^2}{\sqrt{(bb-yy)}} - \frac{2aa}{bb}\int yydy(a+Y) - \frac{a^3}{b^3}\int yydy\sqrt{(bb-yy)}$ integralibus contrario modo acceptis.

§. 225. Ex his igitur orietur areae AEB momentum respectu axis $aAa = -\frac{4a}{b}\int y\,dY(a+Y)\sqrt{(bb-yy)} + \frac{2a}{b}\int\frac{yydy(a+Y)^2}{\sqrt{(bb-yy)}} + \frac{2a^3}{b^3}\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{2a^3}{b^3}\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} - \frac{2a}{b}\int y\,d.(a+Y)^2\sqrt{(bb-yy)} = \frac{2a^3}{b^3}\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} + \frac{2a}{b}\int(a+Y)^2 dy\sqrt{(bb-yy)}$; propterea quod $y(a+Y)^2\sqrt{(bb-yy)}$ fit $=o$, tam si $y=o$, quam si $y=b$. Est vero posito $y=b$ post integrationem $\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{bb}{4}\int\frac{yydy}{\sqrt{(bb-yy)}} = \frac{b^3D}{8a}$. (§. 222.) Ex quo momentum areae AEB respectu axis aAa est $= \frac{aaD}{4} + \frac{2a}{b}\int(a+Y)^2 dy\sqrt{(bb-yy)}$; atque respectu eiusdem axis momentum totius figurae $= \frac{aaD}{2} + \frac{4a}{b}\int(a+Y)^2 dy\sqrt{(bb-yy)}$, sumta parte AFB simili et aequali parti AEB.

§. 226. Ponamus nunc centrum grauitatis totius figurae cadere in C erit $DAC = \int yx\,dx$ integrali per totam aream AEB extenso. Quodsi ergo ista formula pro vtraque portione Ace et Bce seorsim exprimatur, prodibit $D.AC = \frac{2a}{b}\int\frac{y^2dy(a+Y)}{\sqrt{(bb-yy)}} - \frac{2a}{b}\int y\,dY\sqrt{(bb-yy)} = -\frac{2a}{b}\int y\,d.(a+Y)\sqrt{(bb-yy)} = \frac{2a}{b}\int(a+Y)dy\sqrt{(bb-yy)}$, vnde obtinebitur $AC = \frac{2a}{bD}\int(a+Y)dy\sqrt{(bb-yy)}$. Consequenter, si per centrum grauitatis C axis latitudinalis EF ducatur, erit momentum totius figurae eius respectu $= \frac{aaD}{2} + \frac{4a}{b}\int(a+Y)^2 dy\sqrt{(bb-yy)} - \frac{8aa}{bbD}\left(\int(a+Y)dy\sqrt{(bb-yy)}\right)^2$. Quoties nunc est Y functio par ipsius y, formulae hae integrales reduci poterunt ad hanc $\int\frac{yydy}{\sqrt{(bb-yy)}} = \frac{bD}{2a}$ seu hanc $\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{b^3D}{8a}$, siue etiam ad hanc $\int dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{bD}{2a}$.

§. 227. Ponamus esse $Y = \frac{-cyy}{bb}$, seu $x = a\frac{-cyy}{bb} \pm \frac{a}{b}\sqrt{(bb-yy)}$, ex qua fit $Oc=c$ vti assumsimus, erit

$\int(a$

$\int(a+Y)^2 dy\sqrt{(bb-yy)} = a^2\int dy\sqrt{(bb-yy)} - \frac{2ac}{bb}\int yy\,dy \sqrt{(bb-yy)} + \frac{cc}{b^4}\int y^4 dy\sqrt{(bb-yy)}$. Verum est $\int dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{bD}{2a}$; $\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{b^3 D}{8a}$; et $\int y^4 dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{b^5 D}{16a}$; ideoque $\int(a+Y)^2 dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{abD}{2} - \frac{bcD}{4} + \frac{bccD}{16a} = \frac{bD}{16a}(8aa-4ac+cc)$. Simili modo erit $\int(a+Y)dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{bD}{2} - \frac{bcD}{8a} = \frac{bD}{8a}(4a-c)$, et $AC = a - \frac{c}{4}$ hincque tandem momentum totius figurae AEBF respectu axis $EF = \frac{aaD}{2} + \frac{ccD}{8} = \frac{AB^2.D}{8} + \frac{cO^2.D}{8}$.

§. 228. Confirmatur igitur in his figuris, quod supra in trapeziis obseruauimus, scilicet momentum sectionis aquae respectu axis latitudinalis EF maius fieri, quo magis latitudo maxima ef a puncto axis AB medio C distet, ceteris paribus. Aequatio autem assumta $x = a - \frac{cyy}{bb} + \frac{a}{b}\sqrt{(bb-yy)}$ non permittit, vt capiatur $c > \frac{1}{2}a$, alias enim curua vltra rectam aa excurreret, id quod non conuenit figuris, quae sectionis aquae vicem tenere debent. Quodsi autem ponatur $c = \frac{1}{2}a$ seu $Oc = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{4}AB$, prodibit momentum sectionis aquae respectu axis latitudinalis $= \frac{AB^2.D}{8} + \frac{AB^2.D}{128}$. Tanta ergo maximae latitudinis cf remotione a medio puncto longitudinis O, momentum respectu axis latitudinalis sui parte decima sexta augetur.

§ 229. Consideremus nunc alias curuas latius patentes, in quibus praecedentes contineantur, sitque sectio aquae AEBF composita ex duabus partibus AEB et AFB similibus et aequalibus, siue eae curuam continuam constituant siue secus; deinde quaelibet semissis constet ex duabus portionibus applicata ef a se inuicem disiunctis, quae pariter, vtrum sint continuae an non, nihil interest. Manentibus scilicet $AO = Bo = a$, $ce = cf = b$, $AP = x$,

PM$=y$, exprimat portionis Ace naturam haec aequatio $x=a+Y-a\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa=$AP, naturam vero portionis Bce haec aequatio $x=a+Y+a\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa=Ap$, erit ergo M$m=$ $2a\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$, vnde area AEB prodibit $=2a\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa=$D integrali ita assumto vt euanescat posito $y=o$, tumque facto $y=b$. Area itaque manebit eadem, quaecunque functio pro Y substituatur.

§. 230. Momentum huius figurae respectu axis longitudinalis AB facile determinabitur, cum enim sit M$m=$ $2a\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$, erit momentum respectu axis AB $=2a\int yy\,dy$ $\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$, quod pariter a valore functionis Y non pendet. Ad momentum autem huius figurae respectu axis latitudinalis EF, qui per centrum grauitatis figurae C est ductus determinandum, quaeratur primum momentum respectu axis normalis ad AB et per eius punctum medium O ducti. Quia nunc est PO$=-Y+a\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$ et pO$=$ $Y+a\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$, erit momentum respectu huius axis $=$ $\frac{2n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1}+2a\int Y^2 dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$, ex quo totius figurae momentum respectu axis ipsi EF paralleli et per O ducti erit $=\frac{4n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1}+4a\int Y^2 dy$ $\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^\varkappa$.

§. 231.

§. 231. Oportebit iam locum centri grauitatis huius figurae C definire, pro quo natura centri grauitatis praebebit hanc aequationem $D.CO = 2a\int y\,dY\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} - \frac{2n\varkappa a}{b^n}\int y^n Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa-1} = -2a\int Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$ ex qua fit $CO = \frac{-2a\int Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}}{D}$. Quocirca momentum totius figurae respectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{4n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} + 4a\int Y^2 dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} - \frac{8aa\left(\int Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}\right)^2}{D}$.

Quod si nunc pro Y accipiatur eiusmodi functio ipsius y, vt sit $Y = \alpha y^n + \beta y^{2n} + \gamma y^{3n} +$ etc. et $\varkappa$ denotet vel numerum integrum vel fractum, cuius denominator sit 2, integratio singularum harum formularum reduci poterit ad eam qua area exprimitur, scilicet $\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{D}{2a}$.

§. 232. Sit primum antequam pro $\varkappa$ valores definitos accipiamus, $Y = \frac{-cy^n}{b^n}$, vt fiat $Ac = a-c$ et $Oc = c$, erit $\int Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = -\frac{c}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{-c}{n(\varkappa+1)+1}\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{-cD}{2a(n(\varkappa+1)+1)}$, atque $\int Y^2 dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{cc}{b^{2n}}\int y^{2n} dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{(n+1)cc}{(n(\varkappa+1)+1)(n(\varkappa+2)+1)}\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{(n+1)ccD}{2a(n(\varkappa+1)+1)(n(\varkappa+2)+1)}$. Quocirca momentum figurae propositae respectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{4n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} +$

$$\frac{2(n+1)ccD}{(n(\varkappa+1)+1)(n(\varkappa+2)+1)} - \frac{2ccD}{(n(\varkappa+1)+1)^2} = \frac{4n\varkappa a^3}{b^n}$$

$$\int y^n dy \left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} + \frac{2nn(\varkappa+1)ccD}{(n(\varkappa+1)+1)^2(n(\varkappa+2)+1)}$$: vnde

iterum intelligitur hoc momentum maius esse, quo maius fuerit interuallum c inter punctum axis longitudinalis medium O et latitudinem maximam ef.

§. 233. Quoniam vero est $\frac{\int y^n dy}{b^n}\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} = \frac{1}{1+3n\varkappa}$ $\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1}$, ponatur $\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} = N\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$ $= \frac{ND}{2a}$ erit momentum respectu axis EF $= \frac{2n\varkappa a^2 ND}{1+3n\varkappa}$ $+ \frac{2nn(\varkappa+1)ccD}{(n(\varkappa+1)+1)^2(n(\varkappa+2)+1)}$. Valores autem ipsius N pro variis ipsius $\varkappa$ valoribus ita se habent

$\varkappa=\frac{1}{2}$	$N=1$	$\varkappa=\frac{5}{2}$	$N=\frac{7n\cdot 6n\cdot 11n\cdot 13n}{(2+7n)(2+9n)(2+11n)(2+13n)}$
$\varkappa=1$	$N=\frac{4n}{2+4n}$	$\varkappa=3$	$N=\frac{8n\cdot 10n\cdot 12n\cdot 14n\cdot 16n}{(2+8n)(2+10n)(2+12n)(2+14n)(2+16n)}$
$\varkappa=\frac{3}{2}$	$N=\frac{5n\cdot 7n}{(2+5n)(2+7n)}$		etc.
$\varkappa=2$	$N=\frac{6n\cdot 8n\cdot 10n}{(2+6n)(2+8n)(2+10)}$		

§. 234. Ponamus esse $c=0$, quia si hoc casu momentum respectu axis EF fuerit cognitum, ex eo idem momentum pro valore quocunque ipsius c inueniri potest. Erit autem momentum hoc pro variis ipsius $\varkappa$ valoribus ita comparatum vt tabula apposita indicat.

si	Momentum respectu axis EF
$\varkappa=\frac{1}{2}$	$2a^2D.\frac{n}{2+3n}$
$\varkappa=1$	$2a^2D.\frac{2n.\ 4n}{(2+4n)(2+6n)}$
$\varkappa=\frac{3}{2}$	$2a^2D.\frac{3n.\ 5n.\ 7n}{(2+5n)(2+7n)(2+9n)}$
$\varkappa=2$	$2a^2D.\frac{4n.\ 6n.\ 8n.\ 10n}{(2+6n)(2+8n)(2+10n)(2+12n)}$
$\varkappa=\frac{5}{2}$	$2a^2D.\frac{5n.\ 7n.\ 9n.\ 11n.\ 13n}{(2+7n)(2+9n)(2+11n)(2+13n)(2+15n)}$
$\varkappa=3$	$2a^2D.\frac{6n.\ 8n.\ 10n.\ 12n.\ 14n.\ 16n}{(2+8n)(2+10n)(2+12n)(2+14n)(2+16n)(2+18n)}$

§. 235.

§. 235. Si pro his curuis ponatur $n = 1$, tum anguli, quos curua in A et B cum axe AB constituit erunt obliqui, sin autem $n < 1$ tum hi anguli euanescent, hisque igitur casibus curua puncta habebit flexus contrarii, ideoque ad sectionem aquae repraesentandam non erit idonea. Minimus igitur valor, qui litterae n tribui poterit erit vnitas, hocque casu capacitas ceteris paribus erit minima: crescente autem littera n, crescet capacitas figurae, donec, si fiat n infinitum, figura abeat in parallelogrammum rectangulum, cuius momentum respectu axis latitudinalis erit $= \frac{2a^2D}{3} = \frac{AB^2D}{6}$, id quod accidit, quicunque numerus loco $\varkappa$ substituatur, dummodo sit affirmatiuus; negatiuos enim valores substituere non licet, eo quod curvae tum non claudantur, sed in infinitum extendantur.

§. 236. Deinde etiam ad praesens institutum $\varkappa$ vnitate maius accipi non potest; posito enim $\varkappa > I$ tum curua in e et f habebit cuspides ac tangentes ad AB normales, cuiusmodi figurae nauibus non conueniunt. Quodsi autem sit $\varkappa = I$ anguli ad e et f erunt acuti, hocque casu continetur figura rectilinea quadrilatera quam §. 215. considerauimus. At si ponatur $\varkappa < I$ tum curuae in e et f habebunt tangentes axi AB parallelas, cuiusmodi figurae sectioni aquae optime conueniunt. Ponamus igitur $\varkappa = I$, et $n = I$ prodibit momentum respectu axis EF $= \frac{2a^2D}{6} = \frac{AB^2.D}{12}$, qui est casus rhombi: sin $n = 2$ fit hoc momentum $= \frac{16a^2D}{35} = \frac{4AB^2.D}{35}$, id quod iam multo maius est quam illud. Positis vero $\varkappa = \frac{1}{2}$ et $n = 1$ fit hoc momentum $= \frac{2a^2D}{5} = \frac{AB^2 D}{10}$, at si $n = 2$ fit id $= \frac{a^2D}{2} = \frac{AB^2.D}{8}$, qui est casus pro ellipsi.

§. 237.

§. 237. Exempla haec ſufficere poſſunt ad momenta cuiusuis ſectionis aquae propoſitae proxime aeſtimanda. Si enim vt hactenus AB deſignet axem longitudinalem EF latitudinalem, et D ſemiſſem areae ſectionis aquae, erit momentum reſpectu axis longitudinalis $AB = \frac{EF^2 \cdot D}{\mu}$, ac momentum reſpectu axis latitudinalis $EF = \frac{AB^2 \cdot D}{\mu}$, vbi μ eſt numerus inter limites 6 et 12 contentus. Valorem autem ipſum numeri μ ex hoc aeſtimari licebit, quod, ſi ſectio aquae ſit rectangulum, fiat $\mu = 6$, ſin rhombus, $\mu = 12$; qui ſunt caſus extremi: deinde etiam conſtat ſi ſectio aquae fuerit ellipſis fore $\mu = 8$; et, ſi ea fuerit parabola axem in axe latitudinali poſitum habens, erit pro momento reſpectu axis longitudinalis $\mu = \frac{35}{4}$ at reſpectu axis latitudinalis erit $\mu = 10$. Provt igitur figura propoſita ad aliquem horum quatuor caſuum proxime accedit, ita valorem litterae μ vero proxime definire licebit. Denique ſi ſectionis aquae ſemiſſes proram puppimque ſpectantes inter ſe fuerint inaequales, hac ipſa inaequalitate momentum reſpectu axis latitudinalis augebitur.

§. 238. Expoſitis igitur his, quae ad ſectionem aquae eiusque momenta reſpectu quorumque axium horizontalium per eius centrum grauitatis ductorum ſpectant, reuertamur ad ſtabilitatem, qua naues in ſitu aequilibrii perſtant, diligentius inueſtigandam. Repraeſentet ergo figura
Tab. IX. fig. 5. $AabB$ carinam nauis ſeu partem aquae immerſam, cuius ſuprema ſuperficies ſeu ſectio aquae ſit AEBF, atque A prora, B vero puppis. Sit pondus totius nauis $= M$, volumen partis ſubmerſae $= V$, quod ita pendet ab M, vt pondus maſſae aquae cuius volumen eſt $= V$ aequale

ſit ponderi nauis $= M$, ſit porro centrum grauitatis totius nauis ſitum in G, centrum magnitudinis partis ſubmerſae vero in O, ita vt O infra G cadat, vt fere in omnibus nauibus fieri ſolet. Denique ſit area ſectionis aquae $= 2D$, eiusque momentum reſpectu axis longitudinalis $AB = I = \frac{EF^2 . D}{\mu}$, at reſpectu axis latitudinalis $= K = \frac{AB^2 . D}{\nu}$, vbi μ et ν numeros deſignant medios inter 6 et 12 diverſis autem litteras μ et ν aſſumſimus quia non ſemper aequales valores habent.

§. 239. Ex his itaque obtinebitur ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis $AB = M\left(\frac{EF^2 . D}{\mu V} - OG\right)$ atque momentum reſpectu axis latitudinalis $= M\left(\frac{AB^2 . D}{\nu V} - OG\right)$. Sin autem centrum grauitatis G infra centrum magnitudinis O caderet, tum loco $- OG$ ſcribi deberet $+ OG$; hocque caſu nauis ſemper haberet ſtabilitatem affirmativam atque in ſitu ſuo aequilibrii firmiter perſiſteret. Stabilitas porro hoc caſu eo erit maior, quo profundius centrum grauitatis G infra centrum magnitudinis O cadet. Ratione autem ſectionis aquae ſtabilitas augebitur quo amplior ea accipiatur; tum enim non ſolum area eius 2 D eo fiet maior, ſed etiam eius longitudo AB et latitudo EF, ex quo ſtabilitas duplicem ob rationem augebitur.

§. 240. Quod ſi igitur naues ita confici poſſent vt earum centrum grauitatis infra centrum magnitudinis caderet, tum nulla admodum cura eſſet adhibenda ad ſtabilitatem nauibus conciliandam, quoniam ſponte haberent ſatis magnam. At haec conditio in plerisque nauibus nullo modo adimpleri poteſt, ſi enim tota nauis moles per carinam aequabiliter diſtribuatur, tum centrum grauitatis in ipſum centrum magnitudinis caderet, ex quo per-

ſpicuum eſt ob partem extra aquam eminentem centrum grauitatis altius eſſe poſitum. Quamuis enim maxime ponderoſis oneribus in imum carinae collocandis centrum grauitatis deorſum et quidem infra centrum magnitudinis deduci poſſet; ſi ſpatium carinae ſuppetat; tamen in plerisque nauibus praeſertim bellicis tanta onerum copia neceſſario ſupra ſuperficiem aquae debet eſſe conſtituta, vt memorata onerum impoſitione centrum grauitatis vix ac ne vix quidem infra aquae ſuperficiem deprimi queat.

§. 241. Cum igitur, ſi praeſentem theoriam ad naues accommodare velimus, centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis O cadere ponendum ſit, ſumma cura in conſtructione nauium erit adhibenda, vt naues ſtabilitatem ſufficientem obtineant. Hoc autem in negotio ſufficiet, ſi nauibus ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis ſatis magna concilietur, quae eſt $= M\left(\frac{EF^2.D}{\nu V} - OG\right)$; cum enim fuerit $\frac{EF^2.D}{\nu V} > OG$ multo magis erit $\frac{AB^2.D}{\mu V} > OG$, quia in omnibus nauibus longitudo AB multo maior eſt quam latitudo EF. Vulgo namque longitudo AB quadrupla ſtatuitur latitudinis EF, ex quo $\frac{AB^2.D}{\mu V}$ circiter decies et ſexies maius ſit quam $\frac{EF^2.D}{\nu V}$, quia numeri μ et ν nullo caſu a ſe inuicem multum diſcrepant. Quanquam enim ſtabilitas nauium reſpectu axis latitudinalis multo maior eſſe debet, quam ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis, tamen ea ſatis fiet ingens, ſi modo ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis ſit aliqua. Quamobrem ſufficiet ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis tantam effeciſſe, quantam circumſtantiae requirunt.

§. 242. Cum autem nullum ſit dubium, quin nauis, quo maiorem habeat ſtabilitatem, eo ſit perfectior cen-

ſen-

ſenda, tum enim non ſolum aduerſitates tempeſtatum minore periculo ſubit, ſed etiam maiores vires ſuſtinere valet; hanc obrem conueniet naues ita fabricari vt exceſſus quantitatis $\frac{EF^2.D}{yV}$ ſupra OG ſit quam fieri poteſt maximus. Poſſet quidem iſte exceſſus ad lubitum multiplicari augenda area ſectionis aquae, ſed quia hinc alia naſcuntur incommoda, modus quidam eſt ponendus, quem transgredi non liceat. Definietur autem iſte modus cum vſu, cui nauis quaeque deſtinatur, tum etiam aliis nauium non minus neceſſariis proprietatibus, quae non nimis amplam aquae ſectionem admittunt; interim tamen id nunc maxime eſt neceſſarium, vt quantitas $\frac{EF^2.D}{yV}$ notabiliter interuallum OG ſuperet, alioquin enim nauis nequidem aquae committi poſſet.

§. 243. Videamus igitur ante omnia quantum valorem haec quantitas $\frac{EF^2.D}{yV}$ circiter praebeat. Ac primo quidem conſtat volumen partis aquae ſubmerſae V maius eſſe pyramide baſin habente ſectionem aquae 2D et altitudinem $=$ CD, ſeu eſſe $V > \frac{2}{3}D.CD$; contra vero minus eſt V quam priſma eiusdem baſis 2D eiusdemque altitudinis CD, ſeu erit $V < 2D.CD$. Videtur autem ſatis prope accipi poſſe $V = D.CD$, tantum enim foret volumen carinae, ſi ea terminaretur rectis a ſingulis circumferentiae ſectionis aquae punctis ad ſpinam *ab* normaliter ductis. Quanquam enim naues circa medium gibboſiores eſſe ſolent, quam in tali figura, tamen ad proram ac puppim tantundem fere deficit, quantum gibboſitas addit: hancque ob rem aſſumamus $V = D.CD$ vnde ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis prodit $= M(\frac{EF^2}{yCD} - OG)$.

 §. 244.

§. 244. Centrum magnitudinis carinae circiter cadet infra sectionem aquae interuallo $CO = \frac{1}{3} CD$, si igitur centrum grauitatis totius nauis caderet in ipsam sectionem aquae foret $OG = \frac{1}{3} CD$, ponamus autem, ne nos vlli periculo exponamus $OG = \frac{1}{2} CD$. Hoc nunc valore substituto debebit esse $\frac{EF^2}{\nu CD} > \frac{1}{2} CD$ seu $EF > CD \sqrt{\frac{\nu}{2}}$: tribuamus quoque ipsi ν maiorem valorem, quam vnquam habere solet, scilicet sit $\nu = 10$, debebitque esse $EF > CD \sqrt{5}$. Quocirca cuiusuis nauis maximam latitudinem in superficie aquae plus quam duplo maiorem esse oportet quam profunditatem, ad quam sub aquam mergitur. Quodsi igitur fiat $EF = 3 CD$, erit stabilitas respectu axis longitudinalis certo maior quam $M(\frac{9}{10} CD - \frac{1}{2} CD)$ hoc est maior quam $\frac{2}{5} M.CD$, quae quantitas stabilitatis sufficere potest.

§. 245. Ex his iam facile erit pro nauibus cum ratione structurae tum onerum imponendorum diuersis rationem assignare, quam latitudo sectionis aquae ad profunditatem carinae tenere debet, vt stabilitas fiat satis ingens. Si enim centrum grauitatis totius nauis cadat vel in ipsam superficiem aquae vel aliquantillum altius, ita tamen vt eius distantia a superficie aquae sextam partem profunditatis CD non superet, tum sufficiet latitudinem EF triplam statuere profunditatis CD; sin autem centrum grauitatis altius cadet, vt sit $OG = CD$, tum oportebit latitudinem EF circiter quadruplum profunditatis CD constitui. At si centrum grauitatis G infra superficiem aquae fuerit positum, ita vt sit $OG < \frac{1}{3} CD$ puta $= \frac{1}{4} CD$, tum satis erit, si latitudo EF aliquantulum plus quam duplo accipiatur quam CD. Quodsi autem OG omnino eua-

euanescat et latitudo EF duplo sumatur maior, quam profunditas CD, tum stabilitas erit $= \frac{2}{5}$ M.CD, hoc est tanta, quanta inuenta est pro casu OG $= \frac{1}{2}$ CD et EF $=$ 3 CD.

§. 246. Definita nunc stabilitate respectu axis longitudinalis, paucis videndum est, quanta prodeat stabilitas respectu axis latitudinalis. Quoniam enim longitudo AB circiter quadruplo maior accipi solet quam latitudo EF, erit stabilitas respectu axis latitudinalis $M\left(\frac{144 \cdot CD}{\mu} - \frac{1}{2}CD\right)$ si quidem fuerit EF $=$ 3 CD et OG $= \frac{1}{2}$CD. Vnde si ponatur $\mu = 10$, erit stabilitas $=$ 14 M.CD, quae plus quam tricies maior est quam stabilitas respectu axis longitudinalis. Necesse autem est vt stabilitas respectu axis latitudinalis multis vicibus maior sit, quam stabilitas respectu axis longitudinalis, quia omnis nauis multo fortius resistere debet inclinationibus versus proram puppimue, eo quod maximae vires, quibus nauis exponitur, ad inclinationem versus proram tendunt.

§. 247. Vt autem rem generaliter expediamus, ponamus esse volumen carinae $V = \frac{2D \cdot CD}{m}$ vbi m est numerus circiter $= 2$. Sit porro OG $= \frac{CD}{n}$, cuius numeri n valorem ex figura et oneratione nauis definiri oportet, minor autem n vnitate esse non potest, quia centrum grauitatis nauis intra corpus nauis cadere debet. Hunc fiat EF $= p$.CD et AB $= q$.EF $= pq$.CD, quibus positis erit stabilitas nauis respectu axis longitudinalis $=$ M.CD $\left(\frac{mpp}{\nu} - \frac{1}{n}\right)$, et stabilitas respectu axis latitudinalis $=$ M.CD $\left(\frac{mp^3q^3}{\mu} - \frac{1}{n}\right)$. Quod si ergo requiratur vt stabilitas respectu axis longitudinalis sit $= \frac{M \cdot CD}{2}$, quam iam vidimus esse

 sufficí-

ſufficientem, cum nulla fere nauis habeat maiorem erit $\frac{mpp}{2v} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ et $p = \sqrt{(\frac{v}{m} + \frac{2v}{n})}$, vnde fit $EF = CD \sqrt{(\frac{v}{m} + \frac{2v}{n})}$.

§. 248. Si nunc plures naues magnitudine inaequales at ſimiliter conſtructas et oneratas concipiamus, tenebunt earum pondera M rationem triplicatam laterum homologorum; vnde cum ſtabilitas reſpectu axis ſiue longitudinalis ſiue latitudinalis ſit vt $M.CD$, erunt nauium ſimilium ſtabilitates, in ratione quadruplicata laterum homologorum. Momenta autem virium venti ad naues ſimiles inclinandas tantum ſunt in triplicata ratione laterum homologorum, ex quo nauium ſimilium eae, quae ſunt maiores, inclinationibus magis reſiſtent quam minores. Naves ſcilicet maiores, ſi quidem velorum ſuperficies teneant rationem duplicatam laterum homologorum, minorem perturbationem in ſitu ſui aequilibrii patientur, quam naves minores.

§. 249. Si nunc cum ex his tum ex reliquis principiis fuerit determinata proportio, quam longitudo, latitudo, et profunditas carinae inter ſe tenere debent facile erit quantitatem nauis aſſignare, cuius pondus praeſcribitur. Detur itaque volumen carinae quod ſit $= V$, quia ab eo pondus nauis pendet, ſitque ſuperficies ſectionis aquae $= \frac{AB.EF}{\varkappa} = 2D$, volumen carinae $= \frac{2D.CD}{m} = \frac{AB.EF.CD}{m\varkappa}$, ac ponamus eſſe hanc inuentam legem, qua eſſe debeat $EF = p.CD$ et $AB = q.EF = pq.CD$ prodibit volumen carinae quod eſt datum, $V = \frac{ppq.CD^3}{m\varkappa}$. Quoniam nunc p, q, m et $\varkappa$ ſunt numeri dati, erit $CD = \sqrt[3]{\frac{m\varkappa V}{ppq}}$; inuenitur igitur profunditas carinae CD, ex qua

tum

tum latitudo tum longitudo eius cognoſcetur. Nauis itaque conſtrui poterit, quae tam pondus habeat datum quam ſtabilitatem datam.

§. 250. In nauibus bellicis grandioribus ſumi ſolet latitudo carinae $EF = \frac{5}{2}CD$, atque longitudo $AB = 4EF$: erit ergo $p = \frac{5}{8}$ et $q = 4$. Hinc ergo ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis erit $= M.CD\left(\frac{25m}{8\nu} - \frac{1}{n}\right)$, cum igitur hae naues habeant ſtabilitatem affirmatiuam, erit $25mn > 8\nu$. Ponatur $m = 2$, et $\nu = 10$, quoniam ſupra oſtendimus hos valores proxime his litteris reſpondere, erit $50n > 80$ et $n > \frac{8}{5}$; erit ergo $OG < \frac{5CD}{8}$, ſeu diſtantia centri grauitatis nauium harum a centro magnitudinis carinae minor erit, quam quinque octantes profunditatis carinae. Cadit autem in huiusmodi nauibus centrum grauitatis, ob tormenta, quae omnia ſupra aquam ſunt poſita, ſupra aquae ſuperficiem; quodſi ergo ponatur $OG = \frac{1}{2}CD$ ſeu $n = 2$, erit ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis $= \frac{1}{8}M.CD$.

§. 251. Quoniam in maioribus nauibus, ſi quidem ſimilitudo obſeruetur ſtabilitas creſcit in ratione quadruplicata laterum homologorum, cum tamen vires inclinantes ad ſummum in ratione triplicata creſcant; in maioribus nauibus ſine periculo ſtabilitate minore contenti eſſe poſſumus. Scilicet ſi ſtabilitas exponatur per hanc expreſſionem $\frac{1}{\varkappa}M.CD$, pro $\varkappa$ in maioribus nauibus ſatis magnum numerum tuto accipere licet, quod in minoribus non ſine periculo fieri poſſet. Hanc obrem in nauibus illis maximis bellicis ſine periculo aſſumitur $EF = \frac{5}{2}CD$, quae proportio in minoribus nauibus damnum afferret, ſi quidem ſimilis centri grauitatis poſitio adeſſet. Quodſi igitur

igitur ſic $OG = \frac{1}{2}CD$, pro nauibus maximis ſumi poterit $EF = \frac{5}{2}CD$, pro minoribus autem EF ad CD maiorem rationem tenere debebit, triplam ſcilicet quam ſupra aſſignauimus.

§. 252. Quoniam virium naues inclinantium momenta ſunt proxime vt pondera nauium, naues diuerſae magnitudinis ita conſtrui conueniet, vt earum ſtabilitates teneant rationem ponderum. Sint itaque duae naues, quarum maioris pondus ſit $= M$, latitudo carinae EF, profunditas eius CD; minoris vero nauis pondus ſit $= m$, carinae latitudo ef, profunditas cd, in vtraque autem naui interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis aequetur ſemiſſi profunditatis carinae. Sit porro $cd = \frac{CD}{n}$, atque in maiore naui $EF = \frac{5}{2}CD$, quam rationem ad maximas naues eſſe accommodatam vidimus. Erit igitur ſtabilitas maioris nauis reſpectu axis longitudinalis $= M\left(\frac{EF^2}{v.CD} - \frac{1}{2}CD\right) = \frac{1}{8}M.CD$ poſito $v = 10$: minoris vero nauis ſtabilitas erit $= m\left(\frac{n.ef^2}{10\,CD} - \frac{CD}{2n}\right)$; quae cum ſtabilitates eſſe debeant vt M ad m erit $nn.ef^2 = 5\,CD^2 + \frac{5n}{4}CD^2$ hincque $ef = \frac{CD}{2n}\sqrt{(5n+20)} = \frac{cd}{2}\sqrt{(5n+20)}$.

§. 253. In nauibus igitur diuerſae magnitudinis quae tamen in hoc conueniant, vt interuallum inter centra magnitudinis et grauitatis aequetur ſemiſſi profunditatis carinae, ratio inter latitudinem carinae et eius profunditatem eo erit maior, quo naues fiant minores. Ponamus ergo in nauibus maximis, in quibus ſumi ſolet $EF = \frac{5}{2}CD$ eſſe $CD = 20$ pedum, atque habebimus ſequentes proportiones inter profunditates carinae minores et latitudines.

Pro-

Profunditas carinae	Latitudo carinae
20 ped.	50, 00 ped.
18 ped.	45, 50 ped.
16 ped.	40, 99 ped.
14 ped.	36, 47 ped.
12 ped.	31, 94 ped.
10 ped.	27, 39 ped.
8 ped.	22, 81 ped.
6 ped.	18, 17 ped.
4 ped.	13, 42 ped.
si generaliter m ped.	$\sqrt{5m(5+m)}$ ped.

§. 254. Quodsi autem ad datam nauem, cuius pondus est M, et stabilitas $= \frac{1}{8} M . CD$ et $EF = \frac{5}{2} CD$, qualem modo instar fundamenti assumsimus, aliam construere velimus, in qua interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis aliam teneat rationem ad profunditatem carinae, cuius tamen stabilitas se habeat ad stabilitatem illius in ratione ponderum. Sit huius alterius nauis pondus $= m$, latitudo carinae ef, profunditas cd, et distantia inter centra grauitatis ac magnitudinis $= \frac{1}{\lambda} cd$: erit huius stabilitas respectu axis longitudinalis $= m\left(\frac{ef^2}{10\,cd} - \frac{1}{\lambda} cd\right)$. Debebit ergo esse $\frac{ef^2}{10\,cd} - \frac{1}{\lambda} cd = \frac{1}{8} CD$: ponatur iam $CD = 20$ ped. et $cd = m$ ped. erit $ef^2 = 25m + \frac{10\,mm}{\lambda}$ seu $ef = \sqrt{\left(25m + \frac{10}{\lambda} mm\right)}$ ped. quae expressio pro norma accipi potest, ad rationem inter latitudinem et profunditatem carinae cuiusque nauis determinandam.

§. 255. Haec vero regula non ita stricte est obseruanda, quasi de ea recedi nullo modo liceret; quaecunque enim inuenta fuerit ratio inter latitudinem ac pro-

ſunditatem carinae, tuto ſemper ratio maior accipi poteſt. Namque quo maior latitudo ad datam profunditatem adiungatur ſtabilitas prodibit eo maior, maiorque naui perfectio conciliatur. In omni ſcilicet naui expedit latitudinem reſpectu profunditatis tantam conſtituere, quam reliquae circumſtantiae permittunt; quare ſi reliqua requiſita, quae naues habere debent, patiantur, vt latitudo maior naui detur, quam regula data poſtulat, hoc incrementum maxime erit amplectendum. Minorem autem latitudinem, quam regula data praebet, cum data profuuditate minime coniungi conuenit; etſi enim reliqua nauium requiſita minorem latitudinem poſtulent, tamen potius his reliquis requiſitis vis erit inferenda, quam vt in eorum gratiam ſtabilitas nimium diminuatur.

§. 256. Diminutione autem profunditatis carinae reſpectu latitudinis eius non ſolum maior ſtabilitas nauibus affertur, quod quidem per ſe eſt commodum maximi momenti, ſed etiam naues plura alia commoda non contemnenda conſequuntur. Hac enim diminutione fit vt naves eiusdem molis in aqua ad minorem profunditatem immergantur, hocque ipſo in maris regionibus minus profundis tuto curſum inſtituere queant, quas aliae naues, quae in aqua maiorem profunditatem occupant, nequidem ingredi audent. Praeterea etiam huiusmodi naues, quae aquae minus profunde immerguntur complures ſcopulos in mari latentes euitant, tutoque ſupra eos praetereunt, ad quos, ſi aquae profundius immergerentur allиderent, atque naufragii periculum ſubirent. Quae rationes coniunctim eo magis ſuadent, vt profunditas ad quam naues mergantur, quantum fieri poteſt, diminuatur.

§. 257. Haec autem praecepta, quae hactenus de ſtabilitate tradidimus, potiſſimum ſunt ad naues iam debito modo oneratas accommodata; verum in conſtructione nauium non ſufficit ad hoc ſolum attendere, vt naues, cum completam onerationem ſint nactae, in ſitu erecto firmiter perſiſtant; ſed etiam naues ita comparatas eſſe oportet, vt vel minori onerum copia onuſtae, vel adeo vacuae in ſitu aequilibrii ſtabilitate ſint praeditae. Quamquam enim naui, quae vacua nullam etiam habet ſtabilitatem, per onerationem ſtabilitas conciliari poteſt, tamen initio naues vacuae aquae immittuntur, ex quo, ſi ſtabilitate carerent, mox ſubuerſioni maximisque hinc oriundis damnis forent obnoxiae. Quamobrem in conſtructione nauium ſumma cura erit adhibenda, vt primum vacuae aquae commiſſae tum vero etiam minori onerum copia onuſtae ſtabilitatem habeant; eam quidem non admodum magnam, quia hoc ſtatu impetibus tempeſtatis nondum ſolent exponi, ſed tamen aliquam, quae ſufficiat ad nauem contra minores vires in ſitu erecto conſeruandam.

§. 258. Ac primum quidem perſpicuum eſt, ſi nauis ſiue vacua ſiue vtcunque onuſta ſtabilitatem habuerit reſpectu axis longitudinalis, eandem multo ſtabilius fore conſtitutam reſpectu axis latitudinalis. Quocirca ſufficiet naues ita conſtruxiſſe, vt quaecunque eius portio aquam ſubeat ſitus aequilibrii ſtabilitatem habeat reſpectu axis longitudinalis. Minime autem nauis aquae immergitur, ſi eſt vacua, ex quo ſuperfluum foret ſtabilitatem pro minoribus immerſionibus quaerere. Totum igitur hoc negotium huc redit, vt quaecunque nauis ſectio horizontalis, poſita intra ſectiones aquae, quas nauis obtinet, ſi vel eſt vacua

vel completam onerationem conſecuta, vicem ſectionis aquae ſubeat, ſtabilitas adſit reſpectu axis longitndinalis. Quoniam vero haec ſtabilitas ex maxima ſectionis aquae latitudine definitur, ſectionem carinae transuerſalem ampliſſimam conſiderari oportebit, quippe quae cuiusuis ſectionis horizontalis maximam latitudinem praebet.

Tab. X. fig. 1. §. 259. Sit igitur EFD ſectio ampliſſima, cuius figuram quaerimus, vt nauis requiſita proprietate ſit praedita. Cadat nauis vacuae centrum grauitatis ad interuallum DG ſupra fundum carinae, perinde autem eſt ſiue in planum ſectionis ampliſſimae incidat ſiue minus: atque ponamus centrum grauitatis in eadem altitudine permanere, ſi ſucceſſiue nauis magis magisque oneretur. Tuto autem hoc aſſumere licet, nam imponendis oneribus centrum grauitatis ad profundiorem potius ſitum redigi ſolet; ex quo ſi ſtabilitas fuerit naui conciliata, pro ſitu centri grauitatis in G, eo maiorem habebit nauis ſtabilitatem, ſi centrum grauitatis profundius fuerit ſitum. Tranſeat nunc ſectio aquae per ef cuius maxima latitudo ſit haec ipſa recta ef ponaturque portionis aquae ſubmerſae profunditas $Dc = x$, ſemilatitudo ſectionis aquae $ce = y$; atque interuallum conſtans $DG = f$. Portionis autem aquae immerſae centrum magnitudinis proxime erit in o, vt ſit $Do = \frac{2}{3}x$, vnde fiet $oG = f - \frac{2}{3}x$. Ex his erit ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis $= M(\frac{4yy}{\nu x} - f + \frac{2}{3}x)$ vbi pro ν circiter 9 vel 10 accipi oportet.

§. 260. Debebit ergo in ea ſaltem ſectionis ampliſſimae portione, quae ſectiones aquae ſuppeditare poteſt, eſſe $\frac{4yy}{\nu x} > f - \frac{2}{3}x$, ſeu $4yy > 9fx - 6xx$ poſito 9 pro ν. Quare ſi capiatur $4yy = 9fx - 6xx$, haecque curua deſcriba-

ſcribatur, neceſſe eſt, vt ſectio ampliſſima nauis hanc figuram in ſe includat, ſaltem eius portionem, quae intra ſectiones aquae extremas eſt poſita. Perſpicuum autem eſt hanc aequationem $4yy = 9fx - 6xx$ eſſe ad ellipſin DEHF cuius axis verticalis $DH = \frac{3}{2}f$, alterque horizontalis $EF = \frac{3f\sqrt{6}}{4}$. Data ergo eleuatione centri grauitatis G ſupra fundum nauis D, capiatur $DH = \frac{3}{2}DG$, pro vno ellipſis axe, et $EF = \frac{3}{4}DG\sqrt{6}$ pro altero, ita vt ſit $DH^2 : EF^2 = 2 : 3$ atque deſcripta ellipſi HEDF, notatisque ſectionibus aquae extremis EF et ef, quarum illa EF naui penitus onuſtae haec ef naui vacuae reſpondeat, ſectionem nauis ampliſſimam ita comparatam eſſe oportet, vt ſpatium ellipſis EefF in ſe includat, pariterque in puncto D terminetur, quippe quod eſt imum nauis.

§. 261. In naui vacua centrum grauitatis G communiter ſupra ſectionem aquae, quae naui etiam oneratae competit, cadit. Cum enim plerumque pars nauis extra aquam eminens multo ſit maior, quam pars ſubmerſa ob ingentem eleuationem, quae cum verſus proram tum vero maxime verſus puppim fieri ſolet, etiam centrum grauitatis ſupra mediam altitudinem cadet. Quoniam igitur in ellipſi inuenta centrum C infra G cadit, et quidem parte tertia ipſius CD, axis transuerſus EF proxime ſectionem aquae naui onuſtae competentem repraeſentabit; ac hanc ob rem latitudo ſectionis aquae ef, quam obtinet nauis vacua minor erit quam EF. Quamobrem ſectio nauis ampliſſima tuto ita confici poteſt, vt verſus fundum D conuergat: interim tamen conuergentia non debet eſſe nimis magna, in profunditate enim c ſectio ampliſſima maior eſſe debet, quam recta ef, quo ipſo conuergen-

vergentia limitatur. Cognito autem loco centri grauitatis nauis vacuae, descriptaque ellipsi inuenta, statim iudicari poterit vtrum nauis vacua aquae immissa stabilitatem sit habitura, an secus; ac praeterea quanta ea futura sit.

§. 262. Constructa autem ad normam quamcunque naui, ingestaque debita onerum copia, ab ipsa onerum per nauem distributione stabilitas plurimum pendet. Quanquam enim onera per primum requisitum ita disponi debent, vt totius nauis centrum grauitatis in eam rectam verticalem incidat, in qua versatur centrum magnitudinis partis submersae, tamen vt iam supra vidimus, huic requisito innumerabilibus modis satis fieri potest, cum id tantum esset efficiendum, vt centrum grauitatis in assignatam rectam verticalem incidat. Nunc vero cardo rei potissimum in hoc versatur, in quonam huius rectae verticalis puncto centrum grauitatis constituatur; ad stabilitatem enim nauis definiendam nosse oportet interuallum, quod inter centra grauitatis ac magnitudinis est interiectum. Ex formula enim stabilitatis data intelligitur, eo fore stabilitatem maiorem, quo minus fuerit illud interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis, si quidem centrum grauitatis supra centrum magnitudinis sit positum.

§. 263. Hinc itaque colligitur, quo magis oneribus disponendis centrum grauitatis nauis deprimatur, eo magis stabilitatem auctum iri; ex quo cum in nauibus stabilitas, quantum fieri potest, sit augenda, haec nascitur pro dispositione onerum regula, vt centrum grauitatis nauis quam maxime deorsum perducatur. Huic igitur regulae satisfiet, si onera ad tantam profunditatem collocentur, quantum circumstantiae permittunt; quo quidem in nego-

tio

tio aduertendum eſt, vt ea onera, quae maximam habeant grauitatem ſpecificam, profundiſſime ponantur, quo grauioribus enim oneribus infima carinae cauitas impleatur, eo magis centrum grauitatis deorſum redigetur. Regula haec in praxi etiam ſollicite obſeruatur, ſolent enim pleraeque naues circa infimam cauitatem grauiſſimis materiis, cuiusmodi ſunt ſaburra, lapides, ferrum etc. adimpleri, quae plerumque per ſe nullius prorſus ſunt vtilitatis, ſed eum tantum in finem ingeruntur, vt nauis ſtabilitas augeatur.

§. 264. Haec rerum alias inutilium ingeſtio eo magis eſt neceſſaria, quo reliquae merces vehendae minorem habent grauitatem ſpecificam. Quodſi enim talibus mercibus leuioribus infima nauis cauitas impleretur, ob earum exiguum pondus centrum grauitatis non ſolum parum deorſum detraheretur, ſed etiam a reliquis mercibus ſuperiorem partem nauis occupantibus multo magis eleuaretur. Si ergo onera imponenda ita fuerint comparata, vt perinde ſit, quonam in loco quaeque collocentur, primum quidem omnia quam maxime deorſum erunt detrudenda; tum vero ea, quae ſunt ſpecifice grauiora, ad infimum locum, leuiora autem ad ſupremum collocari oportebit, ſin autem plura onera maximi ponderis ex ſua natura in ſuperiore nauis parte verſari debent, vt tormenta in nauibus bellicis, tum niſi ſtabilitas nauis per ſe ſatis ſit magna, aliis ponderoſiſſimis oneribus infima nauis cauitas erit adimplenda. Ex his autem ſatis ſuperque perſpicitur, quomodo nauium onerationem dirigi oporteat, vt per eam maximum ſtabilitatis incrementum obtineatur.

§. 265.

§. 265. Vt autem diſtinctius intelligatur, quantum translatione onerum ſtabilitas nauis afficiatur atque vel augeatur vel diminuatur, calculum ſubduci conueniet. Primo quidem ex formulis datis, quibus ſtabilitatis quantitas exprimitur, perſpicuum eſt, ſi tranſpoſitione onerum in naui contentorum centrum grauitatis per ſpatium quoddam s deorſum perducatur, tum ſtabilitatem nauis reſpectu cuiusuis axis augeri quantitate $= M.s$ denotante M pondus nauis. Quodſi autem onerum tranſpoſitione centrum grauitatis ſurſum promoueatur per interuallum $= s$, tum ſtabilitas diminuetur quantitate $= M.s$. Quoniam enim onera, quae in naui iam actu inſunt, tantum transponuntur, neque ſectio aquae, neque volumen partis ſubmerſae mutabitur, ſed vel depreſſione vel eleuatione centri grauitatis ſolum interuallum inter grauitatis centrum et centrum magnitudinis partis ſubmerſae vel diminuetur quantitate s vel augebitur; ex quo ſtabilitas priori caſu quantitate $M.s$ augebitur, poſteriori vero caſu tantundem minuetur.

Tab. X. fig. 2. §. 266. Sit nunc in naui quacunque cuius pondus $= M$. DG recta illa verticalis in qua centrum grauitatis totius nauis G ſit ſitum: atque ponatur onus aliquod, cuius pondus ſit $= P$, transferri in locum humiliorem p, qua translatione quantum ſtabilitas augeatur, inueſtigemus. Ponamus autem primum, oneris huius P centrum grauitatis P tam ante quam poſt translationem ſitum eſſe in ipſa recta verticali DG per centrum grauitatis nauis G tranſeunte. Separemus igitur ſaltem cogitatione pondus hoc P a tota navi, ita vt reliquae nauis pondus ſit $= M - P$; eiusque centrum grauitatis poſitum ſit in γ. Cum vero totius nauis centrum grauitatis verſetur in G, erit $(M - P)\gamma G =$

P.PG

P.PG ideoque $G\gamma = \frac{P.PG}{M-P}$. Translatum iam ſit pondus P in ſitum p, ſitque nunc totius nauis centrum grauitatis in g, erit $P.pg = (M-P)\gamma g$ ſeu $P.pG - P.Gg = (M-P)Gg - P.PG$, ex qua aequatione oritur $Gg = \frac{P.Pp}{M}$. Deſcenſu ergo oneris P per ſpatium Pp ſtabilitas augetur quantitate P. Pp.

§. 267. Quanquam autem hic centrum grauitatis oneris deorſum moti in ipſa recta verticali DG poſuimus, tamen idem augmentum ſtabilitatis obtinebitur, ſi in nauis loco quocunque onus verticaliter deorſum transferatur. Nam ponamus onus $= P$, cuius centrum grauitatis ſitum Tab. X. fig. 3.
eſt in P, deorſum ferri, vt eius centrum grauitatis perveniat in p; hacque translatione deſcendat totius nauis centrum grauitatis G in g vsque. Sit γ centrum grauitatis reliquae nauis $M-P$ erit $PG : G\gamma = M-P : P = pg : g\gamma$: atque componendo $P\gamma : G\gamma = M : P = Pp : Gg$ ex qua analogia oritur $Gg = \frac{P.Pp}{M.}$. Cum igitur incrementum ſtabilitatis ſit $= M.Gg$ erit id $= P.Pp$. Quoties ergo in naui onus aliquod cuius pondus $= P$, in locum humiliorem defertur, ſtabilitas nauis augetur, et quidem producto, quod oritur ſi pondus oneris deorſum translati multiplicetur per altitudinem, per quam deſcendit. Ex quibus quantum augmentum ſtabilitatis per commodam et bene directam onerationem afferatur, luculenter perſpicitur.

§. 268. Inquiramus nunc etiam quantum ſtabilitas nauium vel appoſitione nouorum onerum, vel ablatione onerum, quae ante affuerant, afficiatur; vbi quidem onera tum in ipſum centrum grauitatis apponi, quam ex eo aufferri ponemus, quia ſi vel in aliud apponantur vel inde auferantur, mutatio ſtabilitatis ex caſu praece-

 dente

dente definiri poteſt. Conſideremus tantum ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis, ſitque M pondus nauis, V volumen partis ſubmerſae, 2 D area ſectionis aquae, EF eius maxima latitudo, O centrum magnitudinis partis ſubmerſae, G centrum grauitatis totius nauis, erit ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis $= M(\frac{EF^2 . D}{\nu V} - OG)$. Eſt vero vti ſupra vidimus $\nu = 9$ vel 10 proxime, et $V = D . CD$ atque $CO = \frac{1}{3} CD$ circiter. Quoniam ergo eſt $CD = \frac{V}{D}$ erit $OG = DG - DO = DG - \frac{2V}{3D}$, atque ſtabilitas prodibit $= M(\frac{EF^2 . D}{9V} + \frac{2V}{3D} - DG)$.

§. 269. Ponamus iam huic naui in ipſo centro gravitatis G nouum apponi pondus $= P$, eo pondus nauis fiet $= M + P$, atque ideo nauis profundius immergetur. Quodſi ergo ſumamus tali maiore immerſione ſectionem aquae eiusdem quantitatis manere, id quod tuto aſſumere licet, quia latera nauis circa aquae ſuperficiem ſolent eſſe verticalia, retinebit D poſt noui oneris impoſitionem priſtinum valorem; at maius volumen aquae ſubmergetur, quod ſe habebit ad volumen V vt $M + P$ ad M. Cum igitur facta hac impoſitione ponderis P, abeat M in $M + P$, et V in $V + \frac{PV}{M}$, at EF, D, et DG maneant inuariata, erit ſtabilitas nauis poſt impoſitionem ponderis P reſpectu axis longitudinalis $= (M + P)(\frac{M . D . EF^2}{9V(P + M)} + \frac{2V(M + P)}{3M . D} - DG) = \frac{M . D . EF^2}{9V} + \frac{2V(M + P)^2}{3M . D} - M . DG - P . DG$; quae excedit ſtabilitatem priſtinam quantitate $+ \frac{2P . V(2M + P)}{3M . D} - P . DG$.

§. 270. Quodſi autem ponamus pondus hoc P non in centro grauitatis nauis G ſed alio loco puta P imponi, augebitur nauis ſtabilitas inſuper incremento $= P . GP$, vnde

de totum ſtabilitatis incrementum, quod ex hac impoſitione ponderis P eſt natum erit $= \frac{2P.V(2M+P)}{3M.D} - P.DP$. Cum autem pondus hoc P valde exiguum ponitur reſpectu totius nauis, loco $2M + P$ ſcribere licet $2M$, ex quo ſtabilitatis accrementum erit $= \frac{4PV}{3D} - P.DP$. Quoniam vero porro eſt $\frac{V}{D} = CD$ erit ſtabilitatis augmentum $= P(\frac{4}{3}CD - DP)$. Ex quibus perſpicitur non ſolum omnia pondera quae naui infra aquae ſuperficiem ingeruntur ſtabilitatem augere, ſed etiam quae ſupra aquae ſuperficiem adduntur, dummodo eorum diſtantia a ſuperficie aquae non excedat tertiam partem profunditatis carinae.

§. 271. Vt igitur normam habeamus, quam ſequi conueniat, cum in appoſitione tum in ablatione onerum ſupra ſectionem aquae ACB alia concipienda eſt ſectio horizontalis MLN cuius a ſectione aquae diſtantia LC aequalis ſit tertiae parti profunditatis carinae CD. Notata autem hac ſuperficie horizontali MLN, omnia onera quae infra eam in nauem imponuntur ſtabilitatem nauis augebunt, contra vero onera quae ſupra eam ſuperficiem adduntur, ſtabilitatem diminuent. Quod vero ad ablationem ſeu eiectionem onerum attinet ex iisdem principiis manifeſtum eſt ſi onera auferantur ex parte nauis ſuperiori $MN\beta\alpha$ tum ſtabilitatem nauis augeri, contra vero ſi onera ex parte inferiori $M\,ab\,N$ eiiciantur, tum ſtabilitatem diminui. His autem ſingulis caſibus tam incrementa quam decrementa ſtabilitatis inuenientur, ſi onera tam impoſita de nouo quam ablata multiplicentur per ſuas a ſuperficie horizontali MN diſtantias, ex quo intelligi licet, quantum lucrum tam ex adiectione quam ablatione onerum expectari debeat. Tab. X fig. 5.

§ 272. Quamuis vox ſtabilitatis, qua in hac doctrina vtimur, omnino noua videatur, tamen res ipſa omni tempore ſatis fuit nota; quoniam enim ſecuritas nauigationis potiſſimum a ſtabilitate nauium, qua in ſitu erecto perſiſtere conantur, pendet, haec res nautis ignota manere non potuit, etiamſi nemo adhuc diſtincte oſtenderit, quomodo ea ſit comparata. Naues autem, quae ſufficienti ſtabilitate ſunt praeditae, nautis ita deſcribi ſolent, vt dicant, eas velis portandis eſſe pares, ſeu vim velorum ſuſtinere valere, quae definitio a noſtra non multum diſcrepat. Cum enim vis venti in vela impingens non ſolum nauem propellat, ſed etiam inclinare conetur, perſpicuum eſt, niſi nauis ſatis magnam habeat ſtabilitatem, eam a vi venti nimium inclinari debere, praecipue in curſu obliquo, quo vis velorum nauem ad latera inclinare annititur. Quo igitur maiorem vim venti nauis ſine periculoſa inclinatione ſuſtinere valet, eo maiori ſtabilitate praedita ſit, neceſſe eſt.

§. 273. Saepe numero autem euenire ſolet, vt naues, quando iam ſunt conſtructae atque aquae immiſſae, nimis paruam ſtabilitatem habere deprehendantur; quod quidem vitium, ex theoria noſtra expoſita non ſolum facile praeuideri ſed etiam euitari poſſet. Ac Paulus Hoſtis ſcriptor de re nautica celebris atque expertus refert pleraſque naues in Gallia fabricari ſolitas hoc vitio laborare, vt niſi medela adhibeatur, velorum vim ſuſtinere non valeant; atque ob hunc defectum complures naues perire ſolere. Ratio ſcilicet huius vitii in hoc eſt poſita, quod vel pro data carinae latitudine profunditatem nimis magnam vel pro data profunditate latitudinem nimis paruam effecerint;

ex quo ſtabilitas nimis debilis exiſtit. Plerumque igitur teſtimonio eiusdem Auctoris naues in Gallia conſtructas noua contabulatione extrinſecus muniri oportuit, vt ipſis maior ſtabilitas conciliaretur; cuius medelae ratio cum noſtra Theoria apprime congruit; hoc enim munimento amplitudo nauis ac proinde etiam ſectio aquae dilatatur, vt eidem profunditati carinae maior latitudo eiusdem reſpondeat.

§. 274. Quo frequentius igitur hoc vitium in conſtructione nauium committi ſolet, eo maior cura erit adhibenda, vt medela maxime idonea reperiatur, quae non ſimul, ſi adhibeatur, nauibus alia vitia inſerat, cuiusmodi eſt ea contabulatio, cuius Auctor allegatus mentionem facit, qua reſiſtentia nauis in aqua admodum augetur, celeritasque notabiliter retardatur. Quamobrem nunc potiſſimum inquiramus, quo pacto nauis iam fabricatae, quae nimis exiguam habeat ſtabilitatem, ſtabilitas quam commodiſſime augeri queat. Ac primo quidem iam expoſuimus quomodo per onerationem, onerumque translationem ſtabilitati incrementum addi poſſit, verum haec medela plerumque vel minus parum prodeſt, vel ob reliquas circumſtantias non adhiberi poteſt, quin ſimul nauis inutilis reddatur; vt ſi velimus in naui bellica omnia tormenta infra aquae ſuperficiem detrudere.

§. 275. Ex expreſſione autem, qua ſtabilitatis quantitatem definiuimus, intelligitur ſtabilitatem triplici modo augeri poſſe. Primo enim ſtabilitas creſcit ſi centrum grauitatis nauis in humiliorem locum perducatur, quod fit grauioribus oneribus deorſum transferendis, quem vero modum in praeſenti negotio parum adiumenti afferre iam

 indi-

indicauimus. Deinde etiam ſtabilitas augeri poteſt, ſi centrum magnitudinis carinae altius promoueatur, quod autem ſine dilatatione carinae in parte ſuperiori fieri nequit; dilatata vero carina in parte ſuperiori incrementum ſtabilitatis ſimul a tertio modo oritur. Tertio enim ſtabilitas incrementum capit, ſi ſectio aquae fiat amplior, hoc namque modo non ſolum centrum magnitudinis carinae ſurſum aſcendit, ſed quod maximum ſtabilitatis incrementum producit, momentum ſectionis aquae reſpectu cuiusque axis augetur. Praecipue autem efficiendum eſt vt momentum reſpectu axis longitudinalis maxime augeatur, quia hoc in omnibus nauibus ſolet eſſe minimum, atque ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis debiliſſima; ex quo haec ſtabilitas perpetuo maxime indiget augmentatione.

Tab. XI. fig. 1. §. 276. Inueſtigemus igitur, quantum incrementum ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis AB per amplificationem ſectionis aquae nanciſcatur. Ac primo quidem modum vſitatum contemplemur, qua naui circa ſuperficiem aquae vtrinque quaſi alae Mem, Nfn adiungi ſolent, quo fit vt ſectio aquae AEBF augeatur vtrinque ſpatiis $MEme$ et $NFnf$ circa eius maximam latitudinem EF. Ponamus ſectionis aquae proprie ſic dictae AEBF momentum reſpectu axis AB eſſe $= I$, pondus nauis $= M$, volumen carinae $= V$, centrum magnitudinis carinae ſitum eſſe in O et nauis centrum grauitatis in G, erit ſtabilitas nauis, quam ante adiunctionem alarum habuit $= M(\frac{I}{V} - OG)$. Nunc autem momentum ſectionis aquae I augeri debet aggregato omnium productorum, quae oriuntur ſi ſingulae ſpatiorum $MEme$ et $NFnf$ particulae multi-

multiplicentur per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe AB. Hoc igitur aggregatum ſeu momentum ſi fuerit $= i$ ſtabilitas nauis augmentum accipiet $= \frac{Mi}{V}$.

§. 277. Ad quantitatem huius momenti i aeſtimandam ſit area $MEme$ vel $NFnf = s$; atque accipiatur in altera particula infinite parua w cuius ab axe AB diſtantia ſit Rw, erit $i = 2\int w . Rw^2$ et $s = \int w$. At $\frac{\int w . Rw^2}{\int w . Rw}$ dat diſtantiam centri oſcillationis areae $MEme$ ab axe AB ſi circa axem AB oſcillaret, quae ſit $= f$; ac $\frac{\int w . Rw}{\int w}$ dat diſtantiam centri grauitatis areae $MEme$ ab axe AB, quae ſit $= g$. Erit itaque $fg = \frac{\int w . Rw^2}{\int w} = \frac{\int w . Rw^2}{s}$, ex quo oritur momentum areae $MEme$ reſpectu axis AB, $\int w . Rw^2 = fgs$ et $i = 2fgs$. Eſt autem vt ex natura centri oſcillationis patet $f > g$, et ſi p et q ſint horum additamentorum centra grauitatis erit $i > 2s . Cp^2$ quia autem in hoc negotio praeſtat pro i valorem vero minorem accipere, ponamus $i = 2s . Cp^2$; quia etiam differentia eſt inſenſibilis.

§. 278. Incrementum igitur ſtabilitatis, quod oritur ab adiunctione iſtarum alarum erit $= \frac{2Ms . Cp^2}{V} = \frac{Ms . pq^2}{2V}$. Quodſi igitur ponamus alas tantum verſus proram ac puppim extendi, vt earum centra grauitatis in E et F cadant, erit ſtabilitatis incrementum $= \frac{M . EF^2}{2V}$ quae expreſſio etiam ſemper a vera ſenſibiliter vix diſcrepat, quia latitudo alarum Ee et Ff vehementer parua eſſe ſolet. Sin autem area ſectionis aquae proprie $AFBF = 2D$ in computum ducatur et ſumatur $V = D . CD$, atque ponatur $EF = CD\sqrt{6}$, eo quod ratio EF ad CD non ſatis magna cenſetur, quia ſtabilitas augmentatione opus habet,

habet, erit ſtabilitatis incrementum $= \frac{3Ms \cdot CD}{D}$. Si porro ponatur area $MEme = \frac{1}{n}$ ABE $= \frac{1}{n}$D prodibit ſtabilitatis incrementum $= \frac{3}{n}M.CD$. Idem ergo proficitur, ac ſi centrum grauitatis nauis G per interuallum $= \frac{3}{n}CD$ deorſum foret perductum.

§. 279. Huiusmodi igitur appoſitione alarum ſtabilitas multo magis augetur, quam per translationem ponderum vix fieri poteſt; tantundem enim hoc modo obtinetur, quantum translatione ponderis $= \frac{3}{n}M$ a ſuperficie aquae ad imum nauis. Praeterea vero non ſolum ob auctam ſectionem aquae ſtabilitas augetur, ſed quia haec contabulatio infra ſectionem aquae porrigitur, carinae volumen etiam amplius euadit in parte ſuperiori, vnde eius centrum magnitudinis eleuatur. Interim tamen hinc parum lucri accedit, quia ob eandem cauſam nauis aliquantulum extra aquam extollitur; (ſemper enim aequale volumen ſub aqua verſari debet), ex quo eius centrum magnitudinis iterum deprimitur. Sed quia haec ſunt vix ſenſibilia, parum intereſt, vtrum aſſcenſus an deſcenſus huius centri magnitudinis praevaleat.

§. 280. Quanquam autem huiusmodi alis ſtabilitas admodum augetur, tamen ex iis aliud incommodum nauibus infertur, quo fit vt reſiſtentia in motu directo ab alliſione aquae ad has alas multum augeatur, in motu autem obliquo curſus aduerſus venti plagam non parum impediatur. Ad ſcopum quidem praeſentem ſufficeret alas has maxime tenues effeciſſe, quoniam ſtabilitatis incrementum a ſola aucta area ſectionis aquae proficiſcitur, quo pacto reſiſtentiae nullus locus concederetur; ſed quia nauis non perpetuo ſitum erectum exactiſime tenet, verum ad latera

latera ſaepenumero non parum inclinetur, neceſſe eſt, vt alae notabilis craſſitiei conficiantur, quo in quauis nauis inclinatione ſectionem aquae ampliorem reddant. Interim tamen hinc intelligitur, quomodo craſſities alarum ex data inclinationum quantitate definiri debeat, ne nimia earum craſſitie reſiſtentia praeter neceſſitatem multiplicetur.

§. 281. Vt autem clarius appareat ad quantam profunditatem alae hae ad latera nauis pertingere debeant conſideremus ſectionem ampliſſimam EDF, ad quam repraeſentent mEp et nFq ſectiones verticales iſtarum alarum. Deinde notetur maximus angulus ad quem nauis in ſumma tempeſtate circa axem longitudinalem inclinari ſoleat, qui ſit ECp vel FCq; ducantur tum rectae mq et np, quae deſignabunt, quantum alae tam ſupra aquam eminere, quam infra aquam demergi debeant. At ſpatium hoc plerumque tam fiet magnum, vt reſiſtentia vehementer augeatur; quando enim nauis iſtiusmodi medela indiget, eo ipſo ad inclinationes perquam eſt procliuis, angulusque mCp valde magnus prouenit. Quodſi autem hae alae non ſatis altae conficiuntur, atque nauis eo vsque inclinaretur, donec altera ala tota ex aqua eſſet egreſſa, tum ceſſante incremento per alam acquiſito ſubito nauis penitus ſubuerteretur. Tab. XI. fig. 2.

§. 282. Poſſunt vero hae alae nauibus ita applicari, vt iis nec reſiſtentia augeatur nec motus nauis impediatur, id quod fiet, ſi eae naui poſt maximam latitudinem EF verſus puppim B adiungantur, ita vt ſectionis aquae pars anterior EAF maneat immutata, poſterior vero abeat in parallelogrammum rectangulum $EefF$. Quoniam enim hoc modo EF manet latitudo maxima, et corpus verſus Tab. XI. fig. 3.

puppim adiunctum aqua non irruat, ſiquidem nauis motu directo feratur, patet reſiſtentiam alis hoc modo adiungendis non augeri. In motu vero nauis obliquo tantum abeſt, vt hae alae acceſſionem aduerſus plagam venti impediant, vt eam potius adiuuent atque declinationem a curſu directo eo minorem efficiant; quemadmodum ex libro ſuperiori abunde colligere licet, tum infra pluribus docebitur. Hancque ob cauſam iſta alarum applicatio praecedenti longe anteferenda videtur.

§. 283. Inquiramus igitur quantum incrementum ſtabilitas nauis per alas hoc modo adhibitas capiat. Ponamus igitur ſectionis aqnae primitiuae AEBF momentum reſpectu axis AB eſſe $= I$, atque D denotare aream AEB ſeu ſemiſſem ſectionis primitiuae, erit vt ſupra vidimus $I = \frac{EF^2 . D}{\mu}$, vbi μ denotat numerum 9 vel 10. Quoniam nunc pars anterior EAF adiectis alis manet immutata, erit eius momentum reſpectu axis $AB = \frac{EF^2 . D}{2\mu}$, ſiquidem portiones EAB et EBF proxime aequales ponantur. Partis vero poſterioris, quae eſt rectangulum momentum reſpectu axis AB erit $= \frac{2}{3} CE^3 . BC = \frac{1}{12} BC . EF^3$ ex quo ſectionis aquae alis auctae momentum reſpectu axis longitudinalis AB erit $= \frac{1}{12} BC . EF^3 - \frac{D . EF^2}{2\mu}$. Quocirca ſi volumen carinae vocetur $= V$, habebitur ſtabilitatis reſpectu axis longitudinalis incrementum $= \frac{M . BC . EF^3}{12 V} - \frac{M . D . EF^2}{16 V}$ poſito $\mu = 9$.

§. 284. Quoniam EF circiter per medium ſectionis aquae tranſire cenſetur, erit area $EBF = D$, quae eadem proxime aeſtimatur $\frac{2}{3} BC . EF$, ita vt ſit $BC . EF = \frac{3 D}{2}$. Si ergo hic valor ſubſtituatur prodibit ſtabilitatis incrementum

mentum $= \frac{M \cdot EF^2}{V} (\frac{D}{8} - \frac{D}{18}) = \frac{5 M \cdot D \cdot EF^2}{72 V}$. Priſtina vero ſtabilitas ante alas has adiunctas erat $= M(\frac{I}{V} - OG) = M (\frac{D \cdot EF^2}{9 V} - OG)$: vnde ſtabilitas priſtina minor fuit quam $\frac{M \cdot D \cdot EF^2}{9 V}$, quae nunc augmentum accipit $= \frac{5 M \cdot D\, EF^2}{72 V}$ quod niſi interuallum OG valde ſit exiguum, maius eſt quam ſtabilitas praecedens. Ac ſi nauis ſine alis nullam omnino habuiſſet ſtabilitatem, alis adiiciendis aequireret ſtabilitatem $= \frac{5 M \cdot D \cdot EF^2}{72 V} = \frac{5}{12} M \cdot CD$ denotante CD profunditatem carinae, poſitoque $V = D \cdot CD$ et $EF = CD \sqrt{6}$ quae ſane ſtabilitas ſatis foret magna.

§. 285. Tali igitur alarum applicatione videmus non ſolum ſtabilitatem nauis inſignitur augeri, vt vel in ſolo incremento aequieſcere poſſimus, ſi ante nulla omnino ſtabilitas adfuiſſet, ſed etiam incommoda, quibus praecedens alarum appoſitio erat obnoxia, hic nullum habent locum. Primo enim motus nauis directus his alis non impeditur, quia reſiſtentia prorae iis non augetur; deinde in motu obliquo his ipſis alis nauis magis apta redditur, adverſus plagam venti progrediendi, eo quod declinatio a curſu directo diminuitur. Has igitur ob cauſas iſte modus alas applicandi illi priori, qui vulgo in vſu eſſe ſolet maxime eſt anteferendus. Quicquid autem ſit, etiam talis alarum applicatio multis laborat difficultatibus; niſi enim hoc eſſet, praeſtaret naues ſtatim ab initio ita fabricaſſe, neque per vitium ad tantam perfectionem deduci conveniret.

§. 286. Tria autem potiſſimum ſunt vitia, quae iſtiusmodi alarum annexio nauibus infert: quorum primum eſt, quod hoc modo centrum grauitatis ſectionis aquae nimium verſus puppim deducitur; quod quidem eſt vi-

tium non exigui momenti, quia hoc modo centrum gravitatis sectionis aquae de recta verticali per centrum gravitatis nauis transeunte remouetur. At quia ob hunc defectum oscillationes nauis tantum magis impetuosae redduntur, hoc vitium facile tolerari potest, dummodo alterum, quod in stabilitatis inopia versatur, tollatur. Alterum autem vitium quod cum ista alarum applicatione est coniunctum maioris est momenti; cum enim ob inclinationes nauis hae alae ad notabilem profunditatem porrigi debent, iis allisio aquae ad gubernaculum vehementer impedietur. Atque tertio ob eandem rationem centrum magnitudinis carinae versus puppim perducitur, quod centrum grauitatis sequi debebit; quo nauibus quae vento propelluntur, ingens incommodum affertur.

§. 287. Quae cum ita sint, eo maior opera et cura est adhibenda, ne naues, quando iam sunt fabricatae, tali emendatione indigeant, quod quidem nunc perspectis caussis stabilitatem efficientibus haud difficulter praestabitur. Quae enim emolumenta ex correctione modo descripta consequuntur, ea quatenus non aliis difficultatibus sunt permista, praestabit statim ab initio nauibus inducere, quam tum demum, cum vitium iam est commissum. In isto autem capite satis ostendimus, quomodo cum fabricatione nauium tum oneratione stabilitas satis magna possit obtineri; praecipuum vero momentum in constructione nauium est situm. Nam quantum oneratione profici potest, id plerumque non satis ad arbitrium tractari licet, ob circumstantias externas, ad quas naues accommodatas esse oportet; quibus quantum stabilitatem augeri concedatur, iam ante prospiciendum, ne nimis magnum subsidium inde expectetur.

Caput

»⁂) o (⁂«

Cap. IV.

DE MOTV NAVIVM OSCILLATORIO.

§. 288.

Omnes motus, quos nauis aquae commissa recipere valet, commodissime ad duas classes reuocantur, quarum prima eos complectitur motus, quibus stabilitas nauis reluctatur, et qui ita sunt comparati, vt iis status nauis aequilibrii continuo perturbetur. Huiusmodi motus oscillationum sunt similes, cum enim nauis a vi quacunque ex situ aequilibrii fuerit depulsa, ob stabilitatem sese in situm aequilibrii restituere conabitur, propter motum autem conceptum in situ aequilibrii, quando eum attigerit acquiescere non poterit, verum in plagam oppositam ex eo declinabitur, quoad motus fuerit consumtus; atque hoc modo circa statum aequilibrii eundo ac redeundo oscillationes absoluet. Motus vero, qui ad alteram classem pertinent, statum aequilibrii non perturbant, sed saluo situ aequilibrii absoluuntur, cuiusmodi sunt motus nauis progressiuus, ac rotatorius circa axem verticalem, qui vi gubernaculi produci solet.

§. 289. In capitibus praecedentibus naues in quiete adhuc constitutas considerauimus, ac primo quidem definiuimus, quomodo naues comparatas esse oporteat, vt in situ erecto aequilibrium teneant, tum vero quomodo efficiendum sit docuimus, vt situs aequilibrii sufficienti stabilitate simul sit praeditus: atque in vtroque negotio expo-

ſuimus, quomodo tam conſtructio nauium quam oneratio dirigi debeant, vt his requiſitis maxime ſatisfiat. Nunc igitur pergimus ad naues in motu poſitas conſiderandas, inueſtigaturi, quales regulae inde cum ad conſtructionem tum ad onerationem conſequantur, vt naues ad motum recipiendum maxime idoneae reddantur. Cum enim hoc libro in formam nauium perfectiſſimam inquiramus, ſingulos ſtatus, quibus naues exponi ſolent, ordine percurrere, regulasque perſcrutari conuenit, quibus obſeruatis nauis in quolibet ſtatu ſecundum intentionem atque ad vſum maxime accommodate verſetur.

§. 290. In praeſenti igitur capite motum nauium oſcillatorium examini ſubiicere conſtituimus, eo quod is ſine potentiis ſollicitantibus, de quibus demum poſtea tractabitur, cognoſci queat. A quacunque enim cauſa nauis ex ſitu ſuo aequilibrii depellitur, vi ſua propria ſe reſtituere conabitur oſcillationesque peraget, ex quo praecipua oſcillationum cauſa in vi nauium propria non externa eſt ſita. Contra autem res ſe habet in motibus alterius claſſis, qui ſine potentiis ſollicitantibus externis nec perſeuerare nec commode pertractari poſſunt, quamobrem eos motus poſtea euoluemus. Circa motum igitur nauium oſcillatorium hoc praecipue requiri ſolet, vt is ſit maxime tranquillus, qui enim ſibi ideam nauis omnibus numeris abſolutae fingit, huius proprietatis non obliuiſcetur, vt oſcillationes minime ſint impetuoſae, ſed quantum fieri poteſt tranquillae. Cui quidem requiſito ſatisfieri palam eſt, ſi oſcillationes reddantur maxime tardae, perſpicuum enim eſt, quo oſcillationes ſint tardiores, eo minus eas fore vehementes atque tales quales a perfecta naui requiruntur.



§. 291.

§ 291 Cum autem naues duplici modo ex ſitu aequilibrii depelli queant, altero ſcilicet ſi nauis vel magis vel minus aquae immergitur, quam ſitus aequilibrii poſtulat, altero vero ſi nauis circa axem quempiam horizontalem inclinetur, duo quoque genera oſcillationum omnis nauis recipiet. Oſcillationes nimium primi generis orientur, ſi nauis ex aqua attollatur vel deorſum deprimatur; hinc enim nauis alternatim in aqua deſcendet et aſcendet, donec omnis motus fuerit conſumtus, hasque oſcillationes vocabimus verticales. Alterius vero generis oſcillationes oriuntur, ſi nauis vi quacunque circa axem horizontalem fuerit inclinata, tum enim nauis ob ſtabilitatem, quae eſt vis ſeſe in aequilibrium reſtituendi, motu pariter oſcillatorio agitabitur, donec tandem in ſitu aequilibrii acquieſcat. Hae ergo oſcillationes fient circa axem aliquem horizontalem, eumque vel fixum vel variabilem, prout inclinatio eſt facta, priori caſu oſcillationes exiſtunt ſatis regulares, poſteriori vero confuſae, quemadmodum haec fuſius in ſuperiori libro ſunt expoſita.

§. 292. Oſcillationes has tam verticales, quam eas, quae fiunt circa axem aliquem horizontalem, hic vehementer exiguas et quaſi infinite paruas contemplabimur. Nam vti in omni oſcillationum genere, ita etiam in hoc oſcillationes maiores plerumque fiunt admodum irregulares, neque inter ſe iſochronae deprehenduntur, cum contra minimae oſcillationes non ſolum conſtantiorem legem ſequantur, ſed etiam multo facilius definiri queant. Ad noſtrum praeterea inſtitutum ſufficit oſcillationes tantum minimas conſiderare, quodſi enim hae fuerint factae tardiſſimae ſeu maxime tranquillae, nullum eſt dubium, quin etiam oſcillationes

tiones maiores futurae ſint minime impetuoſae. Poſitis igitur oſcillationibus infinite paruis, ſectio aquae neque quantitate neque figura mutabitur, ex quo tam calculus oſcillationumque dimenſio facilior euadet, quam ipſae oſcillationes ſimpliciorem magisque vniformem legem ſequentur; quod fieri non poſſet, ſi variabilitas ſectionis aquae in computum duci deberet.

§. 293. Quemadmodum autem ad aequilibrium conſtituendum duae res requiruntur, primum nempe tantum nauis volumen aquae ſubmerſum, cuius ſi ex aqua conſtaret, pondus aequale eſſet ponderi nauis; ac deinde vt centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae vtrumque in eadem linea recta verticali ſit poſitum: ita etiam dum nauis oſcillationibus peragendis in ſtatum aequilibrii tandem peruenit, vel quantitas voluminis ſubmerſi tantum mutatur, vel poſitio rectae lineae centra grauitatis ac magnitudinis iungentis, vel vtrumque. Oſcillationes illas, quibus alterutrum tantum mutatur, vocabimus puras, illas autem quibus vtrumque mutatur mixtas. Ita oſcillationes verticales erunt purae, quando inter oſcillandum tantum mox maius mox minus volumen aquae immergitur, perpetuo autem recta iungens centra grauitatis et magnitudinis manet verticalis. Similique modo oſcillationes alterius generis erunt purae, ſi continuo aeque magnum nauis volumen in aqua verſatur, ſolaque recta iungens centra grauitatis ac magnitudinis ſitum ſuum permutat.

§. 294. Ponamus iam, vt initium ab oſcillationibus verticalibus faciamus, nauem aquae vel profundius immergi, vel ex aqua extrahi, ita tamen vt ſectio aquae de nouo

orta

orta priori ſit parallela; niſi enim nauis tali motu ex ſtatu aequilibrii deturbetur, oſcillationes verticales oriri non poterunt. Quodſi autem nauis motu verticali vel magis vel minus immergatur, quam ad aequilibrium requiritur, tum ob volumen aequilibrio non conueniens aquae ſubmerſum orientur quidem oſcillationes verticales; at ſi ſimul voluminis aquae ſubmerſi centrum magnitudinis extra rectam verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem excedat, tum etiam nauis circa axem quendam horizontalem inclinabitur ſimulque oſcillationes alterius generis conficiet. Cum igitur tali duplici motu oſcillatorio tranquillitas nauis vehementer deſtruatur, nauem perfectam ita comparatam eſſe oportebit, vt vtriusque generis oſcillationes puras abſoluere queat.

§. 295. Quodſi enim neque oſcillationes verticales perfici queant, quin ſimul oſcillationes circa axem horizontalem eueniant, nec hae ſine illis exiſtere poſſint, quaelibet cauſa nauem ex ſitu aequilibrii declinans duplicem motum oſcillatorium producet; ex quo motus parum tranquillus naſcitur. Neque vero tantum ob motum duplicem oſcillationes magis fiunt violentae, ſed quod praecipuum eſt inaequalitas temporum oſcillationum, qua fit, vt motus vtriusque generis modo magis modo minus conſpirent, motum maxime perturbatum atque impetuoſum producit. Quamobrem hoc tanquam praecipuum huius capitis requiſitum eſt ſtabiliendum, quo nauis ita fabricatas eſſe oportet, vt ad ambo oſcillationum genera ſeorſim ſuſcipienda ſint aptae: hocque requiſitum obtinetur ſi centrum grauitatis ſectionis aquae in eadem recta verticali fuerit ſitum, in qua cum centrum grauitatis nauis tum

centrum magnitudinis carinae iacent, quam proprietatem nauibus iam ſupra cap. II. induximus.

§. 296. Perſpicuum autem eſt, ſi nauis motu verticali aquae vel magis immergatur, vel ex aqua aliquantillum extrahatur, centrum magnitudinis partis ſubmerſae in recta verticali per centrum grauitatis totius nauis tranſeunte non manere, niſi centrum grauitatis ſectionis aquae in eadem recta ſit poſitum. Hanc itaque ob rem in conſtructione nauium haec regula minime eſt negligenda, quae poſtulat, vt centrum grauitatis ſectionis aquae, centrum grauitatis nauis, et centrum magnitudinis carinae in vna eademque recta verticali contineantur. Quemadmodum autem huic requiſito per nauium figuram ſatisfieri queat iam ſupra in capite ſecundo fuſius expoſuimus, vbi omnes ſpecies, ad quas nauium figurae reduci queant, euoluimus. Eo maioris vero momenti eſt hoc requiſitum, quod ſine eo non ſolum oſcillationes verticales purae exiſtere nequeant, ſed etiam oſcillationes, quae fiunt circa axem aliquem horizontalem.

§. 297. Haec vero regula eatenus tantum eſt obſeruanda, quatenus aliis regulis maioris momenti non aduerſatur. Quoniam enim haec regula ex tranquillitate motus oſcillatorii originem traxit, facile intelligitur, eam poſt poni debere aliis regulis, quae vel ex ſtabilitate, vel curſus celeritate, vel diminutione declinationis a curſu directo conſequuntur. Ante omnia enim incolumitas nauis maxime eſt ſpectanda, atque efficiendum vt nauis tuto ac ſine periculo in vndis verſari queat; tum ſequitur curſus nauis, vt is quantum fieri poteſt celer reddatur, atque ſi nauis vento propellatur, aduerſus plagam venti maxime dirigi

poſſit.

possit. His nimirum primariis requisitis cum fuerit satisfactum, videndum est, quantum reliquis, quae incolumitatem et cursus celeritatem minus respiciunt, sed commoditatis gratia desiderantur, satisfieri queat. Neque enim conueniret requisita maioris momenti in gratiam aliorum, quae non absolute sunt necessaria, negligi.

§. 298. Repraesentet igitur figura AEDFB nauem aquae in aequilibrio insidentem, cuius sectio aquae EF ita sit comparata; vt eius centrum grauitatis C in illa ipsa recta verticali CD sit positum, in qua cum centrum grauitatis nauis tum centrum magnitudinis partis submersae est constitutum. Immergatur iam haec nauis motu verticali aquae profundius, vt abeat in situm *aedfb*, in quo etiamnum recta iungens centra grauitatis nauis et magnitudinis partis submersae E*d*F erit verticalis. In hunc ergo situm peruenit nauis descendendo per spatium C*c*, ex hocque situ in statum aequilibrii reuertetur ascendendo per idem spatium C*c*. Quoniam enim in hoc situ *aedfb* centra grauitatis et magnitudinis in recta verticali sunt constituta, aliam vim nauis non patietur ab aqua, nisi qua verticaliter sursum in situm aequilibrii pellatur. Quia vero oscillationes tantum infinite paruas contemplamur, omnes sectiones aquae, quas nauis durante motu per spatium C*c* successiue induet, inter se aequales erunt. Tab. XI. fig. 4.

§. 299. Ponamus totius nauis pondus $= M$, volumen partis submersae, cum tenet situm aequilibrii, EDF $= V$, amplitudinem sectionis aquae seu aream eius $= 2D$, et spatium $Cc = x$, quo nauis aquae profundius est immersa. Hoc igitur situ *aedfb* aquae submersa est nauis volumen $= V + 2Dx$, maius, quam status aequilibrii

V 2 requi-

requirit, ex quo vis aquae nauem ſurſum vrgens erit $= M + \frac{2MDx}{V}$. Cum igitur nauis proprio pondere deorſum nitatur vi $= M$, nunc actu ſurſum ſollicitabitur vi $= \frac{2MDx}{V}$; quae ergo vis proportionalis eſt ſpatio x, quod navi eſt abſoluendum, donec ſitum aequilibrii attingat. Ex quo intelligitur, oſcillationes, quas nauis aſcendendo ac deſcendendo alternatim perficiet, inter ſe eſſe iſochronas. Quodſi nunc ponamus longitudinem penduli ſimplicis iſochroni eſſe $= L$, debebit ſollicitatio qua nauis in ſitu *adb* conſtituta ſurſum vrgetur eſſe $= \frac{Mx}{L}$, quae cum ſit $= \frac{2MDx}{V}$ erit $L = \frac{V}{2D}$. Longitudo igitur penduli iſochroni aequalis eſt altitudini cylindri, cuius baſis eſt ſectio aquae, et ſoliditas aequalis volumini partis aquae ſubmerſae in ſtatu aequilibrii.

§. 300. Tempus igitur quo nauis huiusmodi oſcillationes abſoluens ex ſitu imo ad ſummum vel contra pertingit aequale erit tempori vnius oſcillationis ſeu itus reditusue penduli ſimplicis, cuius longitudo eſt $= \frac{V}{2D}$. Cum ergo in omni naui proxime ſoleat eſſe $V = D.CD$ vti ſupra animaduertimus, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{CD}{2}$, ex quo ſemiſſis profunditatis CD ad quam nauis aquae immergitur proxime dabit longitudinem penduli iſochroni: ſi quidem carina deorſum ita conuergat, vt volumen ipſius aequale ſit cylindro cuius baſis eſt ſectio aquae et altitudo ſemiſſis profunditatis CD, vt fere fieri ſolet. Quare cum naues ad ſummum immergi ſoleant aquae ad profunditatem circiter 24 pedum, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni 12 pedum, hincque maxime naues ſuas oſcillationes verticales abſoluent binis propemo-

modum minutis secundis. Diuersarum vero nauium tempora oscillationum verticalium tenebunt rationem subduplicatam profunditatum, ad quas naues aquae immerguntur.

§. 301. Si oscillationes has quam tardissimas efficere velimus, quantitatem $\frac{V}{2D}$ maximam reddi oporteret. Quoniam autem volumen carinae V per pondus nauis, quod datum esse ponitur, determinatur, idque propterea immutari nequit, sectionem aquae 2 D minimam fieri oporteret. Quoniam autem stabilitas nauium requirit, vt sectio aquae quam fiat amplissima, tarditas oscillationum verticalium obtineri non poterit, nisi stabilitas diminuatur. Neque vero stabilitati parum detraxisse sufficeret ad oscillationes tardiores reddendas, sed si eas vel vno minuto secundo lentiores reddere vellemus, stabilitas omnino euanesceret, situsque aequilibrii labilis fieret. Quamobrem minime erit consultum harum oscillationum verticalium rationem tantum habere in constructione nauium, sed potius praestabit eas maxime celeres admittere, vt stabilitas eo maior efficiatur. Accedit ad hoc, quod hae oscillationes parum durent, moxque euanescant, ob ingentem resistentiam quam nauis in descensu offendit; ex quo celeritas harum oscillationum ne in considerationem quidem duci meretur.

§. 302. Huius de oscillationibus nauium verticalibus tractationis, quae in libro primo erat praetermissa, commonefactus sum a Viro Celeb. Ioh. Bernoulli, cum ipsi meditationes meas de oscillationibus, quae circa axem horizontalem fiunt, et quae in nauigatione maxime sunt spectandae, perscripsissem. Arbitratur autem Vir Celeb. harum oscillationum verticalium insignem vsum esse posse

ad pondera nauium per experientiam inueſtiganda. Quodſi enim cognita ſit area ſectionis aquae, quam poſuimus $= 2D$, atque nauis ad oſcillationes huiusmodi verticales perficiendas impellatur, obſeruari debet duratio harum oſcillatiorum, ex iisque longitudo penduli ſimplicis iſochroni definiri; quae ſi reperta fuerit $= L$, erit volumen carinae $V = 2DL$, ex quo ſimul pondus nauis M innoteſcit. Verum iſta ponderis nauis determinatio non ſatis exacta videtur, primo quod ſectionis aquae centrum grauitatis in ipſa illa recta verticali centra grauitatis nauis et magnitudinis carinae iungente ſitum aſſumitur; deinde quod hae oſcillationes non tam diu durant, vt longitudo penduli ſimplicis iſochronii ſatis exquiſite definiri poſſit.

§. 303. Quanquam iſta penduli ſimplicis iſochroni determinatio tantum ad oſcillationes minimas atque adeo infinite paruas ſpectare videtur, tamen etiam pro maioribus oſcillationibus valere poteſt, ſi quidem circumſtantiae hypotheſibus aſſumtis non aduerſentur. Poſuimus enim inter oſcillandum ſemper aeque magnam nauis ſectionem horizontalem in ſuperficie aquae eſſe poſitam, quodſi igitur idem in oſcillationibus maioribus eueniat, eae oſcillationes eandem tenebunt legem, minimisque erunt iſochronae. Haec autem proprietas locum habebit, ſi nauis circa ſectionem aquae per ſatis notabile interuallum tam ſupra quam infra eam fuerit cylindriforme, ſeu omnes ſectiones horizontales per hoc interuallum habeat inter ſe aequales, hoc enim ſi acciderit, oſcillationes etiam maiores erunt iſochronae, dummodo inter oſcillandum portio nauis in hoc interuallo contenta perpetuo in ſuperficie aquae verſetur. Pro oſcillationibus autem verticalibus corporum

porum omnino cylindricorum ista regula sine vlla exceptione valebit.

§. 304. Expositis oscillationibus nauium verticalibus peruenimus ad alterum oscillationum genus, quae circa axem aliquem horizontalem absoluuntur; in quibus iterum discrimen ante omnia obseruari meretur, vtrum eae sint purae an oscillationibus verticalibus contaminatae. Purae scilicet erunt istiusmodi oscillationes, quando inter oscillandum centrum grauitatis nauis immotum persistit, hoc est neque ascendit neque descendit, contra vero oscillationes erunt impurae, seu oscillationibus verticalibus mixtae, si inter oscillandum centrum grauitatis nauis vel ascendat vel descendat. Hoc enim casu ab alia vi diuersa centrum grauitatis in situm debitum redigetur, ab alia autem conuersio circa axem horizontalem producetur, ex quo motus orietur mixtus ex oscillatorio verticali, et oscillatorio circa axem horizontalem; atque hinc motus ex vtroque compositus eo magis erit irregularis et succussionibus refertus, quo magis ambo illi motus oscillatorii a se inuicem discrepabunt.

§. 305. Discrimen autem horum duorum oscillationum generum non solum in ipsa motus diuersitate est positum, sed etiam vires, quibus eae oscillationes producuntur maxime inter se differunt. Cum enim nauis ex situ aequilibrii deturbatur, restitutio oritur a duabus viribus, quarum altera est ipsum nauis pondus cuius directio deorsum tendit ac per centrum grauitatis nauis transit, altera vero ex pressione aquae resultat, verticaliter sursum est directa, atque per centrum magnitudinis partis submersae transit. Nisi igitur hae duae vires se mutuo destruant, id

quod

quod in ſtatu aequilibrii accidit, vel eae inter ſe erunt inaequales vel tantum directiones non in eandem rectam incident, vel vtrumque. Ex inaequalitate virium iſtarum oriuntur oſcillationes verticales purae, ſi quidem directiones incidant in eandem rectam; ſin autem vires fuerint quidem aequales, at directiones diſcrepent, orientur oſcillationes circa axem quempiam horizontalem purae. At ſi nec vires fuerint aequales, nec directiones coincidant, tum oſcillationes orientur mixtae ex verticalibus, atque alteris, quae circa axem quendam horizontalem perficiuntur.

§. 306. Quoniam igitur ad eas oſcillationes, quae circa axem horizontalem fiunt, puras producendas requiritur, vt centrum grauitatis quiescat, vel ſaltem a ſuperficie aquae aequaliter maneat remotum, axis ille horizontalis, circa quem oſcillationes peraguntur, per ipſum centrum grauitatis tranſire debebit. Hoc vero etiam natura motus poſtulat; omnes enim vires, quae corpori cuipiam motum gyratorium imprimere valent, id circa axem per centrum grauitatis tranſeuntem conuertunt; vti in libro praecedente cumulate eſt oſtenſum. Vt igitur iſtae oſcillationes purae exiſtant, neceſſe eſt, vt, dum nauis aliquantillum circa axem horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem conuertitur, volumen nauis, quod in aqua verſatur neque maius fiat neque minus, quam erat in ſtatu aequilibrii. Si enim vel maius volumen nauis vel minus durante conuerſione aquam ſubiret, tum aequalitas inter pondus nauis et vim ex preſſionibus aquae reſultantem ceſſaret, atque oſcillationes ſimul verticales orirentur.

§. 307.

§. 307. Dum autem nauis circa axem quemcunque horizontalem per centrum grauitatis transeuntem aliquantillum conuertitur seu infinite parum (hic enim tantum oscillationes infinite paruas consideramus) volumen perpetuo nauis aequale in aqua versabitur, si centrum grauitatis sectionis aquae centro grauitatis verticaliter immineat. Quamobrem si situs nauis aequilibrii ita fuerit comparatus, vt recta verticalis, in qua cum centrum grauitatis nauis, tum centrum magnitudinis partis submersae est situm, simul per centrum grauitatis sectionis aquae transeat, tum nauis apta erit ad oscillationes circa axem horizontalem puras suscipiendas. Supra autem vidimus eandem hanc proprietatem requiri ad oscillationes verticales puras producendas: ex quo haec proprietas eo maiori cura nauibus induci debebit. Atque hanc ob rem in capite secundo circa inuentionem figurarum idonearum, ad quas carinae nauium formentur, in hoc praecipue sumus occupati, vt centrum grauitatis sectionis aquae verticaliter immineat centro magnitudinis carinae; huiusque praecepti vsus in hoc potissimum constat, vt oscillationes nauium maxime tranquillae reddantur.

§. 308. Quodsi igitur naui eiusmodi figura tribuatur, vt in statu aequilibrii centrum grauitatis sectionis aquae in eandem rectam verticalem incidat, in qua posita sunt centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis carinae, tum nauis non solum apta erit ad oscillationes verticales puras absoluendas, sed etiam ad oscillationes circa axem quemcunque horizontalem puras peragendas. Sin autem centrum grauitatis sectionis aquae extra rectam illam verticalem cadat, tum nauis neutrius generis oscil-

lationes suscipere poterit, quin simul alterius generis oscillationes sint permixtae. Nauis scilicet, a quacunque vi ex statu aequilibrii declinetur, duplicem statim motum oscillatorium recipiet, alterum verticalem, alterum circa axem quempiam horizontalem, neque vllo modo effici poterit, vt alterius tantum generis oscillationes puras perficiat.

§. 309. Vtilitas autem huius requisiti, quo volumus, vt centrum grauitatis sectionis aquae verticaliter immineat cum centro grauitatis nauis, tum centro magnitudinis partis submersae, per se quidem satis perspicua, cum eo naues ad oscillationes vtriusque generis puras absoluendas accommodentur, quo ipso motus oscillatorius magis erit tranquillus minusque turbulentus. Magis vero vtilitas elucebit, si consideremus oscillationes verticales per breue admodum tempus durare, alteras vero, quia resistentia minus obest, diutius manere. Quodsi igitur oscillationes verticales purae effici nequeant, eae non solum magis erunt impetuosae quam purae, sed etiam diutius durabunt, ob oscillationes horizontales cum iis permixtas. Deinde oscillationes circa axem horizontalem frequentissime occurrunt ab appulsu vndarum ad latera nauis; ex quo si eae semper coniunctae essent cum oscillationibus verticalibus, multo violentioribus succussionibus nauis perpetuo foret exposita. Has igitur ob rationes iure nobis postulare videmur, vt sectionis aquae centrum grauitatis in eam ipsam rectam verticalem, in qua posita sunt centra grauitatis nauis et magnitudinis carinae, incidat.

§. 310. Assumamus igitur naues ita fabricatas vti capite secundo exposuimus, atque oscillationes quae oriuntur

tur a vi quacunque horizontali, qua centrum grauitatis nauis neque attollitur nec deprimitur, fient circa axem horizontalem, eruntque purae, neque aſcenſu deſcenſuue centri grauitatis perturbatae. Huiusmodi ergo oſcillationibus durantibus centrum grauitatis nauis vel penitus quieſcet vel mouebitur ſecundum directionem horizontalem vniformiter in directum. In ſuperiori enim libro oſtendimus huiusmodi motus gyratorios in quolibet corpore perinde ſe habere, ſiue corporis centrum grauitatis quieſcat, ſiue progrediatur vniformiter in directum. Quocirca ad oſcillationes nauium definiendas non habemus neceſſe ad motum eius progreſſiuum attendere, ſed vtcunque nauis motu progreſſiuo feratur, poterimus tuto centrum grauitatis tanquam quieſcens conſiderare.

§. 311. Conſtituto igitur nauis centro grauitatis in quiete oſcillationes perficientur circa axem quendam horizontalem per ipſum centrum grauitatis tranſeuntem. Quare cum iſtiusmodi axes horizontales numero infiniti per centrum grauitatis nauis duci queant, innumerabiles orientur ſpecies huius oſcillationum generis. Supra vero in praecedente libro oſtendimus harum oſcillationum alias eſſe regulares alias irregulares; regulares ſcilicet appellamus eas, quae quamdiu durant, circa eundem axem fixum et immobilem abſoluuntur; irregulares vero, in quibus axis ipſe circa quem motus fit, perpetuo permutatur, ita vt initium cuiusque oſcillationis circa alium inſtituatur axem, medium circa alium, finisque circa alium. Harum idcirco oſcillationum irregularium determinatio maxime eſt difficilis, ob ipſius axis mutabilitatem, eamque propterea nequidem ſuſcepimus; verum tamen eae; ſi oſcillationes

regulares fuerint cognitae, satis prope ex istis colligi poterunt.

§. 312. In omni autem naui duae dantur species oscillationum regularium, quarum altera axem habet longitudinalem per centrum grauitatis nauis a puppi ad proram porrectum; altera vero circa axem latitudinalem per centrum grauitatis nauis pariter ductum absoluitur: haeque binae oscillationum species, quia in nauibus maxime conspiciuntur, prae reliquis imprimis considerari merentur. Oscillationes igitur, quae circa axem longitudinalem absoluuntur ita sunt comparatae, vt quiescentibus prora et puppi latera nauis alternatim eleuentur atque deprimantur; hicque oscillatorius motus a Gallis *le Roulis* appellari solet. In altera vero oscillationum specie, circa axem latitudinalem fixum facta, alterno motu prora ac puppis eleuantur et deprimuntur, hicque motus Gallis voce *le Tangage* insignitur. Vtriusque autem motus oscillatorii cognitio in nauigatione maximi momenti esse iure censetur.

§. 313. Antequam autem vtrumque hunc motum oscillatorium seorsim fusius prosequamur quid vtrique commune sit videamus. Ac primum quidem se offert isochronismus vtriusque harum oscillationum speciei, quo oscillationes minimae instar penduli aequalibus temporibus absoluuntur. Non quidem oscillationes, quae circa axem longitudinalem fiunt, et eae, quae circa axem latitudinalem peraguntur, aequalibus temporibus absoluuntur, sed in eadem naui oscillationes omnes circa axem longitudinalem inter se sunt isochronae, dummodo sint minimae, etsi inter se sunt inaequales. Pari modo oscillationes circa axem latitudinalem minimae inter se sunt isochronae. Ac

prae-

praeterea eadem proprietas competit in oscillationes irregulares quae circa alios axes mutabiles perficiuntur, quanquam istae oscillationes ob axem mutabilem non facile distincte obseruari possunt.

§. 314. Deinde vtriusque speciei oscillationes simili modo definiuntur; cum enim sint isochronae motus earum commodissime cognoscetur, si longitudo penduli simplicis assignetur, quod suas oscillationes aequalibus temporibus absoluat. Longitudo autem penduli simplicis isochroni pro vtraque oscillationum specie similiter inuenitur. Scilicet ad oscillationes circa axem longitudinalem determinandas, totius nauis momentum respectu huius axis quaeri oportet, quod per stabilitatem nauis respectu eiusdem axis longitudinalis diuisum praebebit longitudinem penduli simplicis isochroni. Pari modo si momentum nauis respectu axis latitudinalis per centrum grauitatis ducti diuidatur per stabilitatem nauis respectu eiusdem axis latitudinalis, prodibit longitudo penduli simplicis, cuius motus oscillatorius congruet, cum oscillationibus nauis, quae circa axem latitudinalem peraguntur.

§. 315. Vt igitur motum oscillatorium, qui fit ad latera nauis circa axem longitudinalem per centrum grauitatis nauis transeuntem definiamus, ante omnia stabilitatem nauis respectu axis longitudinalis nosse oportebit: quae cum sit productum ex pondere nauis M in rectam quampiam lineam quae sit $= f$, erit ea $= Mf$. Deinde momentum totius nauis respectu eiusdem axis longitudinalis obtinebit, si singulae nauis particulae multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab illo axe longitudinali atque omnia haec producta in vnam summam colligantur:

ex quo momentum totius nauis erit productum ex tota nauis pondere M in quadratum rectae cuiusdam lineae, quae ſit $= g$, ideoque $= Mg^2$. Ex his longitudo penduli ſimplicis iſochroni oſcillationibus, quae fiunt circa axem longitudinalem erit $= \frac{g^2}{f}$.

§. 316. Quodſi ergo ſtabilitas nauis reſpectu huius axis longitudinalis fuerit nulla, ſeu $f = o$, oſcillationes erunt infinite lentae, hoc eſt nullae, id quod ipſa ſtabilitatis natura declarat. Namque ſi nauis nullam habeat ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis atque aliquantillum ad alterutrum latus inclinetur, nulla fiet reſtitutio, hincque nullus motus oſcillatorius, quod ipſum longitudo penduli ſimplicis infinete magna indicat. Quo maior autem fuerit ſtabilitas nauis, eo minus prodit pendulum iſochronum, ex quo aucta ſtabilitate oſcillationes celeriores euadunt, ſi quidem momentum totius nauis Mg^2 maneat idem. Quanquam autem oſcillationes lentae celerioribus anteferendae ſunt, tamen ideo ſtabilitatem nauis diminui non conuenit; ſtabilitas enim eſt requiſitum nauis eſſentiale, ſine quo ſubſiſtere omnino nequit, et hanc ob rem minime eſt conſultum ſtabilitatem imminuere, vt oſcillationes tantum tardiores obtineantur.

§. 317. Stabilitate autem nauis illaeſa oſcillationes tardiores effici poſſunt, ſi longitudo rectae g ſeu momentum totius nauis reſpectu axis longitudinalis augeatur. Pendet vero haec quantitas g plurimum ab oneratione nauis, cum Mg^2 ſit ſumma omnium productorum, quae oriuntur ſi ſingula ponduscula ex quibus nauis conſtat, per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe longitudinali multiplicentur. Quamobrem oſcillationes tardiores reddentur, ſi onera

ra quantum fieri poteſt ab axe hoc longitudinali remoueantur. Atque hinc noua naſcitur regula pro oneratione nauium, quam obſeruare eatenus iuuabit, quatenus cum aliis regulis conſiſtere poteſt. Minime enim conduceret alias regulas in gratiam huius infringere, cum haec tantum commoditatem nauigationis habeat propoſitam.

§. 318. Praeterea autem vſus, cui nauis deſtinatur, ac reliquae regulae, ſecundum quas onerationem dirigi oportet, parum admodum quantitatem g augeri permittunt. Quodſi enim omnia onera per interuallum vnius pedis ab axe longitudinali magis remoueantur, atque adeo quantitas g vno pede maior reddatur, id quod tamen ne in maximis quidem nauibus praeſtari queat, tamen vix ſenſibilis retardatio oſcillationum exinde oriretur, ſaltem non tanta, ob quam mereantur tot translocationes ſuſcipi. Sunt enim manente ſtabilitate oſcillationum tempora vt interualla g, quare ſi iam ante fuerit g aliquot pedum, atque remotione onerum g augeatur vnitate, oſcillationes tardiores fierent ſui parte $\frac{1}{g}$, quae retardatio in vaſtis nauibus, vbi g complures pedes denotat non eſt ſenſibilis, in minoribus autem augmentum vnius pedis obtineri nequit.

§. 319. Haec omnia, quae circa oſcillationes laterales ad axem longitudinalem relatas notauimus, valent quoque pro oſcillationibus, quae circa axem latitudinalem peraguntur, neque id circo pro his oſcillationibus easdem animaduerſiones repeti neceſſe eſt. Quodſi enim ſtabilitas nauis reſpectu axis latitudinalis ponatur $= Mb$, ac momentum nauis reſpectu axis eiusdem latitudinalis per centrum grauitatis nauis ducti ponatur $= Mk$, erit longitudo penduli ſimplicis oſcillationibus hisci iſochroni $= \frac{k^2}{b}$.

Quod

Quod ergo in casu praecedenti erat g, hic nobis est k, et quod ibi erat f, hic est h; vnde factis his substitutionibus, locoque vocis longitudinalis posita voce latitudinalis, obseruationes factae circa piorem oscillationum speciem traducentur ad oscillationes, quae fiunt circa axem latitudinalem.

§. 320. Vnum tamen discrimen inter oscillationes circa axem longitudinalem et latitudinalem intercedit, cuius ratio est habenda. Quoniam nempe omnes naues ita fabricari solent, vt si vlla sit stabilitas respectu axis longitudinalis, stabilitas respectu axis latitudinalis per se fiat vehementer magna; quemadmodum etiam supra ostendimus stabilitatem respectu axis latitudinalis multis vicibus excedere stabilitatem respectu axis longitudinalis seu quantitatem h multum excedere quantitatem f. Ob hanc igitur rationem oscillationes circa axem latitudinalem fierent multo celeriores; at ex altera parte momentum nauis respectu axis latitudinalis multo fit maius quam momentum respectu axis longitudinalis, ob onera in puppi ac prora collocata, quae ab axe latitudinali valde distant, hancque ob rationem in tarditate oscillationum per momentum compensabitur, quod per stabilitatem detrahitur.

§. 321. Definiamus paulisper quantum circumstantiarum incertitudo permittit, ipsam penduli simplicis isochroni longitudinem, vt quodammodo duratio oscillationum quae tam circa axem longitudinalem quam latitudinalem fiunt, praeter propter innotescat. Ac contemplemur quidem naues maximas bellicas, in quibus si carinae profunditas ponatur $= c$, latitudo solet esse $= \frac{5}{2} c$ et longitudo $= 10\, c$. Ex praecedente autem capite constat

huius-

huiusmodi nauium ſtabilitatem reſpectu axis longitudiualis circiter fore $= \frac{1}{8}$ M c, ſtabilitatem vero reſpectu axis latitudinalis $= 10$ M c; quarum expreſſionum illa data opera ita eſt aſſumta, vt ſit iuſto minor. Ibi enim ad ſecuritatem nauium potiſſimum reſpeximus, cum praeſtaret ſtabilitatem actu maiorem deprehendi, quam calculus ſuppeditaret. Nunc igitur, quoniam incolumitas nauium nobis non amplius eſt propoſita, quippe quae in praecedente capite iam ſatis eſt confirmata, tuto ſtabilitatem maiorem aſſumere poterimus, non tam vt veritatem propius accedamus, quam vt oſcillationes potius celeriores reperiamus quam reuera ſunt. Pariter enim expedit ſi oſcillationes actu tardiores deprehendantur, quam calculus eas oſtenderit.

§. 322. Ponamus igitur ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis eſſe $= \frac{1}{4}$ Mc, qui valor fere ex §. 250. prodit ſi pro v non 10 ſed 8 ponamus; ſimilique modo ſit ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis $= 12$ M c, ita vt ſit $f = \frac{1}{4} c$ et $h = 12\, c$. Iam ad momentum nauis reſpectu axis longitudinalis inueniendum, notandum eſt onera quae maxime ab hoc axe diſtent et ad latera nauis ſint poſita, diſtare ab hoc axe interuallo ſemilatitudinis nauis $= \frac{5}{4} c$; cum autem maxima onerum copia propius ad hunc axem ſit ſita, media quaedam diſtantia pro quantitate g debebit accipi, maior tamen quam ſemiſſis $\frac{5}{8} c$, cum ſpatia magis remota ſint ampliora, atque quadrata harum diſtantiarum capi debeant, quo fit vt maiores diſtantiae magis praeualeant minoribus; ſumamus igitur c pro hac diſtantia media, ita vt ſit $g = c$; ex quo longitudo penduli ſimplicis oſcillationibus circa axem longitudinalem factis iſo-

chroni erit $= 4c$. Quare ſi c ſit 20 pedum circiter pro maximis nauibus, oſcillationes hae abſoluentur tempore circiter 5 minutorum ſecundorum.

§. 323. Ad tempora oſcillationum, quae circa axem latitudinalem peraguntur, cognoſcenda, aeſtimandum eſt momentum nauis reſpectu axis latitudinalis. Ab hoc autem ſi omnia onera maxime eſſent remota, diſtarent interuallo ſemilongitudinis nauis, quae eſt $= 5c$, cuius quantitatis ob rationes modo allegatas pars ſemiſſe maior loco k ſubſtitui debet. Ponamus igitur $k = 3c$, eritque longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{k^2}{h} = \frac{3}{4}c$, quae pluſquam quadruplo minor eſt, quam longitudo penduli ſimplicis pro oſcillationibus circa axem longitudinalem inventa. In nauibus itaque maximis quae habent $c = 20$ ped. oſcillationes circa axem latitudinalem circiter abſoluentur duobus minutis ſecundis. Hinc in qualibet naui, niſi eius figura maxime abhorreat a conſueta, oſcillationes circa axem latitudinalem multo erunt celeriores, quam eae quae fiunt circa axem longitudinalem.

§. 324. Expediamus hanc oſcillationum determinationem generalius, ponamusque, ſi carinae profunditas ſit $= c$, latitudinem carinae eſſe $= pc$ et longitudinem $= pqc$. Ponatur porro diſtantia inter centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis carinae $= \frac{1}{2}c$, ac pro numeris μ et ν ſumatur 8, erit ex §. 247. ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis $= Mc\,(\frac{pp}{8} - \frac{1}{2})$ ac ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis $= Mc\,(\frac{ppqq}{8} - \frac{1}{2}.)$ Deinde cum maxima onerum ab axe longitudinali diſtantia ſit $= \frac{1}{2}pc$, ſumantur huius duo trientes pro diſtantia media, ita vt ſit momentum nauis reſpectu axis longitudinalis $= \frac{1}{9}Mp^2c^2$. Atque ſimili

li ratione ponatur momentum nauis reſpectu axis latitudinalis $= \frac{1}{9} Mp^2 q^2 c^2$: qui valores a veris non multum diſcrepabunt, dummodo carina deorſum conuergat, vti in calculo ſtabilitatis aſſumſimus.

§ 325. His poſitis erit pro oſcillationibus circa axem longitudinalem penduli iſochroni ſimplicis longitudo $= \frac{8ppc}{9pp-36}$, pro oſcillationibus autem circa axem latitudinalem erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{8ppqqc}{9ppqq-36}$. Cum igitur ſit longitudo cuiusque nauis maior latitudine ſeu $q > 1$, erit $\frac{8ppc}{9pp-36}$ ſemper maior quam $\frac{8ppqqc}{9ppqq-36}$; exceſſus enim illius expreſſionis ſupra hanc eſt $= \frac{32ppc(qq-1)}{9(pp-4)(ppqq-4)}$. Quamobrem quo magis longitudo nauis ſuperat latitudinem, eo magis erunt celeres oſcillationes circa axem latitudinalem, ſi cum oſcillationibus circa axem longitudinalem comparentur. Vnde animaduerſio ante facta latiſſime patet, quod in omni naui oſcillationes circa axem latitudinalem celeriores ſint, quam oſcillationes circa axem longitudinalem.

§. 326. Intelligitur porro, quo maior latitudo nauis cum data carinae profunditate c coniungatur, quo pacto ſtabilitas nauis inſigniter augetur, eo celeriores fieri oſcillationes nauis. Cum enim longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus circa axem longitudinalem ſit $= \frac{8ppc}{9pp-36}$, ea fit infinita ſi capiatur $p = 2$, ſeu latitudo nauis duplo maior quam profunditas carinae c. Tribuendis vero ipſi p, continuo maioribus valoribus fit pendulum iſochronum breuius, donec tandem, ſi p infinitum ſeu ſaltem admodum magnum accipiatur, fiat longitudo penduli iſochroni $= \frac{8}{9} c$. Hoc autem facto longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus circa axem latitudinalem

 fiet

fiet quoque $= \frac{8}{9} c$. Ex quo, quo maior capiatur latitudo nauis respectu profunditatis carinae c eo magis ambae hae oscillationum species ad aequalitatem reducentur.

§. 327. Si plures naues diuersae magnitudinis cum ratione constructionis tum onerationis inter se perfecte similes concipiantur, ita vt p et q in omnibus eosdem valores obtineant, solaque profunditas carinae c discrepet, longitudo pendulorum oscillationibus vel circa axem longitudinalem vel latitudinalem factis isochronorum tenebit ipsam profunditatum carinae, hoc est laterum homologorum rationem. Ex quo tempora oscillationum, quas naves hae circa homologos axes conficient, erunt in ratione subduplicata laterum homologorum. Nauis igitur, quae quadruplo longior est quam alia nauis oscillationes peraget duplo tardiores. Quodsi autem in minoribus nauibus ipsi p maior valor tribuatur, quam obtinebat in maioribus, etiam ob hanc rationem oscillationes in nauibus minoribus euadent celeriores. Supra scilicet obseruauimus, vt maiores et minores naues aequalibus inclinationibus fiant obnoxia stabilitatem ponderi nauis oportere esse proportionalem, seu $c(\frac{pp}{8} - \frac{1}{2})$ esse debere quantitatem constantem puta i; ex quo fiet $pp - 4 = \frac{8i}{c}$ et $pp = \frac{4(2i+c)}{c}$; hinc ergo prodibit longitudo penduli oscillationibus circa axem longitudinalem isochroni $= \frac{4(2i+c)c}{9i} = \frac{8}{9} c + \frac{4cc}{9i}$.

§. 328. Tanta oscillationum celeritas praesertim in minoribus nauigiis, plerisque non parum suspecta videbitur, atque adeo experientiae contraria. Quando enim cymbas aliasque minoris formae nauiculas mari vndis agitato iactari videmus, motum quidem oscillatorium deprehendimus

ingentem ac vehementem, verum multo tardiorem quam vi theoriae noſtrae eſſe deberet. At ad ſcrupulum iſtum eximendum notari oportet agitationem iſtiusmodi nauicularum ab vndis maris prorſus eſſe diuerſam a motu oſcillatorio, quem hic definiuimus. Hic enim aſſumſimus ac ſemper ponimus ſuperficiem aquae in ſumma quiete, atque oſcillationes determinauimus, quae oriuntur ſi nauis aliquantulum inclinètur ac repentino dimittatur. Qnando autem nauicula in mari vndis agitato verſatur, tum ſuperficies maris maxime eſt inaequabilis, atque oſcillationes non tam a conatu nauis ſeſe in ſtatum aequilibrii reſtituendi proficiscuntur, quam a continua vndarum ſollicitatione, quibus eadem pars modo eleuatur modo deprimitur: quamobrem iſte motus nauium quoque a motu vndarum maxime pendebit.

§. 329. Quod autem ad motum attinet quem maris agitatio nauibus imprimit, is altioris eſt indaginis, neque etiamnunc hydroſtatica eousque eſt exculta, vt eius determinationem ſuſcipere queamus. Primum enim noſſe oportet quanta vi et in quanam directione aqua, cum eius ſuperficies non eſt ad libellam diſpoſita, corpora innatantia ſollicitet; ac deinde ipſum motum vndarum exploratum habere neceſſe eſt. Motum quidem vndarum vel inuenire liceret, vel ad arbitrium aſſumere, vt cum experientia maxime conueniat; verum aquae preſſiones, quando eius ſuperficies non eſt horizontalis, longe diuerſas leges ſequi videntur, quarum ne veſtigium quidem adhuc innotuit. Obſeruantur enim naues, quod contra omnem expectationem videatur, per vndas aſcendere motu accelerato, deſcendere vero motu retardato; atque ſi in

vaſe aqua ad marginem magis eſt eleuata quam in medio, leuia corpuſcula innatantia ſponte ad marginem accedunt, atque adeo ſurſum vrgentur; quod quam ſit paradoxon, quilibet agnoſcet, qui haec phaenomena per nota hydroſtaticae principia explicare conatus fuerit.

§. 330. Quae igitur hic de oſcillationibus expoſita ſunt, atque in hoc capite adhuc ſequentur, ea non de agitatione nauium, quae ab vndis oriri ſolet, intelligi oportet, ſed de illo motu reciproco, quem nauis quaeque in aqua maxime tranquilla recipere poteſt. Orientur autem huiusmodi oſcillationes ſi nauis a vi quacunque e ſitu aequilibri deducatur ac ſubito iterum dimittatur, tum enim ob ſtabilitatem ſeſe in ſtatum aequilibrii reſtituet quidem, ſed, quia eum cum celeritate attingit, in plagam contrariam inclinabitur, quoad impetus omnis ſit abſumtus; hincque ſimili motu redibit, atque inſtar penduli oſcillationes abſoluet. Oſcillationes vero circa axem longitudinalem conficiet, ſi initio circa eundem axem hoc eſt ad alterutrum latus inclinetur: oſcillationes autem circa axem latitudinalem producentur, ſi circa hunc axem vel verſus proram vel puppim inclinetur. Haeque oſcillationes conuenient cum theoria data, ſi modo ſectionis aquae centrum grauitatis in eam ipſam rectam verticalem incidat, in qua centra grauitatis nauis, et magnitudinis carinae ſunt poſita.

§. 331. Quodſi igitur eiusmodi oſcillationes circa axem vel longitudinalem vel latitudinalem actu efficiantur, ac longitudo penduli ſimplicis iſochroni obſeruetur, tum per experientiam cognoſcetur relatio inter ſtabilitatem nauis et momentum totius nauis reſpectu eius axis circa

quem

quem fiant oſcillationes. Si enim poſito nauis pondere $= M$, reſpectu eius axis circa quem oſcillationes abſoluuntur ſtabilitas ſit $= Mf$ et momentum $= Mg^2$; dabit longitudo penduli ſimplicis iſochroni obſeruata valorem fractionis $\frac{gg}{f}$; ita vt ſi L exprimat longitudinem penduli iſochroni futurum ſit $gg = f\mathrm{L}$. Apparet quidem in hac expreſſione pondus nauis M non ineſſe, quia cum in momento nauis tum in ſtabilitate aequaliter inerat, verumtamen vi propria pondus M in ea latet, cum neque momentum nauis neque ſtabilitas ſine nauis pondere cognito determinari queat.

§. 332. Obſeruandis igitur huiusmodi oſcillationibus, poterit vel ex data nauis ſtabilitate eius momentum reſpectu eius axis, cuius reſpectu cum oſcillationes fiunt, tum ſtabilitas cognoſcitur, determinari vel contra ex momento hoc aliunde cognito ſtabilitas. Dabimus autem in ſequente capite methodum ſtabilitatem reſpectu cuiusuis axis per experientiam definiendi; haec ergo ſi fuerit cognita atque aequalis Mf, denotante M pondus totius nauis, ac longitudo penduli ſimplicis oſcillationibus nauis iſochroni reperta ſit $= \mathrm{L}$; ſumi oportebit mediam proportionalem inter f et L, quae praebebit valorem ipſius g, ex qua momentum nauis innoteſcet, quippe quod eſt $= Mgg$. Vel cum ſit $gg = f\mathrm{L}$, ſtabilitas nauis quae iam conſtat et eſt $= Mf$ multiplicetur per longitudinem penduli obſeruatam L dabitque productum $Mf\mathrm{L}$ ipſum nauis momentum quaeſitum; ita vt hac via adhibenda nequidem opus ſit pondus nauis ſeorſim noſſe.

§. 333. Quodſi autem momentum nauis reſpectu illius axis, circa quem oſcillationes peraguntur, aliunde quocun-

cunque modo fuerit compertum atque adeo valor M gg inuentus, non difficulter ex cognito motu oſcillatorio ſtabilitas nauis reſpectu illius axis determinabitur. Cum enim ex cognito motu oſcillatorio conſtet longitudo penduli ſimplicis iſochroni L, ſitque $gg = fL$, erit $f = \frac{gg}{L}$, et ſtabilitas nauis quaeſita $= Mf = \frac{Mgg}{L}$; vnde iſta naſcitur regula: momentum nauis iam notum diuidatur per longitudinem penduli ſimplicis L, iſochroni cum oſcillationibus nauis, et quotus reſultans praebebit ipſam nauis ſtabilitatem. Quo circa etiam haec inueſtigatio inſtitui poteſt, etiamſi pondus nauis abſolutum ignoretur.

§. 334. Summopere autem expedit nullam praetermittere occaſionem, qua eiusmodi experimenta inſtituere licet, ex quibus vlla cognitio nauium deduci queat. Cum enim ad omnia nauium phaenomena tam intelligenda quam proſpicienda tot tamque variarum rerum ad naues pertinentium cognitio requiratur, quae a priori vel difficulter vel non ſatis acurrate cognoſci poſſunt, inſtitutio experimentorum quorumcunque hanc congnitionem magnopere promouebit ac perficiet. Sic tam oſcillationum verticalium, quam harum quae fiunt circa axem aliquem horizontalem, obſeruatio ingentem afferet vtilitatem, ex illis enim relatio inter ſectionem aquae et volumen aquae immerſum; ex his vero relatio inter momentum nauis ac ſtabilitatem definitur; quorum vtrumque notitiam nauium plurimum promouet.

§. 335. Quoniam autem ex motu oſcillatorio nauium circa axem horizontalem vel longitudinalem vel latitudinalem per obſeruationes cognito definiri poteſt ſtabilitas nauis ſi momentum nauis reſpectu eiusdem axis habeatur,

non

non abs re erit exponere, quo pacto ad cognitionem momenti nauis respectu dati axis horizontalis peruenire queamus. Ac primum quidem praesto est methodus a priori petita, qua singulae tam ipsius nauis particulae, quam onerum ingestorum multiplicantur per quadrata distantiarum ab axe proposito, cunctaque haec producta in vnam summam colliguntur, ad quam operationem perfecta notitia cum structurae totius nauis, tum rationis onerationis requiritur. Deinde vero momentum tale etiam per singularia experimenta potest determinari, quae inter notari praecipue merentur ea, quibus motus oscillatorius nauis in libero aere ex dato axe suspensae obseruatur; quo circa quemadmodum momentum nauis ex istiasmodi obseruationibus colligi possit, explicabimus.

§. 336. Ponamus igitur cognitas esse oscillationes, quas nauis $aCDb$ in libero aere ex axe horizontali immobili PQ suspensa absoluat; huncque axem PQ parallelum esse illi axi horizontali AB per centrum grauitatis nauis G ducti, respectu cuius momentum nauis desideratur. Sit nauis totius pondus $= M$, eius momentum respectu axis AB quod quaerimus $= Mg^2$, et distantia centri grauitatis nauis G ab axe PQ circa quem oscillationes fiunt scilicet $OG = h$, quae distantia cognita ponitur. Obseruata iam sit longitudo penduli simplicis isochroni cum oscillationibus, quas nauis in hoc statu constituta absoluit, sitque ea longitudo $= k$: quae recepto loquendi modo distantiam centri oscillationis ab axe suspensionis PQ denotabit. Tab. XII. fig. 1.

§. 337. Ex principiis autem mechanicis, quibus theoria centri oscillationis innititur, constat longitudinem pen-

duli ſimplicis iſochroni, quae nobis eſt $= k$ obtineri, ſi momentum corporis oſcillantis reſpectu axis ſuſpenſionis, ſeu ſumma omnium corporis particularum per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe ſuſpenſionis reſpectiue multiplicatarum diuidatur per productum totius corporis in diſtantiam centri grauitatis eius ab axe, ex quo corpus eſt ſuſpenſum: quod productum noſtro caſu ob $OG = h$ eſt $= Mh$. Quamobrem momentum totius nauis reſpectu axis PQ erit $= Mhk$; ac propterea ex obſeruato motu oſcillatorio dabitur. Quaeſtio itaque huc redit vt ex dato momento corporis cuiusque reſpectu axis cuiuscunque definiatur momentum eiusdem corporis reſpectu axis per centrum grauitatis ipſius ducti illique axi paralleli.

§. 338. In libro autem ſuperiori methodus eſt tradita, cuius ope ex dato momento corporis cuiuscunque reſpectu axis cuiuspiam per eius centrum grauitatis tranſeuntis reperiri poteſt momentum reſpectu alius cuiusuis axis illi axi paralleli; ad hoc quippe definiendum tantum opus eſt, vt ad momentum reſpectu axis per centrum grauitatis tranſeuntis addatur productum totius corporis per quadratum diſtantiae amborum memoratorum axium multiplicati. Cum igitur noſtro caſu ſit momentum nauis reſpectu axis AB, quod quidem quaerimus, $= Mgg$ erit momentum eius reſpectu axis $PQ = Mgg + Mhh$ quod cum per obſeruationes ſit inuentum $= Mhk$ erit $gg = hk - hh$ et $g = \sqrt{h(k-h)}$; innoteſcit itaque longitudo illa g, per cuius quadratum ſi multiplicetur maſſa nauis M, obtinetur momentum eius reſpectu axis AB.

§. 339. Pro corpore igitur quocunque circa axem horizontalem oſcillationes peragente methodum nacti ſumus

mus expeditam momentum illius corporis reſpectu axis illi axi paralleli ac per centrum grauitatis ducti determinandi; quae methodus regula iſta facili continetur. Maſſa ſeu pondus corporis multiplicetur primum per diſtantiam centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis, hocque productum denuo multiplicetur per exceſſum longitudinis penduli ſimplicis iſochroni ſupra diſtantiam illam centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis; vel quaeratur media proportionalis inter diſtantiam centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis et inter diſtantiam centri oſcillationis a centro grauitatis, quo facto productum ex maſſa corporis et quadrato mediae huius proportionalis dabit momentum corporis reſpectu axis per centrum grauitatis tranſeuntis et axi ſuſpenſionis paralleli.

§. 340. Quaecunque igitur accipiatur diſtantia axis ſuſpenſionis PQ a centro grauitatis G corporis eadem perpetuo prodibit quantitas momentum corporis reſpectu axis AB exprimens. Quodſi igitur ſucceſſiue idem corpus in variis diſtantiis ad oſcillandum ſuſpendatur erit ſemper diſtantia centri oſcillationis a centro grauitatis reciproce vt diſtantia centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis. Interim tamen ad noſtrum inſtitutum non omnino perinde eſt quanta diſtantia axis ſuſpenſionis PQ a centro grauitatis G accipiatur; ſed eam neque nimis magnam neque nimis paruam accipi conuenit. Cum enim factum $h(k-h)$ ſit conſtans, expediet diſtantiam h mediocris aſſumſiſſe quantitatis vt factores h et $k-h$ non admodum fiant diſpares, atque concluſio eo certior inde inferri queat. Hoc vero obtinebitur, ſi eiusmodi eligatur ſuſpenſio, quae oſcillationes maxime celeres producat.

§. 341. Modus quidem iste, etsi in se admodum expeditus ac facilis, nullo modo ad naues praecipue maiores accommodari potest, ob ingens pondus et volumen quae impediunt, quo minus in libero aere suspendi atque ad oscillandum impelli queant. Verum tamen vtilitatem afferre poterit non contemnendam, si ad similitudinem vastiorum nauium minora exempla summa diligentia conficiantur, qualia fere semper fabrefieri curantur. Si enim istae minoris moduli nauiculae ipsis nauibus omnino sint similes, experimenta quae in iis instituuntur simul proprietates maiorum declarabunt. Inseruient itaque istiusmodi moduli cum ad sectionem aquae tum ad volumen aquae submersum, tum etiam ad stabilitatem ac momentum respectu cuiusque axis determinanda, quae res in scientia nauali summam vtilitatem habebunt.

§. 342. Quodsi autem nauiculae, in qua experimentum instituitur, centrum grauitatis non tam accurrate fuerit exploratum, quemadmodum opus est, ex duplici suspensione duplicique motu oscillatorio momentum nauiculae respectu axis per centrum grauitatis transeuntis poterit concludi etiam ignoto loco centri grauitatis. Ponamus enim in primo motu oscillatorio repertam esse longitudinem penduli simplicis isochroni $= k$; deinde axem suspensionis a corpore magis remoueri per interuallum $= x$, ita vt si priori casu fuerit distantia centri grauitatis ab axe suspensionis $= h$, ea casu altero futura sit $= h + x$: sit autem hoc altero casu longitudo penduli simplicis isochroni $= q$: ob $h(k-h) = (h+x)(q-h-x)$ reperietur $h = \frac{x(q-x)}{q-k-2x}$ atque $gg = h(k-h) = \frac{x(k-q+x)(k+x)(q-x)}{(k-q+2x)^2}$, quae quantitas per

per pondus corporis M multiplicata dabit momentum eius quaesitum respectu axis AB per centrum grauitatis G ducti- [illegible] paralleli axibus binis, ex quibus erat suspensum.

§. 343. Non difficile itaque erit pro data naui momentum eius respectu axis cuiusuis horizontalis per experimenta definire, dummodo nauis accuratum habeatur exemplum idoneae magnitudinis fabrefactum. Non solum autem hoc exemplum ratione figurae et constructionis omnino simile esse oportet ipsi naui quam repraesentat, sed etiam oneratio vbique ad similitudinem debet esse constituta. Primo scilicet non solum pondus nauiculae minoris ad pondus maioris triplicatam tenere debet rationem laterum homologorum, sed etiam pondera ita debent esse disposita vt centrum grauitatis similiter sit positum. Deinde etiam omnia pondera in ipsa naui eiusque exemplo cum in se spectata similia esse debent, tum similiter distributa, vt etiam momenta respectu similium axium prodeant similia.

§. 344. Quemadmodum autem ex momento minoris nauiculae respectu cuiuspiam axis determinato momentum respondens in naui maiori simili concludi debeat, ex dictis facile colligi licet. Cum enim momentum sit productum ex pondere corporis in quadratum cuiuspiam lineae rectae, corporum similium momenta similia tenebunt rationem quintuplicatam laterum homologorum. Quoniam autem pondera sunt in ratione triplicata, si inuenta fuerit linea illa, per cuius quadratum pondus nauiculae multiplicatum praebet momentum eius respectu axis cuiuspiam; tum pro ipsa naui per regulam auream quaeratur similis linea recta in ratione simplici laterum homologorum;

 quae

quae ſi fuerit inuenta, eius quadratum per pondus ipſius nauis multiplicatum dabit momentum nauis reſpectu axis in ea ſimiliter poſiti.

§. 345. Modus iſte per oſcillationes momenta corporum reſpectu cuiuſuis axis per centrum grauitatis ducti explorandi, etiam adhiberi poteſt ad momenta ſuperficierum planarum inueſtiganda, atque ideo parem vtilitatem afferet ad momenta ſectionis aquae nauium cognoſcenda, quae ad ſtabilitatis cognitionem requiruntur. Ex lamina ſcilicet aequabili ac perquam tenui exſcindatur figura ſectioni aquae omnino ſimilis, eaque in ſitu verticali poſita ſuſpendatur ex axe horizontali, ita vt vel axis longitudinalis vel latitudinalis ſitum teneat horizontalem; tum lamina ad oſcillandum impellatur noteturque longitudo penduli ſimplicis iſochroni k. Quodſi nunc diſtantia centri grauitatis laminae ab axe ſuſpenſionis fuerit $= h$, erit $\sqrt{h(k-h)}$ linea illa, per cuius quadratum ſuperficies laminae multiplicari debet, vt prodeat eius ſuperficiei momentum reſpectu axis vel longitudinalis vel latitudinalis, eius videlicet qui in motu oſcillatorio ſitum horizontalem obtinuit.

§. 346. Quodſi autem pro huiusmodi lamina definita fuerit ea linea, per cuius quadratum ſuperficies laminae multiplicata praebet eius momentum reſpectu axis propoſiti, tum fiat vt longitudo illius laminae ad longitudinem ſectionis aquae, cui figura laminae ſimilis eſt ſumta, ita linea illa inuenta $\sqrt{h(k-h)}$ ad quartam. Haecque quarta linea proportionalis inuenta erit ea ipſa longitudo per cuius quadratum ſuperficies ſectionis aquae multiplicari debet, vt obtineatur eius momentum, cuius cognitio ad ſtabilitatem nauis definiendam requiritur. Manifeſtum autem eſt, vt

iſta

iſta concluſio ſit legitima, laminam primo vbique eiusdem craſſitiei atque ex materia homogenea paratam eſſe debere, deinde etiam neceſſe eſt vt lamina illa ſit tenuiſſima, ſeu vt eius craſſities prae ſuperficie euaneſcat; quemadmodum iam indicauimus.

§. 347. Ad longitudinem autem penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus iſtiusmodi experimentorum inueſtigandam, plures modi adhiberi poſſunt, quorum commodiſſimus mihi videtur, qui nititur longitudine penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis, quae etſi in variis terrae regionibus aliquantillum diſcrepat, tamen ſatis tuto his praecipue locis accipi poteſt $3166\frac{1}{4}$ part. mill. pedis Rhenani. Numerentur iam oſcillationes corporis ſuſpenſi, quae vno minuto primo abſoluuntur, ſitque eorum numerus $= n$, et longitudo penduli ſimplicis iſochroni, quae quaeritur ponatur $= k$ partium milleſimarum pedis Rhenani, erit ex natura oſcillationum $\frac{60}{n} : 1 = \sqrt{k} : \sqrt{3166\frac{1}{4}}$ hincque $k = \frac{11338500}{nn}$. Oſcillationes vero efficiendae ſunt admodum exiguae, vt arcus circulares per quos fiunt cum cycloidicis confundantur, atque oſcillationes inter ſe iſochronae obtineantur.

§. 348. His itaque continetur doctrina de oſcillationibus nauium, quas peragunt vel circa axem longitudinalem vel latitudinalem, quae duo oſcillationum genera non ſolum ſunt praecipua, quae in nauibus inueſtigari merentur, ſed ea etiam ſola ad calculum reuocari poſſunt. Quae enim oſcillationes circa alium axem horizontalem fieri concipiuntur, eae rariſſime circa axem fixum contingunt, ſed plerumque inter oſcillandum axis circa quem fiunt oſcillationes continuo mutatur. Pendet autem haec irregularitas

a diſſi-

a diſſimilitudine partium nauis vtrinque circa axem diſpoſitarum, qua fit vt linea recta per centra oſcillationis ambarum ſectionis aquae partium non ſit ad axem oſcillationis ſeu ei parallelum in ſectione aquae ſumtum normalis, quae conditio ad oſcillationes puras et regulares producendas abſolute eſt neceſſaria.

§. 349. Siue autem oſcillationes, quae circa alium axem horizontalem praeter longitudinalem et latitudinalem fiunt, ſint regulares ſiue irregulares, eae tamen ſatis prope ex cognitis oſcillationibus circa axem longitudinalem et latitudinalem factis concludi poterunt, medium ſcilicet aliquod inter has tenebunt. Facile namque ex forma nauium colligere licet alteras harum oſcillationum fore celerrimas alteras tardiſſimas. Quicquid autem ſit, ſi quis voluerit oſcillationes iſtas irregulares circa axem quemcunque horizontalem obliquum eodem modo; quo regulares, definire, is quidem a veritate non multum aberrabit. Oportebit autem pro tali axe obliquo tam ſtabilitatem nauis reſpectu iſtius axis, quam momentum cognitum eſſe; atque momentum per ſtabilitatem diuiſum dabit longitudinem penduli ſimplicis, cuius oſcillationes cum oſcillationibus nauis proxime congruent.

§. 350. Quemadmodum autem ad ſtabilitatem reſpectu axis obliqui definiendam, calculo particulari opus non eſt, ſed ea ex cognitis ſtabilitatibus reſpectu axium longitudinalis et latitudinalis facile colligi poteſt; ita etiam momentorum ratio eſt comparata. Namque ſi cognita fuerint momenta nauis reſpectu axis cum longitudinalis tum latitudinalis, ex iis momentum reſpectu alius cuiuſuis axis horizontalis per centrum grauitatis tranſeuntis definiri poteſt.

Quod

Quod vt appareat, ſit G centrum grauitatis nauis, AB axis longitudinalis et CD latitudinalis, quorum reſpectu momenta ponuntur cognita. Sit vero EF axis obliquus in plano horizontali ACBD aſſumtus reſpectu cuius momentum quaeritur. Sumatur nauis particula quaecunque M, ex qua primum in planum horizontale perpendiculum ML demittatur atque ex L in axes perpendicula LP, LQ et LR.

§. 351. Momentum igitur nauis reſpectu axis EF quaeſitum erit $= \int M . MR^2 = \int M . ML^2 + \int M . LR^2$. Sit ſinus anguli AGE $= m$, coſinus $= n$, erit LO $= \frac{LP}{n}$, PO $= \frac{mLP}{n}$, GO $=$ PG $- \frac{m \cdot LP}{n}$, et OR $= m PG - \frac{mm . LP}{n}$; vnde LR $= m PG + n . LP$. Hinc erit momentum reſpectu axis EF $= \int M . ML^2 + m^2 \int M . PG^2 + 2mn \int M . PG . LP + n^2 \int M . LP^2$, in qua expreſſione ob nauem circa axem AB vtrinque ſimilem terminus $\int M . PG . LP$ euaneſcet. Cum igitur ſit momentum reſpectu axis longitudinalis AB, quod ſit $R = \int M . ML^2 + \int M . LP^2$, et momentum reſpectu axis latitudinalis CD quod ſit $S = \int M . ML^2 + \int M . PG^2$, erit momentum reſpectu axis obliqui EF $= m^2 S + n^2 R$ ob $mm + nn = 1$. Ex quo ſine peculiari ſiue calculo ſiue experimento momentum nauis reſpectu axis cuiusuis obliqui horizontalis expedite poterit determinari, ex datis momentis reſpectu axium longitunalis atque latitudinalis. Tab. XII. fig. 2.

§. 352. Poſuimus in iſta de oſcillationibus nauium tractatione perpetuo centrum grauitatis ſectionis aquae in eadem recta verticali eſſe ſitum, quae tranſit per centrum grauitatis totius nauis ſimul ac per centrum magnitudinis carinae: hancque hypotheſin ideo aſſumſimus, quod cum

ea ad oſcillationes maxime tranquillas reddendas requiratur, tum vero oſcillationes tam verticales quam horizontales ſeu circa axem horizontalem motu angulari factas puras, et vniformes atque in ſuo genere iſochronas producat. Quodſi autem aliae nauium conditiones non permittant, vt ſectionis aquae centrum grauitatis verticaliter immineat centro magnitudinis carinae, atque ad eas conditiones magis reſpiciendum ſit, quam ad tranquillitatem oſcillationum oſcillationes neque verticales neque horizontales purae exiſtere poterunt, ſed alterum genus perpetuo cum altero erit permixtum, ſi quidem axis horizontalis per centrum grauitatis ductus, circa quem oſcillationes fiunt, cum centro grauitatis ſectionis aquae non fuerit in plano verticali conſtitutus.

§. 353 Quando autem centrum grauitatis ſectionis aquae non in rectam verticalem per centrum grauitatis nauis ductam cadit, id erit vel magis verſus proram vel verſus puppim promotum. Vtroque tamen caſu neceſſe eſt, vt id ſit poſitum in interſectione plani diametralis et ſectionis aquae; quoniam ſectio aquae vtrinque circa hanc interſectionem ex duabus partibus ſimilibus et aequalibus conſtat. Quamobrem axis longitudinalis etiam ſublata hypotheſi prius aſſumta, cum centro grauitatis ſectionis aquae tamen in plano verticali erit ſitum. Ex quo manifeſtum eſt hoc quoque caſu oſcillationes circa axem longitudinalem factas eſſe puras futuras, ita vt hoc oſcillationum genus etiamnum peculiarem tractationem non requirat.

§. 354. Aliter autem res ſe habet in oſcillationibus, quae fuerit circa axem latitudinalem: eo quod centrum graui-

grauitatis ſectionis aquae non poſitum erit in plano verticali, in quo axis latitudinalis per centrum grauitatis nauis ductus collocatur. Hinc enim fit, vt inter oſcillandum vel volumen modo maius modo minus aquae immergatur, ſi centrum grauitatis in quiete permaneat, vel centrum grauitatis nauis aſcendat deſcendatue ſi perpetuo aequale volumen aquae immerſum maneat. Non poterunt igitur hoc caſu oſcillationes circa axem latitudinalem fieri quin ſimul centrum grauitatis nauis vel aſcendat vel deſcendat; atque id circo nauis circa axem latitudinalem oſcillationes puras abſoluere non poterit, ſed eae ſemper neceſſario oſcillationibus verticalibus erunt inquinatae, ex quo confuſum et difforme oſcillationum genus naſcetur.

§. 355. Vt hoc clarius percipiatur, ſit ADB ſectio nauis verticalis a prora A ad puppim B facta et nauem vtrinque in duas partes ſimiles et aequales diuidens: ſit praeterea ADB portio huius ſectionis ſub aqua verſans, dum nauis in aequilibrio eſt conſtituta; eruntque centrum grauitatis nauis G et centrum magnitudinis carinae O cum in plano huius ſectionis tum in eadem recta verticali CD poſita. Porro erit recta AB axis longitudinalis ſectionis aquae eiusque diameter, ex quo ſectionis aquae centrum grauitatis I in hac ipſa recta AB ſitum erit: quodſi incideret in punctum C oſcillationes forent eiusmodi, vti ante definiuimus, atque oſcillationes tam verticales quam horizontales fierent purae. Pro praeſenti inſtituto igitur punctum I a puncto C remotum aſſumimus. Tab. XII. fig. 3.

§. 356. Quando nunc nauis haec ex ſitu aequilibrii ad oſcillationes circa axem latitudinalem peragendas inclinatur, ſectio diametralis ADB manebit quidem verticalis, verum

 alia

alia prodibit ſectio aquae, cuius pariter diameter exiſtet in interſectione eius cum plano verticali ADB. Sit igitur in ſitu hoc inclinato recta ab diameter ſectionis aquae, ſecans ſuperiorem diametrum AB in puncto V, atque ponatur interuallum $CV = x$. Angulus vero $AVa = BVb$ ſit quam minimus $= dw$, qui erit angulus inclinationis nauis de ſitu aequilibrii. Quantitas igitur ſectionis aquae in vtroque ſitu ad ſenſum non mutabitur, ſed aream habebit eandem, quae ponatur $= 2D$. Poſitio haec latiſſime patet, atque omnes declinationes de ſitu aequilibrii, ex quibus oſcillationes circa axem latitudinalem oriri queant, in ſe complectitur.

§. 357. Vt nunc in motum oſcillatorium inquiramus, qui ex hac declinatione ex ſitu aequilibrii oriri debet, ponamus pondus totius nauis $= M$, volumen carinae ſeu partis aquae ſubmerſae, dum nauis in aequilibrio verſatur $= V$: et vti interuallum $CV = x$ poſitum eſt, ſit interuallum $CI = c$. Diſtantia centrorum grauitatis nauis et magnitudinis carinae $GO = b$, vbi ponimus centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis O cadere: ita vt, ſi contrarium eueniat, littera b negatiuum valorem induat. Idem de litteris c et x eſt intelligendum, quae affirmatiuum valorem retinent, ſi punctum I puppi B propius eſt puncto C, punctumque V prorae propius quam C. Quodſi autem haec puncta aliter fuerint diſpoſita, tum in mutatione ſignorum omnis variatio poterit comprehendi.

§. 358. In ſitu igitur hoc inclinato erit ab in ſectione aquae, ideoque horizontalis, et partis nunc aquae immerſae planum diametrale erit aDb. Quantum autem futurum ſit volumen partis ſubmerſae, ex eo colligi poterit,

quod,

quod, ſi recta ab per punctum I transiret, volumen aequale foret volumini in ſitu aequilibrii V. Quare hoc caſu volumen aquae ſubmerſum maius eſt quam V, hocque excedit ſpatio, quod comprehenditur inter ſectionem aquae ab et ſectionem ipſi parallelam per I ductam, quarum diſtantia erit $Ii = (c+x)dw$. Cum autem mutatio quam minima ponatur, ſectio aquae ab aequalis cenſeri poteſt ſectioni aquae naturali $= 2D$, et hanc obrem volumen nunc aquae ſubmerſum erit $= V + 2D(c+x)dw$.

§. 359. Cum autem vis nauem ſurſum pellens ſit vt volumen aquae ſubmerſum, hoc ſtatu; vis navem ſurſum vrgens maior eſt quam pondus nauis M quo deorſum nititur: atque exceſſus ſe habebit ad $2D(c+x)dw$ vt M ad V. Ergo Centrum grauitatis nauis hoc ſtatu actu ſurſum ſollicitabitur vi $= \frac{2MD(c+x)dw}{V}$ exceſſu ſcilicet vis ex preſſionibus aquae ortae ſupra ipſius nauis pondus. Aſcendere igitur debebit centrum grauitatis nauis G, quod nunc infra aquae ſuperficiem ſubmerſum eſt ad profunditatem Gg, ducta Gg perpendiculari ad ab. Ob angulum autem cGg infinite paruum dw erit $Gg = Gc = GC + xdw$. Hoc igitnr ſitu inclinato centrum grauitatis G profundius eſt ſitum, quam in ſitu aequilibrii, idque interuallo $Cc = x dw$. ſi quidem x valorem affirmatiuum obtineat, qualem figura repraeſentat.

§ 360. Quando ergo punctum V extra puncta C et I vti in figura cadit, vis ex preſſione aquae orta tendet ad centrum grauitatis G in altitudinem naturalem conſtituendum. Nam ſi V extra C et I verſus proram ſit poſitum, centrum grauitatis G profundius ſtat in inclinatione quam in ſtatu aequilibrii, ſimul vero etiam vis praeſto eſt

id ſurſum ſollicitans. Sin autem punctum V extra puncta C et I verſus puppim eſſet ſitum, tum centrum grauitatis G in ſtatu inclinato magis foret eleuatum quam in ſtatu aequilibrii, ſimul vero etiam pondus nauis preſſioni aquae praeualeret, atque centrum grauitatis G magis immergeret; ſi quidem angulus inclinationis dw ſit affirmatiuus, hoc eſt ſi inclinatio ita fiat, vt prora magis immergatur quam puppis. In inclinatione enim contraria omnia contra ſe habebunt, ob dw negatiuum.

§. 361. His igitur duobus caſibus vires nauem ſollicitantes tendent, ad nauem ex ſitu inclinato in ſitum aquilibrii reſtituendam, ſi quidem nauis in hoc ſitu aequilibrii habeat ſtabilitatem. Vtrum autem vno motu continuo, hoc eſt dum angulus dw omnino euaneſcit, nauis in ſitum aequilibrii reſtituatur an minus, poſtea indagabimus. Hic vero prius nobis ſpectandus eſt caſus, quo punctum V intra puncta C et I cadit; qui hoc habet ſingulare, quod vis quidem adſit centrum grauitatis G ſurſum vrgens, cum tamen in ſitu inclinato hoc centrum grauitatis iam altius ſit poſitum quam in ſitu aequilibrii. Hoc ergo caſu vires non ſolum non reſtitutionem in ſitum aequilibrii promovebunt, ſed adeo magis perturbabunt; centrum enim grauitatis iam nimis eleuatum etiam magis eleuabunt, ex quo motus vehementer irregularis exiſtat, neceſſe eſt.

§. 362. Quare cum res ita ſe habeat, ſi punctum V intra puncta C et I cadat, concludendum eſt, oſcillationes non ſubito regulares et vniformes generari poſſe, quam primum V extra C et I cadat, ſed difformitatem tantum continuo magis decreſcere. Difformitas autem in omni caſu eo maior erit, quo maius fuerit intervallum

vallum inter puncta C et I. Nam si haec puncta coincidant et sit $c = o$; tum vis centrum grauitatis eleuans erit $= \frac{2MDxdw}{V}$ et idem centrum grauitatis G magis erit depressum quam in situ aequilibrii interuallo xdw. Cum igitur hoc casu vis vrgens proportionalis sit ipsi interuallo, quo centrum grauitatis a suo situ naturali est remotum, hoc casu vniformitas motus oscillatorii non turbabitur. Manifestum autem est, quo maius sit interuallum e, eo minus vim illam spatio xdw fore proportionalem, ex quo vniformitas eo magis tolletur.

§. 363. Vt nunc in motum, qui ex actione virium nauem in situ hoc inclinato sollicitantium inquiramus, ante omnia idem, quod de omni motu corporum extensorum, est notandum: seorsim scilicet inuestigandus est motus centri grauitatis, atque motus rotatorius circa centrum grauitatis. Quod primum ad motum centri grauitatis G attinet, id verticaliter sursum vrgebitur nostro casu a vi motrice $= \frac{2MD(c+x)dw}{V}$, quoniam autem in centro grauitatis collectum concipi debet integrum nauis pondus M, vis acceleratrix centri grauitatis erit $= \frac{2D(c+x)dw}{V}$. Pari igitur modo centrum grauitatis primo motus momento versus suum situm naturalem impelletur, quo pendulum longitudinis $\frac{Vx}{2D(c+x)}$, quod a situ quietis per interuallum xdw est deductum.

§. 364. Ad motum gyratorium circa centrum grauitatis definiendum, determinari oportet momentum virium sollicitantium respectu horizontalis per centrum grauitatis G ductum et ad planum ADB normalem, quoniam ex nauium forma certum est, motum gyratorium circa hunc nullum

nullnmque alium axem oriri debere. Oritur autem hoc momentum a ſolis aquae preſſionibus, quae ita concipi poſſunt, quaſi ſingulis particulis voluminis ſubmerſi eſſent inſitae iis ipſis proportionales, atque verticaliter ſurſum vrgeant. Volumen autem in ſitu inclinato aquae ſubmerſum aDb in tres partes diſcerpi poteſt; primum ſcilicet in partem ADB cuius volumen poſitum eſt $= V$, tum in partem inter angulum BVb contentam; ac tertio in partem intra angulum AVa comprehenſam, ita vt totum volumen aquae ſubmerſum ſit $= V + BVb - AVa$, quarum partium ſi vniuscuiusque momentum fuerit determinatum, ſimul totius voluminis aquae ſubmerſi momentum habebitur.

§. 365. Contemplemur primum partem V, cuius cum ſit centrum grauitatis in O, ex ea naſcetur vis nauem ſurſum pellens in directione verticali Oo, atque haec vis ipſi nauis ponderi M aequalis erit. Haec autem vis non tendet ad reſtitutionem in ſtatum aequilibrii, ſed contra nitetur, eritque eius momentum propterea negatiuum $= M . og = Mhdw$. ob $Go = h$. Quare ſi momentum ad reſtitutionem producendam determinare velimus ex parte voluminis aquae ſubmerſi V naſcetur momentum $= - M hdw$: quod ad nauem ſubuertendam tendet, ſi quidem centrum grauitatis nauis G ſupra O cadat; et hanc obrem, niſi momenta ex reliquis partibus oriunda fiant affirmatiua ac ſimul maiora quam $Mhdw$, nulla omnino reſtitutio nauis in ſitum aequilibrii fieret, quemadmodum ſupra de ſtabilitate eſt oſtenſum.

§. 366. Vt momenta, quae ex partibus intra angulos BVb et AVa comprehenſis naſcuntur, inueſtigemus, ſit

ſit portionis intra angulum BVb contentae volumen $=$ P et huius centrum grauitatis ſeu magnitudinis ſitum in P, cuius diſtantia ab V ſit V$p = p$. Ex hac ergo portione vis naſcitur $= \frac{MP}{V}$ et nauem ſurſum pellit in directione Pp; quae vis ideo ad nauis reſtitutionem tendet. Huius autem vis momentum reſpectu axis horizontalis per G ducti erit $= \frac{MP}{V} . pg$; at eſt $pg = Vp - Vg = Vp - VC = p - x$, ex quo momentum huius vis ad reſtitutionem tendens erit $= \frac{MP}{V}(p-x)$. Sit porro portionis intra alterum angulum AVa contentae volumen $=$ Q, eiusque centrum grauitatis in Q exiſtente V$q = q$. Ex hac portione igitur vis oritur $= \frac{MQ}{V}$ nauem in directione qQ ſurſum vrgens, quae ideo reſtitutioni in ſitum aequilibrii renitetur. Momentum ergo erit $= -\frac{MQ}{V} . gq = -\frac{MQ}{V}(q+x)$.

§. 367. Cum igitur volumen in ſitu inclinato aquae ſubmerſum totum ſit $= V + BVb - AVa$; erit momentum ex hoc volumine natum ad nauem reſtituendam $= -Mhdw + \frac{MP}{V}(p-x) + \frac{MQ}{V}(q+x) = -Mhdw + \frac{M}{V}(Pp + Qq - Px + Qx)$. In hac autem expreſſione denotat Pp momentum portionis intra angulum BVb contentae reſpectu axis horizontalis per punctum V ducti et normalis ad planum ADB; ſimilique modo Qq exhibet momentum portionis intra angulum AVa contentae reſpectu eiusdem axis horizontalis per V ducti. Denique P et Q ſunt volumina ipſa nauis intra angulos BVb et AVa contenta.

§. 368. Repraeſentet nunc AEBFA ipſam ſectionem aquae, cuius diameter AB congruat cum recta AB in praecedente figura, ſitque I centrum grauitatis huius ſectionis aquae et PVQ ille axis horizontalis, qui vtrique Tab XII. fig. 4.

sectioni aquae cum in situ aequilibrii tum in situ inclinato est communis. Nunc concipiatur haec sectio circa axem PQ, aliquantulum conuerti ad angulum dw, vt oriantur illa spatia P et Q intra angulos ad PQ contenta: atque diametro AB parallela consideretur recta quaecunque XRY, cuius pars RY verticaliter producta generet triangulum
fig. 5. YRy elementare voluminis P. Area autem huius trianguli erit $= \frac{1}{2}RY^2.dw$, ex quo erit P = summae omnium $\frac{1}{2}RY^2 dw = \frac{1}{2}dw\int RY^2$ similique modo erit ex altera parte $Q = \frac{1}{2}dw\int RX^2$. ideoque $P-Q = \frac{1}{2}dw\int(RY^2 - RX^2)$.

fig. 4. §. 369. Sit nunc per centrum grauitatis I sectionis aquae ducta recta EF parallela ipsi PQ, erit ex natura centri grauitatis $\int sY^2 = \int sX^2$. Cum igitur sit $RY = SY + VI$ et $RX = SX - VI$, erit $RY^2 - RX^2 = SY^2 - SX^2 + 2VI.XY$ atque $\int(RY^2 - RX^2) = \int sY^2 - \int sX^2 + 2VI.\int XY = 2VI.\int XY$ ob $\int sY^2 - \int sX^2 = 0$. Dat autem $\int XY$ aream totius sectionis aquae quae posita est $= 2D$, et est $VI = c + x$, vnde erit $P - Q = \frac{1}{2}dw:2(c+x).2D = 2D(c+x)dw$. Quare pro formula superiore erit $-Px + Qx = -2D(c+x)xdw = -2Ddw(cx + xx)$, vnde iam litterae P et Q ante tantum assumtae ex calculo exterminabuntur, superest igitur vt valorem $Pp + Qq$ determinemus.

§. 370. Cum sit Pp momentum ponderis voluminis aquei intra angulum BVb, et Qq momentum ponderis
fig. 5. aquae intra angulum AVa contenti respectu axis PQ, elementum ipsius Pp reperietur ex angulari sectione YRy, sit enim $RM = z$, $MN = dz$, ob angulum $YRy = dw$ erit $Mm = zdw$, et particula $MNnm = zdzdw$. Huius
fig. 4. igitur momentum respectu axis PQ erit $= zzdzdw = dw.zzdz$.

$zzdz$. At eſt $zzdz$ productum ex particula quacunque ſectionis aquae ipſius in quadratum diſtantiae ſuae ab axe PQ multiplicatum, ideoque momentum quaſi materiae elementare ſectionis aquae reſpectu axis PQ. Quare cum ſit $Pp = dw$. *ſummam omnium* $zzdz$, in parte PBQ et $Qq = dw$. *ſummam omnium* $zzdz$ in parte PAQ, erit $Pp + Qq = dw\bar{x}$ *momentum ſectionis aquae reſpectu axis* PQ, cuiusmodi momenta ſectionis aquae iam ſupra ſumus contemplati.

§. 371. Conſiderauimus autem ante momentum ſectionis aquae reſpectu axis horizontalis per eius centrum grauitatis I ducti; quamobrem etiam hic concipiamus axem EF per I ductum et ipſi PQ parallelum, ſitque momentum ſectionis aquae reſpectu huius axis $EF = 2D.ff$, eſt enim perpetuo momentum cuiusque ſiue corporis ſiue ſuperficiei aequale producto ex quadrato alicuius lineae rectae in corporis vel maſſam, vel in ſuperficiei aream. Deinde etiam demonſtrauimus ſi habeatur momentum alicuius figurae reſpectu axis per eius centrum grauitatis tranſeuntis quemadmodum inde momentum reſpectu cuiusuis alius axis illi paralleli definiri debeat. Scilicet regulam ibi traditam ſequentes reperiemus momentum huius ſectionis aquae reſpectu axis $PQ = 2D.ff + 2D.VI^2 = 2Dff + 2D(c+x)^2$, vnde erit $Pp + Qq = 2Ddw(ff + cc + 2cx + xx)$.

§. 372. Cum nunc ſit $Pp + Qq = 2Ddw(ff + cc + 2cx + xx)$ et $-Px + Qx = -2Ddw(cx + xx)$ erit $Pp + Qq - Px + Qx = 2Ddw(ff + cc + cx)$. Tab. XII. fig. 3.
Atque hanc obrem momentum quod ex preſſione aquae oritur ad conuertendam nauem circa axem horizontalem

 per

per centrum grauitatis G ductum atque ad planum ADB normalem erit $= Mdw\left(-b + \frac{2D(ff+cc+cx)}{V}\right)$ huiusque effectus tendet ad restitutionem nauis in situm aequilibrii. Atque ex hac expressione simul intelligitur, vtrum nauis eo modo, quo posuimus, ex situ aequilibrii declinata sese restituere conetur an secus. Nimirum nauis se restituet si fuerit $\frac{2D(ff+cc+cx)}{V} > b$. Quodsi autem sit VI $= 0$, qui est casus supra in stabilitatis indagatione pertractatus, restitutio sequetur si fuerit $\frac{2Dff}{V} > b$.

§. 373. Cum igitur nauis circa axem latitudinalem stabilitate praedita ponatur, erit $\frac{2Dff}{V} > b$. Quamobrem si inclinatio fiat circa axem PQ vt hic posuimus, vis restituens maior erit, quam vis restituens inclinatione circa axem EF facta, atque excessus illius vis super hanc erit $= \frac{2DMdw}{V}(cc+cx) = \frac{2DMdw}{V}$, VI.CI, si quidem haec expressio fuerit affirmatiua. Ex quo perspicuum est, si punctum V ad alteram partem punctorum C et I nempe inter I et puppim cadat, tum hanc expressionem fieri negatiuam, atque vim restituentem minorem esse futuram, quam si inclinatio circa axem EF esset facta; quin etiam valor ipsius x tantopere in negatiuum excrescere poterit, vt vis restituens, quatenus ea in motu rotatorio producendo consistit, fiat negatiua atque inclinationem adeo augeat.

§. 374. Quamuis autem hoc casu, quo x tantum valorem negatiuum induit, vt etiam $c + x$ fiat negatiuum satis ingens, inclinatio de situ aequilibrii augeatur, tamen subuersio nauis non subsequetur, dummodo habeat stabilitatem. Tum enim centrum grauitatis magis erit eleua-

eleuatum quam in ſitu aequilibrii, ſimul vero altera vis ſuperius determinata, id deprimet, atque in ſtatum naturalem reducet. Quamobrem inclinatio primo tantum momento aliquantulum augebitur, mox vero cum centrum grauitatis propius fuerit ad ſuum ſitum naturalem reductum, motus eueniet fere congruus cum eo, quem ſupra in motu reſtitutionis in ſtatum aequilibrii definiuimus, atque ideo deinceps inclinatio diminui incipiet. Interim tamen hoc certo ſequitur, motum oriturum eſſe perquam difformem, atque a motu oſcillatorio vniformi alieniſſimum.

§. 375. Conſideremus autem caſum, quem figura repraeſentat, quo momentum preſſionum aquae ad inclinationem minuendam atque ad reſtitutionem tendit; motumque inueſtigemus quo haec reſtitutio ſaltem incipiet. Ad hoc ponatur momentum materiae totius nauis reſpectu axis horizontalis per centrum grauitatis ducti, circa quem fiet reſtitutio $= Mk^2$. Atque hinc initium motus reſtitutionis ſimile erit motui reſtitutionis penduli ſimplicis cuius longitudo eſt $= \frac{Vkk}{2D(ff+cc+cx)-Vb}$. Ac penduli tantae longitudinis oſcillationibus iſochronae forent oſcillationes nauis circa axem horizontalem latitudinalem, ſi modo hae oſcillationes eſſent vniformes, neque a motu centri grauitatis turbarentur.

§. 376. Ex his intelligitur, motum nauis poſt inclinationem factam oriundum eo magis fore irregularem ac perturbatum, quo magis primi motus tum centri grauitatis, tum rotationis circa axem latitudinalem a ſe inuicem diſcrepent. At ſupra inuenimus motum centri grauitatis initio conuenire cum motu penduli ſimplicis longitudinis $\frac{Vx}{2D(c+x)}$ (§. 363), hic vero eſt oſtenſum motum

per centrum grauitatis G ductum atque ad planum ADB normalem erit $= Mdw\,(-b + \frac{2D(ff+cc+cx)}{V})$ huiusque effectus tendet ad restitutionem nauis in situm aequilibrii. Atque ex hac expressione simul intelligitur, vtrum navis eo modo, quo posuimus, ex situ aequilibrii declinata sese restituere conetur an secus. Nimirum nauis se restituet si fuerit $\frac{2D(ff+cc+cx)}{V} > b$. Quodsi autem sit VI $= 0$, qui est casus supra in stabilitatis indagatione pertractatus, restitutio sequetur si fuerit $\frac{2Dff}{V} > b$.

§. 373. Cum igitur nauis circa axem latitudinalem stabilitate praedita ponatur, erit $\frac{2Dff}{V} > b$. Quamobrem si inclinatio fiat circa axem PQ vt hic posuimus, vis restituens maior erit, quam vis restituens inclinatione circa axem EF facta, atque excessus illius vis super hanc erit $= \frac{2DMdw}{V}(cc+cx) = \frac{2DMdw}{V}$, VI.CI, si quidem haec expressio fuerit affirmatiua. Ex quo perspicuum est, si punctum V ad alteram partem punctorum C et I nempe inter I et puppim cadat, tum hanc expressionem fieri negatiuam, atque vim restituentem minorem esse futuram, quam si inclinatio circa axem EF esset facta; quin etiam valor ipsius x tantopere in negatiuum excrescere poterit, vt vis restituens, quatenus ea in motu rotatorio producendo consistit, fiat negatiua atque inclinationem adeo augeat.

§. 374. Quamuis autem hoc casu, quo x tantum valorem negatiuum induit, vt etiam $c + x$ fiat negatiuum satis ingens, inclinatio de situ aequilibrii augeatur, tamen subuersio nauis non subsequetur, dummodo habeat stabilitatem. Tum enim centrum grauitatis magis erit

eleua-

eleuatum quam in ſitu aequilibrii, ſimul vero altera vis ſuperius determinata, id deprimet, atque in ſtatum naturalem reducet. Quamobrem inclinatio primo tantum momento aliquantulum augebitur, mox vero cum centrum grauitatis propius fuerit ad ſuum ſitum naturalem reductum, motus eueniet fere congruus cum eo, quem ſupra in motu reſtitutionis in ſtatum aequilibrii definiuimus, atque ideo deinceps inclinatio diminui incipiet. Interim tamen hoc certo ſequitur, motum oriturum eſſe perquam difformem, atque a motu oſcillatorio vniformi alieniſſimum.

§. 375. Conſideremus autem caſum, quem figura repraeſentat, quo momentum preſſionum aquae ad inclinationem minuendam atque ad reſtitutionem tendit; motumque inueſtigemus quo haec reſtitutio ſaltem incipiet. Ad hoc ponatur momentum materiae totius nauis reſpectu axis horizontalis per centrum grauitatis ducti, circa quem fiet reſtitutio $= Mk^2$. Atque hinc initium motus reſtitutionis ſimile erit motui reſtitutionis penduli ſimplicis cuius longitudo eſt $= \frac{Vkk}{2D(ff+cc+cx)-Vb}$. Ac penduli tantae longitudinis oſcillationibus iſochronae forent oſcillationes nauis circa axem horizontalem latitudinalem, ſi modo hae oſcillationes eſſent vniformes, neque a motu centri grauitatis turbarentur.

§. 376. Ex his intelligitur, motum nauis poſt inclinationem factam oriundum eo magis fore irregularem ac perturbatum, quo magis primi motus tum centri grauitatis, tum rotationis circa axem latitudinalem a ſe inuicem diſcrepent. At ſupra inuenimus motum centri grauitatis initio conuenire cum motu penduli ſimplicis longitudinis $\frac{Vx}{2D(c+x)}$ (§. 363), hic vero eſt oſtenſum motum

rotationis ipſo initio conuenire cum motu penduli, cuius longitudo ſit $= \frac{Vkk}{2D(ff+cc+cx)-Vb}$. Quo maior itaque fuerit differentia inter has expreſſiones eo maior difformitas inerit in motu nauis. Contra autem perſpicuum eſt, ſi hae duae longitudines fuerint inter ſe aequales, tum oſcillationes vtriusque generis conſentire, atque id circo fore regulares neutrasque ab alteris turbari.

§ 377. Dabitur igitur caſus, quo ex facta inclinatione nauis motum oſcillatorium vniformem ac regularem recipiet, id quod eueniet ſi punctum V ſeu interuallum CV $= x$ ita fuerit conſtitutum vt fiat $\frac{Vx}{2D(c+x)} = \frac{Vkk}{2D(ff+cx+cx)-Vb}$. Quare ſi ex hac aequatione definiatur valor ipſius x, prodibit ille inclinationis caſus, ex qua nauis motum oſcillatorium vniformem conſequetur. Iſte autem caſus latius patebit, nam cum omne corpus, quod initio motu maxime irregulari mouetur, mox vniformitatem affectet, eiusque motus tandem ſeſe ad motum oſcillatorium ſimplicem pendulorum ſimilem componat; per hanc inueſtigationem ille innoteſcet motus, quem nauis, quantumuis irregulari motu principio circa axem latitudinalem moueri inceperit, tandem aſſequetur; ita vt omnes motus oſcillatorii maxime irregulares tamen in hunc motum oſcillatorium regularem tandem abire debeant.

§. 378. Longitudo igitur penduli iſochroni cum motu oſcillatorio regulari, quem nauis tandem recipiet, erit $= \frac{Vx}{2D(c+x)}$, ſi ipſi x valor tribuatur, quem obtinet in hac aequatione: $2Dkkc + 2Dkkx = 2Dffx + 2Dccx + 2Dcxx - Vbx$ quae reducitur ad hanc $xx = \frac{2x(Dkk - Dff - Dcc + \frac{1}{2}Vb) + 2Dkkc}{2Dc}$ Ponatur breuitatis gratia $Dff +$

$Dcc -$

$Dcc - \frac{1}{2}Vb = Dpp$, eſt enim ob ſtabilitatem $Dff > \frac{1}{2}Vb$, hincque multo magis $Dff + Dcc > \frac{1}{2}Vb$, eritque $xx = \frac{x(kk-pp)}{c} + kk$; vnde elicitur $x = \frac{kk-pp}{2c} \mp \sqrt{(kk + \frac{(kk-pp)^2}{4cc})}$. Cum igitur x duplicem habeat valorem, oſcillationes duplici modo tandem regulares euadere poterunt; vterque enim valor ſemper eſt realis. Hoc autem valore ſubſtituto prodit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{V}{2D} \cdot \frac{kk-pp \mp \sqrt{(4cckk + (kk-pp)^2)}}{2cc + kk - pp \mp \sqrt{(4cckk + (kk-pp)^2)}} = \frac{V}{2D} \cdot \frac{2kk}{kk + pp \mp \sqrt{(4cckk + (kk-pp)^2)}}$.

§. 379. Vt hi duo caſus quibus oſcillationes obtingunt vniformes, melius percipiantur, ponamus primum eſſe $CI = c = o$, quo caſu iam nouimus oſcillationes tam verticales, quam horizontales eſſe regulares. Fiet autem $pp = ff - \frac{Vb}{2D}$: et $\sqrt{(kk + \frac{(kk-pp)^2}{4cc})} = \frac{kk-pp}{2c} + \frac{ckk}{kk-pp}$, vnde $x = \frac{kk-pp}{2c} \mp \frac{kk-pp}{2c}$ ob $c = o$. Ergo fit vel $x = o$ vel $x = \infty$. Priori caſu oſcillationes ſolae prodeunt horizontales, quarum longitudo penduli ſimplicis iſochroni eſt $= \frac{V}{2D} \cdot \frac{kk}{pp} = \frac{Vkk}{2Dff - Vb}$, poſteriori oſcillationes ſolae verticales efficientur reſpondentes pendulo $= \frac{V}{2D}$, quos ambo caſus iam ante tractauimus.

§. 380. Ponamus eſſe $p = k$ ſeu $kk = ff + cc \frac{Vb}{2D}$, quae poſitio in nauium figuras cadere poteſt, erit $x = \mp k$. Altero caſu quo eſt $x = CV = +k$ erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{Vk}{2D(c+k)}$, altero caſu vero quo eſt $CV = -k$ fiet longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{Vk}{2D(k-c)}$. Ad ſimilitudinem ergo talis penduli oſcillationes oriri poterunt ſi fuerit $k > c$ hoc eſt $p > c$. Quoties autem nauis habet ſtabilitatem ſimul erit $p > c$; nam propter ſtabilitatem cum ſit $Dff > \frac{1}{2}Vb$, erit in hac aequatione $Dff + Dcc - \frac{1}{2}Vb = Dpp$ etiam $p > c$. Quando autem

eſt

eſt $p \gtrless c$ neutro caſu longitudo penduli inuenta vnquam negatiua eſſe poteſt, ac propterea duobus ſemper caſibus oſcillationes vniformes et tautochronae oriri poterunt.

§. 381. Si interuallum $CI = c$ fuerit valde paruum, ſimul vero $(kk-pp)^2$ quantitas ſatis ingens vt prae ea terminus $4cckk$ ſit perquam exiguus, erit $V(4cckk + (kk-pp))^2 = kk-pp + \frac{2cckk}{kk-pp}$ proxime; vnde erit $x = \frac{kk-pp}{2c} \mp \frac{(kk-pp)}{2c} \mp \frac{ckk}{kk-pp}$. Longitudo autem penduli ſimplicis iſochroni erit, ſi ſignum $+$ locum habeat $= \frac{V}{2D} \cdot \frac{1}{1 + \frac{cc}{kk-pp}} = \frac{V}{2D} \cdot \frac{kk-pp}{cc+kk-pp}$, in his autem oſcillationibus verticales plurimum praeualebunt, motusque circa axem horizontalem vix erit ſenſibilis. Valente autem ſigno $-$ erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{V}{2D} \cdot \frac{kk}{pp - \frac{cckk}{kk-pp}}$; in hocque oſcillationum genere oſcillationes verticales fere erunt nullae.

§. 382. Quomodo autem cunque nauis initio inclinetur ex ſitu aequilibrii, et quantumuis irregularis motus inde oriatur, tamen ipſum motum, qui ſequetur per principia ante ſtabilita determinare licebit dummodo inclinatio de ſtatu aequilibrii fuerit minima. Ponamus enim nauem principio ita declinatam eſſe, vt centrum grauitatis interuallo r magis fuerit depreſſum quam in ſtatu aequilibrii, atque vt tota nauis motu angulari ex ſitu aequilibrii declinata ſit angulo $= s$. Tum vero motum eſſe ſubſecutum, hocque durante depreſſionem centri grauitatis infra ſitum naturalem eſſe adhuc $= y$, et ſitum nauis praeſentem a ſitu aequilibrii differre angulo $= w$. motum vero in hoc ſtatu ita eſſe comparatum, vt celeritas, qua centrum

gra-

grauitatis in ſitum naturalem procedit, ſit debita altitudini v, celeritatem angularem autem circa axem horizontalem per centrum grauitatis G ductum tantam eſſe, vt in diſtantia k ab hoc axe debita ſit altitudini u.

§. 383. Repraeſentet autem figura eum nauis ſtatum, quem hic durante motu conſideramus, erit nobis w quod ante fuerat $= dw$, atque cum ſit $y = x dw$, hic nobis eſt $\frac{y}{w}$, quod ante fuerat x. Iam tempuſculo minimo dt centrum grauitatis aſcendendo progrediatur per intervallum $= - dy$, quo progreſſu altitudo celeritati debita v augmentum accipiat dv; eodem vero tempuſculo dt motu angulari nauis conuertatur per anguli elementum $- dw$, quia ad ſtatum aequilibrii accedit, et altitudo celeritati angulari, quae in diſtantia k viget, debita u augmentum capiat $= du$. Cum igitur elementa dy et du aequali tempuſculo dt conficiantur, erit ex natura motus $dt = - \frac{dy}{\sqrt{v}} = - \frac{kdw}{\sqrt{u}}$ vnde erit $dy : dw = k\sqrt{v} : \sqrt{u}$.

§. 384. Quodſi nunc vtramque ſollicitationem contemplemur, qua tam aſcenſus centri grauitatis acceleratur, quam motus rotatorius incitatur, reperiemus binas ſequentes aequationes

I. $dv = - dy . \frac{2D}{V} (cw + y)$

II. $du = - w dw (\frac{2D}{V} (cc + ff) - b) - dw . \frac{2D}{V} cy$

Ponatur breuitatis gratia $\frac{2D}{V} = 2m$ et $\frac{2D}{V} (cc + ff) - b = 2nk^2$ atque habebuntur ſequentes aequationes

I. $dv = - 2mcw dy - 2my dy$

II. $du = - 2mcy dw - 2nk^2 w dw$

quae inuicem additae ſummam producunt integrabilem; erit ſcilicet

$$v + u = C - 2mcwy - my^2 - nk^2w^2$$

Cum autem ipſo motus initio, quo erit $y = r$ et $w = s$, ſit $v = 0$ et $u = 0$ erit

$$v + u = 2mcrs + mr^2 + nk^2 - 2mcwy - my^2 - nk^2w^2.$$

§. 385. Quoniam autem elementa dy et dw eodem tempore abſoluuntur, erit $dy = \frac{kdw\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ et $dw = \frac{dy\sqrt{u}}{k\sqrt{v}}$; vterque valor ſubſtituatur in illis aequationibus differentialibus, eritque

I. $\frac{dv\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = -2mckwdw - 2mkydw$

II. $\frac{du\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = -\frac{2mcydy}{k} - 2nkwdy$

quarum ſumma integrata dabit $2\sqrt{vu} = \text{Conſt.} - mckw^2 - \frac{mcy^2}{k} - 2mk\int ydw - 2nk\int wdy$. At ex aequatione differentiali prima eſt $-2\int wdy = \frac{v}{mc} + \frac{yy}{c}$, ex altera vero $-2\int ydw = \frac{u}{mc} + \frac{nk^2w^2}{mc}$; quibus ſubſtitutis habebitur $2\sqrt{vu} = \text{Conſt.} + \frac{ku}{c} + \frac{nkv}{mc} + (\frac{nk}{c} - \frac{mc}{k})(yy + k^2w^2)$ ſeu $\frac{mku + nkv}{mc} - 2\sqrt{vu} = (\frac{nk}{c} - \frac{mc}{k})(rr - yy + k^2(ss - w^2))$.

§. 386. Duas igitur nacti ſumus aequationes integrales, ex quibus bini valores v et u poterunt determinari per r, s, y et w. Quodſi fuerit factum, differentietur valor ipſius v inuentus ac differentiale aequale ponatur ipſi $-2mcwdy - 2mydy$, hocque pacto obtinebitur aequatio inter y et w, cuius ope ad datum quemuis ipſius y valorem licebit valorem anguli w aſſignare. Ac ſi denique factis ſubſtitutionibus hae aequationes in ſubſidium vocentur $dt = \frac{-dy}{\sqrt{v}} = \frac{-kdw}{\sqrt{u}}$, omnes quantitates variabiles v, u, y et w per tempus t exhiberi poterunt, atque hoc facto

facto ad datum quoduis tempus ſtatus, in quo nauis verſabitur, aſſignari poterit.

§. 387. Hanc inueſtigationem autem vlterius non perſequor, cum propter calculi difficultatem et prolixitatem, tum etiam, quia praeſens inſtitutum eo non multum iuuaretur. Sufficiat igitur perſpicue monſtraſſe, leges motus hic et in ſuperiore libro ſtabilitas omnino ſufficere ad motus huiusmodi maxime irregulares ac perturbatos determinandos, quanquam ſaepius calculus ob ſummam moleſtiam ad finem perduci non poteſt. Etſi autem in hac inueſtigatione inclinationem nauis e ſitu aequilibrii infinite paruam poſuimus, tamen methodus reſoluendi manet eadem inclinatione poſita quantumuis magna. At tum calculus multo adhuc fit prolixior et difficilior, eo quod in tanta inclinatione, figura ſectionis aquae continuo mutatur cuius mutationis ideo ratio quouis momento haberi debet.

Caput. V.

DE INCLINATIONE, QVAM NAVES A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE PATIVNTVR.

§. 388.

In hoc capite incipiemus in effectus quos vires quaecunque externae nauibus applicatae producere valent, inquirere. Quanquam enim hoc argumentum in superiori libro, vbi corpora quaecunque aquae innatantia considerauimus, iam fusius est pertractatum, tamen hic eandem inuestigationem ad naues in specie transferri conueniet, vt regulas etiam hinc consequamur certas, quas cum in constructione nauium, tum etiam in earum instructione et gubernatione obseruari oporteat. Ex singulis enim circumstantiis ad naues spectantibus propositum nobis est regulas pro nauium constructione, oneratione, et gubernatione elicere, quo deinceps ex omnium harum regularum collisione perfectissima nauium forma colligi queat.

§ 389. Omnes effectus, quas vires quaecunque in naves exerere possunt, ad quinque genera reuocantur. Primum genus eos complectitur effectus, quibus centrum grauitatis nauis, atque adeo ipsa nauis vel sursum vel deorsum vrgetur. Ad genus secundum pertinet motus horizontalis centri grauitatis, quo nauis super aqua a viribus sollicitata progreditur secundum quamcunque regionem. In tertio genere comprehendo motum nauis rotatorium circa

axem

axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem. Quartum autem et quintum genus inclinationes nauis respicit circa axem horizontalem siue longitudinalem siue latitudinalem. Atque haec duo postrema genera hic diligentius inuestigare, et quanta inclinatio a datis quibusque viribus oriri debeat, determinare est propositum.

§. 390. Plerumque autem vna eademque vis plures effectus diuersos in naui producere solet, verum tamen singuli sunt ita comparati et a reliquis disiuncti, vt nullus effectus, a reliquis ab eadem vi oriundis turbetur, quemadmodum in libro superiori demonstratum est. Quamobrem cum hic tantum inclinationem nauis circa axem horizontalem siue longitudinalem siue latitudinalem inuestigare constituerim, hunc effectum solum definire poterimus, sine vllo respectu ad reliquos effectus habito, qui forte ab eadem vi proficiscuntur. Atque ita in hoc negotio versari licebit, quasi reliqui effectus vel omnino hanc inclinationem non comitarentur, vel ab aliis viribus, quae nullam inclinationem producant, penitus destruerentur. Semper enim vires eiusmodi contrariae concipi possunt, quae omnes datae vis effectus praeter eum, qui in inclinatione nauis consumitur, destruant.

§. 391. Quo igitur clarius eas vires cognoscere queamus, a quibus inclinatio nauis producatur primum eas vires notari iuuabit, a quibus nulla inclinatio oriri potest. Hinc enim in quolibet casu eiusmodi vires contrariae fingi poterunt, quae effectus omnes reliquorum generum praeter inclinationem destruant. Imprimis autem hic eae vires considerandae veniunt, quarum directiones per centrum grauitatis nauis transeunt; harum enim virium totus effe-

ctus vel in promotione nauis ſecundum directionem horizontalem, vel in eleuatione ſeu depreſſione nauis tantum conſiſtit. A talibus igitur viribus neque rotatio nauis circa axem verticalem neque vlla inclinatio oriri poterit: ex quo huiusmodi vires in hoc capite non locum inuenient, niſi ad effectus ab inſtituto alienos mente ſaltem deſtruendos.

§. 392. Simili modo nulla vis, cuius directio tranſit per axem horizontalem per centrum grauitatis ductum, inclinationem circa illum axem generare valet; et hanc obrem ſi inclinatio circa axem longitudinalem tantum conſideretur, omnes vires huic effectui erunt impares, quarum directiones tranſeunt per axem longitudinalem, hoc eſt, quae productae cum hoc axe vel concurrunt, vel parallelae exiſtunt; quod idem de axe latitudinali eſt intelligendum. Deinde vero omnes vires, quarum directiones ſunt horizontales, atque in ipſo plano horizontali per centrum grauitatis tranſeunte, ſitae, circa neutrum axem ſiue longitudinalem ſiue latitudinalem nauem inclinabunt. Ex his igitur iam facilius intelligetur, a quibusnam viribus nauis inclinationem patiatur; an vero ſecus; quodſi enim vis nauem vrgens aliter ſit comparata, atque modo indicauimus, certo inclinatio nauis ſubſequetur.

§. 393. Quaecunque autem oriatur nauis inclinatio a ſitu naturali, ea circa axem aliquem horizontalem per centrum grauitatis nauis tranſeuntem fieri cenſenda. Quanquam vero huiusmodi axes numero infiniti exiſtunt, tamen omnes inclinationes reuocari poſſunt ad binos memoratos axes principales, longitudinalem ſcilicet ac latitudinalem; ita vt definita inclinatione, quae a data vi circa vtrumque illum

axem

axem generatur, vera inclinatio nauis cognoſcatur; ſimulque axis ille obliquus aſſignari queat, circa quem nauis durante inclinatione ſeſe conuerterit. Simili ſcilicet modo, quo decompoſitio virium, inclinatio circa axem obliquum reſolui poteſt in binas inclinationes circa ambos axes principales.

§ 394. Sit enim AEBF ſectio nauis horizontalis per eius centrum grauitatis G facta, in eaque ambo axes principales, longitudinalis AB et latitudinalis EF; ſitque A prora, B puppis, E latus ſiniſtrum, F dextrum. Ponamus iam nauem duplicem pati inclinationem, alteram circa axem AB ſiniſtrorſum per angulum α, alteram circa axem EF prorſum per angulum β, huicque duplici inclinationi aequiualere inclinationem ſimplicem, quae fiat circa axem obliquum MN verſus V, per angulum γ. Sumatur iam punctum quoduis V, e quo ad tres illos axes ducantur normales VT, VS, et VR. Nunc pro duplici inclinatione, inclinatio circa axem AB deprimet per ſpatium $\alpha . TV$, altera inclinatio circa axem EF deprimet idem punctum per ſpatium $\beta . SV$. ita vt punctum V a duplici inclinatione deprimatur per ſpatium $\alpha . TV + \beta . SV$. ita ſimplici inclinatione circa axem MN deprimitur per ſpatium $\gamma . RV$. Tab. XIII. fig. 1.

§. 395. Quoniam igitur tam duplex quam ſimplex inclinatio eundem motum in ſingulis punctis V producit, fiet $\alpha . TV + \beta . SV = \gamma . RV$ Ducta ergo recta GV fiet $\alpha .$ ſin. $AGV + \beta .$ ſin. $EGV = \gamma .$ ſin. MGV. Quae aequatio cum vbique locum habere debeat, erit puncto V in A translato $\beta = \gamma .$ ſin. $MGA = \gamma .$ coſ. MGE; puncto vero V in E translato fit $\alpha = \gamma .$ ſin. $MGE = \gamma$

coſ.

cos. BGM. ita autem angulis α et β determinatis erit vbique α sin. AGV $+ \beta$ sin. EGV $= \gamma$. sin. MGV. Fiet autem $\alpha\alpha + \beta\beta = \gamma\gamma$, ideoque $\gamma = \surd(\alpha\alpha + \beta\beta)$; hincque porro positio axis obliqui MN ita definietur vt sit sin. EGM $= \frac{\alpha}{\surd(\alpha\alpha + \beta\beta)}$ et cos. EGM $= \frac{\beta}{\surd(\alpha\alpha + \beta\beta)}$ seu tang. EGM $= \frac{\alpha}{\beta}$.

§. 396. Quodsi ergo nauis duplicem patiatur inclinationem alteram circa axem longitudinalem AB sinistrorsum per angulum α, alteram circa axem latitudinalem EF per angulum β; duplex haec inclinatio reuocabitur ad inclinationem simplicem circa vnicum axem obliquum, quae fiet per angulum $\gamma = \surd(\alpha\alpha + \beta\beta)$. Positio autem huius axis obliqui sequenti modo definietur. Diuisa superficie nauis sectionis per axes principales in quatuor portiones AGE, BGE, BGF et AGF; binae portiones a duplici inclinatione motus consentientes nanciscentur, vti nostro casu portiones AGE, et opposita BGF; reliquae vero binae oppositae portiones AGF et BGE motus discrepantus accipient per easque axes ille obliquus MN transibit, ita autem erit positus, vt sit anguli EGM tangens $= \frac{\alpha}{\beta}$, circa quem nauis inclinabitur per angulum $= \surd(\alpha^2 + \beta^2)$.

§. 397. Inclinatio igitur quam nauis a vi quacunque patietur, commodissime definietur, si, quantam inclinationem ea vis circa vtrumque axem principalem producat, inuestigabitur; tum enim simul axis obliquus innotescet, circa quem ab ea vi inclinatio simplex orietur, atque inclinationis quantitas. Quamobrem sufficiet exposuisse methodum, cuius ope inclinatio circa alterutrum axem principalem a data vi oriunda determinari queat. Facillime autem

autem hoc praestabitur, si vis seu potentia nauem sollicitans in ternas vires resoluatur, quarum vnius directio sit verticalis, reliquarum binarum vero directiones horizontales, ita vt alterius directio parallela sit axi longitudinali, altera vero axi latitudinali; haecque resolutio sine vlla molestia instituitur, dum vis sollicitans, si multiplicetur per cosinum anguli, quem eius directio cum vna ex illis tribus directionibus facit, statim praebet vim resultantem in ea ipsa directione.

§. 398. Cum autem vis quaecunque nauem sollicitans in huiusmodi tres vires fuerit distributa, singulae seorsim considerentur. Ac primo quidem vis verticalis spectetur, inuestigetur eius distantia ab vtroque plano verticali, altero per axem latitudinalem, altero per axem longitudinalem; quo facto vis verticalis multiplicata per distantiam a plano longitudinali dabit momentum eius respectu axis longitudinalis; similique modo eadem vis multiplicata per distantiam a plano verticali, quod per axem latitudinalem transit, dabit eius momentum respectu axis latitudinalis. Inuentis autem his momentis respectu vtriusque axis principalis, diligenter dispiciatur, in vtram plagam inclinatio nauis inde debeat oriri, quo pateat, vtrum plura eiusmodi momenta ad eundem axem relata per additionem an per subtractionem iungi debeant.

§. 399. Quod autem ad binas reliquas vires horizontales attinet, perspicuum est, eam, cuius directio axi longitudinali est parallela nullum momentum respectu huius axis producere; neque etiam ab ea, cuius directio parallela est axi latitudinali, respectu huius axis momentum existere. Quare ex vi, cuius directio est parallela axi longitudinali tantum momentum respectu alterius axis lati-

tudinalis oritur, contraque ex vi, cuius directio est parallela axi latitudinali, tantum nascetur momentum respectu axis longitudinalis. Vtriusque autem huius momenti quantitas obtinebitur, si vtraque vis multiplicetur a distantia sua a plano horizontali per centrum grauitatis ducto, quae adeo distantia pro vtraque vi erit eadem.

§. 400. Quacunque ergo vi nauem sollicitante resoluta in ternas memoratas vires momenta ex ea pro vtroque axe principali oriunda facili negotio determinabuntur. Duo autem ad summum momenta pro ambobus axibus reperientur, quorum alterum ex vi verticali, alterum ab vna vi horizontali proficiscitur. De his itaque binis momentis dispiciendum est, vtrum ad effectus contrarios an consentientes producendos sint accommodata; vt intelligatur, vtrum eorum differentia an summa capi debeat, pro toto momento ex illa vi oriundo. Quodsi autem nauis simul a pluribus viribus sollicitetur, simili modo momenta ex singulis viribus pro vtroque axe principali colligentur, ex quibus tandem coniunctis momenta totalia pro vtroque axe prodibunt.

§. 401. In hoc negotio vires sollicitantes tantum instituto praesenti conformiter sumus contemplati: momenta scilicet tantum ex iis deriuauimus, ad inclinationem producendam idonea, atque a reliquis effectibus cogitationem prorsus abstraximus. Ista vero resolutio cuiusque vis in ternas pariter ad effectus reliquos cognoscendos maxime est accommodata. Nam primo vis verticalis praeter inclinationem producet in naui vel maiorem vel minorem immersionem. Atque vires horizontales nauem partim secundum horizontem propellent, partim conuertent

tent circa axem verticalem per centrum grauitatis nauis ductum.

§. 402. Quodsi iam ex viribus nauem sollicitantibus deducta fuerint momenta nauem circa ambos axes principales inclinantia, ex iis quae in libro superiori demonstrata sunt facili negotio inclinatio ipsa circa vtrumque axem determinabitur; si quidem vti hic perpetuo ponimus, inclinatio fuerit tam parua vt ea in calculo pro infinite parua haberi queat, id quod accidit si sinus inclinationis ipsi inclinationis angulo fuerit proportionalis. Circa vtrumque autem axem duplex oriri potest inclinatio; circa axem longitudinalem scilicet nauis vel sinistram vel dextram versus inclinari potest; circa axem latitudinalem vero inclinatio vel proram versus, vel retrorsum fieri potest, quod discrimen ex momentis inclinationem vtramque generantibus facile cognoscetur.

§. 403. Inclinatio vero circa quemcunque axem colligitur ex stabilitate, quam nauis habet respectu illius axis. Si enim stabilitas respectu axis cuiusuis ponatur F, eaque modo supra adhibito exprimatur, ea ita se habet, vt, si nauis circa illum axem inclinetur angulo $= w$, momentum quo ipsa nauis sese restituere conatur, futurum sit $= Fw$. posito sinu toto $= 1$, et denotante w vel ipsum arcum, angulum inclinationi aequalem in hoc circulo subtendentem vel eius sinum. Ex quo apparet esse F momentum, seu productum ex pondere quodam in aliquam longitudinem Expressimus autem stabilitatem F per pondus nauis M in longitudinem datam ductum.

§. 404 Ponamus nunc ex viribus externis sollicitantibus nauem resultasse momentum $= P$. ad nauem circa axem siue

longitudinalem ſiue latitudinalem inclinandam, cuius reſpectu ſtabilitas ſit $=$ F: atque ab hoc momento oriri inclinationem per angulum $= w$, quam quaerimus. Cum igitur ipſa nauis in hoc ſtatu inclinato polleat vi ſeſe reſtituendi, huiusque vis momentum ſit $= Fw$, neceſſe eſt, vt momentum P virium hanc inclinationem producens aequale ſit et contrarium vi reſtituenti; ex quo fiet $P = Fw$, hincque $w = \frac{B}{F}$. Quamobrem fractio $\frac{P}{F}$, cuius numerator et denominator quantitates homogeneas momenta ſcilicet nota denotant, dabit ſinum anguli inclinationis oriundae a virium momento P, poſito ſinu toto $=$ I.

§. 405. In genere igitur intelligitur, quo maior fuerit ſtabilitas nauis reſpectu eius axis, circa quem nauis inclinatur, eo minorem fore inclinationem, eadem manente vi inclinante P, quod quidem ex ipſa ſtabilitatis idea conſequitur. Quamobrem vt nauis minimis inclinationibus ſit obnoxia, ſtabilitas quantum fieri poteſt, augeri debet, quod, quibus modis efficiendum ſit, ſupra ſuſius oſtendimus. Atque ideo ad nauium formam perfectiſſimam inueſtigandam hic ſtabilitate F relicta, diſpiciemus, quemadmodum momentum P pro nauis incolumitate comparatum eſſe debeat.

§ 206. Fractio igitur $\frac{P}{F}$, in qua eſt P ad F vt ſinus anguli inclinationis, a momento virium P ortae ad ſinum totum, tam exigua eſſe debet, vt haec inclinatio naui nullum detrimentum afferat. Quamobrem inclinationes illas maximas quas nauis ſine vllo periculo ſubire poteſt, definiri oportet, vt limites habeantur, quos inclinationes transgredi non liceat. Ac primo quidem pro axe longitudinali videtur inclinationis angulus 10° ſuperare non debere;

bere; pro axi latitudinali autem inclinatio vltra quinque gradus exſurgere non poteſt, eo quod ob ingentem nauivm longitudinem immerſio et emerſio in prora et puppi nimis fieret magna. Hos autem limites non quaſi fixos aſſumimus, ſed tantum exempli gratia; atque pro dato nauium ſtatu ii vel maiores vel minores accipi poterunt. Interim tamen incolumitati nauium eo magis conſuletur, quo minores iſti limites conſtituantur.

§. 407. Si igitur inclinatio circa axem longitudinalem oriatur, prouidendum eſt, ne valor fractionis $\frac{P}{F}$ vnquam excedat $\frac{1}{6}$. quae fractio proxime accedit ad ſinum anguli 10°. At pro inclinatione circa axem latitudinalem fractionis $\frac{P}{F}$ valor nunquam maior eſſe debet quam $\frac{1}{12}$. Quare ſi in nauibus ſtabilitas reſpectu vtriusque axis principalis iam fuerit definita, in hoc erit elaborandum, vt nauis nunquam tantis viribus exponatur, quarum momenta inclinationem producentia excedant limites iſtos definitos, vel alios, qui ad naues magis reperiantur accommodati, qui quidem ab his non multum diſcrepabunt. Cum autem iſti limites angulis ſatis paruis contineantur, id nanciſcimur commodi, vt ipſi anguli ſuis ſinibus proxime ſint proportionales; ex quo regula data perpetuo tuto adhiberi poterit.

§. 408. Quodſi autem euentus externi, quibus naues expoſitae eſſe ſolent, non ita ad lubitum temperari queant, vt momenta inclinantia, quae ex iis naſcuntur, infra praeſcriptos limites redigi queant atque ideo valor litterae P tanquam datus accipi debeat; tum aliter ſecuritati nauis proſpici non poteſt, niſi vt ipſi tanta ſtabilitas concilietur, ex qua angulus inclinationis $\frac{P}{F}$ prodeat innocuus.

 Atque

Atque ex huiusmodi casibus vel fortuito vel necessario se immiscentibus ipsa stabilitatis quantitas determinari debebit. Cum enim nauium conseruatio prae omnibus reliquis commodis intendatur, in nauium constructione stabilitas praecipue spectari debebit, atque effici, vt ea ad debitam quantitatem augeatur. Quod iudicium cum ex quantitate virium externarum, naui interitum minantium, tum ex statu nauium ipso, vnde intelligitur, quantam inclinationem quaeque nauis sine periculo pati queat, institui oportet.

§. 409. Si omnes naues tam ratione constructionis quam onerationis essent corpora inter se perfecte similia, tum earum stabilitates respectu axium homologorum tenerent inter se rationem quadruplicatam laterum homologorum. Scilicet si maioris nauis fuerit profunditas carinae $= C$ et minoris profunditas carinae $= c$, erit primo pondus nauis maioris ad pondus minoris vti C^3 ad c^3. Stabilitas autem nauis maioris se tenebit ad stabilitatem minoris vt C^4 ad c^4. Si quidem vtraque stabilitas ad axem eiusdem nominis hoc est siue longitudinalem siue latitudinalem referatur. Quare si stabilitas maioris nauis ponatur $= F$ et stabilitas minoris $= f$ erit $F : f = C^4 : c^4$.

§. 410. Vires autem externae, quibus naues expositae esse solent, siue spectetur vis propellens, siue vis aquarum, tenent rationem duplicatam laterum homologorum. Quodsi enim naues vento propellantur vis venti eadem celeritate vrgentis erit vt superficies velorum, indeque tenebit rationem duplicatam laterum homologorum. Simili modo resistentia aquae, quando omnia sunt paria, superficiei nauis in quam irruit est proportionalis, hincque etiam tenebit rationem duplicatam laterum homologorum. Vnde

efficitur

efficitur vt eiusmodi naues ſimiles ab eiusdem venti impulſu aequales in aqua acquirant celeritates, poſtquam ſcilicet ad motum aequabilem fuerint redactae. Quo enim naues fuerint maiores eo tardius hanc velocitatem vniformem aſſequentur, vti patet ex iis, quae ſupra de motu progreſſiuo ſunt tradita.

§. 411. Cum autem vires ſollicitantes teneant rationem duplicatam laterum homologorum, earum momenta, ex quibus inclinationem nauium concludere oportet, erunt in ratione triplicata laterum homologorum, eo quod momenta prodeunt, ſi vires ſollicitantes per vectes multiplicentur, qui ipſis lateribus homologis ſunt proportionales. Quare ſi pro naui maiori momentum inclinans ponatur $= P$ et pro naui minori $= p$, erit $P : p = C^3 \; c^3$. Hinc igitur anguli inclinationum in naui maiori et minori erunt vt $\frac{1}{C}$ ad $\frac{1}{c}$. Hoc eſt inclinationes in nauibus ſimilibus a viribus quoque paribus productae erunt reciproce vti latera homologa; ita vt, tametſi omnia ſint ſimilia, inclinationes tamen maxime fiant diſſimiles.

§. 412. Cum igitur in nauibus ſimilibus inclinationes a paribus viribus ortae ſint eo minores, quo maiores fuerint naues, manifeſtum eſt nauium ſimilium maximas minimo ſubuerſionis periculo eſſe obnoxias. Ex quo intelligitur quo naues conficiantur maiores, eas praeditas eſſe eo maioribus commodis, ſi cetera omnia ſint paria. Quin etiam ſi naues minores ita fuerint comparatae, vt ſine aperto interitus periculo tempeſtatum impetibus committi nequeant, tamen naues maiores ad idem exemplum conſtructae ab eodem periculo ob ſolam magnitudinem liberantur. Hocque quotidiana experientia clariſſime confirmat,

mat, quippe qua conſtat minora nauigia tempeſtatis vehementiam ſuſtinere minime poſſe, cum tamen naues maiores tuto per mare migrare queant. Accedunt quidem hic alia incommoda ab vndis oriunda, quarum hic nullam habemus rationem; hoc tamen non obſtante theoria manifeſto per experientiam confirmatur.

§. 413. Quodſi autem ponamus nauem minorem vim tempeſtatis ſine vllo periculo ſuſtinere poſſe, tum maior nauis, ſi quidem omnia ſint ſimilia, multo tutius in eadem tempeſtate verſabitur. Deinde vero ſi aequalis inclinatio cum pari periculo fuerit coniuncta, maior nauis quoque maiorem impetum cum eodem periculo ſufferre poterit; nam ſi impetus ſiue venti ſiue aquae fuerint in ratione ſimplici laterum homologorum nauium, tum demum naues maiores ac minores aequalem inclinationem patientur; ac proinde aequali periculo erunt obnoxiae.

§. 414. Perſpicuum igitur eſt maximas naues prae minoribus ſummis et grauiſſimis emolumentis eſſe praeditas, ſi quidem inclinatio, de qua hic nobis ſola ſermo eſt, ſpectetur, a qua nauis incolumitas potiſſimum pendet. Praeterea autem facile intelligitur, a motu et impetu vndarum, quibus naues non ſolum ſuccutiuntur, ſed etiam ex ſitu erecto deturbantur, naues, quo ſint maiores, eo minus affici debere, id quod praeter rationem experientia abunde teſtatur. Laborant vero etiam naues maiores prae minoribus non contemnendis incommodis; primo enim non tam facile ſe dirigi ac gubernari patiuntur, qua de re infra fuſius videbimus; deinde vero ſi in mari occulti ſcopuli ac ſyrtes reperiantur, naues maiores facile naufra-

naufragium patiuntur, dum minores tuto transire possunt: verum huiusmodi casus alieni in theoriam non incurrunt.

§. 415. Quodsi autem maxima violentia, in quam naues vnquam incidere possunt, fuerit definita, atque summa inclinatio, quam nauis sine damno pati potest, determinata, similitudo nauium ita poterit alterari, vt naues maiores multo insigniora commoda consequantur. Scilicet, si nauis minor, cuius latus homologum sit $= c$, incolumis perseuerare queat, in naui maiori maior velorum copia, quam similitudo requirit, sine periculo adhiberi poterit. Scilicet si maioris nauis latus homologum sit C; superficies omnium velorum in naui maiori ita constitui potest, vt se habeat ad superficiem velorum in minore vt C^5 ad c^3, quo impetrabitur, vt nauis maior celerius propellatur quam minor, paremque tamen inclinationem subeat.

§. 416. Quanquam autem haec, quae ad velorum constitutionem spectant, infra data opera sumus evoluturi, tamen, quantum ad praesens institutum nauium scilicet inclinationem attinet, hic paucis tetigisse iuuabit. Vidimus autem, naues, quo sint maiores, maiorem velorum copiam admittere, quam ratio duplicata laterum homologorum requirit; si naues ceterum inter se ita sint similes, vt earum stabilitates teneant rationem quadruplicatam laterum homologorum; atque vt aequales inclinationes eueniant, momenta ex vi venti ad nauem inclinandam oriunda tenere debere rationem pariter quadruplicatam laterum homologorum. Quodsi ergo latitudo velorum ponatur $= L$ et altitudo $= A$, erit vis venti absoluta vt AL eiusque momentum ad nauem inclinandam vt $A^2 L$, vel neglectis cum velorum conuergentia sursum, tum altitudine supra

centrum grauitatis, vel vbique similibus positis. Hincque debebit esse $A^2 L$ vt C^4, quo inclinationes prodeant aequales.

§. 417. Si iam in nauibus ceterum similibus latitudo velorum L ponatur lateribus homologis proportionalis, altitudo velorum A debebit esse vt $C \sqrt{C}$, hoc est altitudines velorum vel malorum tenebunt rationem sesquiplicatam laterum homologorum: ita vt in naui quadruplo maiori seu 64 vicibus grauiori, sumta latitudine velorum quadrupla, altitudo malorum capi debeat octies maior. Sumtis vero velorum altitudinibus in ratione laterum homologorum, latitudines accipi poterunt in ratione duplicata laterum homologorum. Atque generaliter si latitudo capiatur vt C^n et altitudo A vt C^m, debebit esse $2m+n = 4$; vnde fiet vis venti absoluta nauem propellens vt C^{4-m}, quia est vt velorum superficies AL.

§. 418. Quodsi autem non expediat in nauibus maioribus quantitatem virium tantum augere, quantum stabilitas permittit, tum tuto in istiusmodi nauibus maioribus stabilitas diminui poterit. Si enim tam altitudo quam latitudo velorum teneat rationem simplicem laterum homologorum, seu subtriplicatam ponderum in nauibus diuersae magnitudinis, ex quo vires impellentes a vento oriundae rationem laterum homologorum duplicatam, momenta vero ad nauem inclinandam tendentia rationem triplicatam habebunt. Tum igitur sufficiet naues ita adornasse, vt stabilitates inter se seruent rationem triplicatam laterum homologorum: quae, si perfecta constitueretur similitudo, forent biquadratis laterum homologorum proportionales. Huicque hypothesi accommodauimus ea, quae supra in Cap. de Stabilitate §. 251. et seqq. sunt tradita.

§. 419.

§. 419. Quanquam autem ſtabilitas tam eſſentialis ac neceſſaria nauium eſt proprietas, vt expedire videatur, eam, quantum fieri queat, augere, tamen lucrum ex eius nimia multiplicatione oriundum parui eſt momenti, ita vt merito aequieſcere queamus, ſi ſtabilitas tanta fuerit, vt nauis nunquam vltra datos limites inclinari queat. Si quidem ſtabilitatis multiplicatio, quae praeter neceſſitatem inſtituatur, nullis incommodis alius naturae eſſet permixta, tum vtique foret conſultum ſtabilitatem efficere quam maximam; ſin autem incommoda hinc oriunda ſaltem alicuius fuerint momenti, minime conueniret ea negligere. Quae cum ita ſint in nauibus maioribus ſaepenumero conueniet, ſtabilitatem ex ſimilitudine oriundam aliquantum diminuere, vt alia commoda non parui momenti, quibus alias ſtabilitas obſtare ſolet, inde obtineantur, atque ad maiorem perfectionis gradum euehantur.

§. 420. Praecipuum igitur momentum, ex quo ſtabilitatem cuiusque nauis determinari conueniat, petendum eſt ex viribus, ad quas ſuſtinendas nauis vel de induſtria accommodata eſſe debet, vel quibus caſu nauis ſaepe exponitur; vbi maxime proſpiciendum eſt, ne iſtiusmodi vires contingentes damnum afferant. Atque ex hac conſideratione determinabitur quantitas ſtabilitatis, vt nauis valeat iſtiusmodi viribus ſatis reſiſtere, ne ab iis detrimentum patiatur. Quo facto ſufficiet naui tantam vel ſaltem non multo maiorem ſtabilitatem inducere, et reliqua capita, quibus nauis determinatur, tamdiu indeterminata relinquere, quoad reliquae proprietates omnes, quibus nauem praeditam eſſe oportet, fuerint ſedulo perpenſae; quo etiam his facilius per nauis conſtructionem ſatisfieri queat. Hactenus

quidem eiusmodi proprietates nondum ſumus contemplati quae ſtabilitatis determinationem ſuadeant, ſed infra tales proprietates abunde occurrent.

§. 421. Ingenere haec valent ad ſtabilitatem nauium cum ratione axis longitudinalis tum latitudinalis ex viribus, quibus naues actu exponuntur, determinandam; quo in negotio hoc tantum eſt cauendum, ne ab his viribus inclinatio nauibus damnoſa afferatur; id quod ſtabilitate iuſtae magnitudinis nauibus inducenda obtinebitur. Infra vero, vbi vires, quibus naues vrgeri ſolent, curatius examinabimus, in earumque veram magnitudinem inquiremus, pro quouis caſu ipſam ſtabilitatem ad nauium incolumitatem requiſitam accurate definire licebit. Quamobrem hoc loco iſtam doctrinam eatenus tantum expoſuiſſe ſufficiat, vt poſt modum, quando vera virium ſollicitantium quantitas definietur, ſtatim inclinatio ab iis oriunda aſſignari queat, ex quo deinceps praecepta ad nauium conſeruationem neceſſaria deducantur.

§. 422. Hic vero adhuc obiter notari conueniet vires, quibus naues circa axem latitudinalem inclinantur, multo maiores eſſe iis, quae naues circa axem longitudinalem inclinare conantur. Cum enim praecipuus nauium ſcopus in curſu ſit poſitus, qui maximam partem ſecundum directionem axis longitudinalis inſtitui ſolet, vires etiam tam propellentes, quam quae naui reluctantur, ſecundum eandem fere directionem ſollicitabunt; ex quo eae maxime valebunt ad naues circa axem latitudinalem inclinandas, parum vero circa axem longitudinalem; niſi forte in curſu nauium, quae a vento propelluntur obliquo, curſus aduerſus plagam venti inſtituitur; vbi virium mo-

momentum respectu axis longitudinalis satis fit magnum. Hinc igitur sequitur regula maximi momenti, quae postulat, vt in omnibus nauibus stabilitas respectu axis latitudinalis multo reddatur maior, quam respectu axis longitudinalis.

§. 423. Quodsi autem AEBF denotet sectionem aquae, AB eius axem longitudinalem, EF axem latitudinalem, et CD profunditatem carinae; porro vero centrum magnitudinis carinae positum sit in O, et totius nauis centrum grauitatis in G: in capite de stabilitate vidimus, si nauis totius pondus ponatur $= M$, fore stabilitatem respectu axis longitudinalis proxime $= M\left(\frac{EF^2}{10\,CD} - OG\right)$, stabilitatem vero respectu axis latitudinalis $= M\left(\frac{AB^2}{10\,CD} - OG\right)$. Hanc ob rem ista quantitas $\frac{AB^2}{10\,CD} - OG$ multo maior esse debebit, quam illa $\frac{EF^2}{10\,CD} - OG$; vnde sequitur in omnibus nauibus esse debere $AB > EF$. Quo circa patet ratio praecipua huius regulae constantissimae, qua in omnibus nauibus longitudo AB multum superare debet latitudinem EF. Tab. IX. fig. 5.

§. 424. Commemorata generatim nauium inclinatione, quae a vi venti oriri potest, sequeretur, vt etiam inclinationem nauium a vi remorum oriundam, quae est altera vis praecipua, qua naues propelli solent, contemplaremur, sed quia ob directionem harum virium fere horizontalem, et parum a plano horizontali per centrum grauitatis nauis ducto distantem, momentum harum virium fit satis exiguum, nulla inde inclinatio proficisci potest, quae nauis detrimentum afferat; idque eo magis cum istas vires pro lubitu moderari liceat. In huiusmodi igitur nauibus, quae remis tantum propelluntur, stabilitas ex aliis viribus, in quas naues fortuna incidunt, debebit definiri,

 qua-

quarum vtique in omnibus nauibus ratio maxime eſt habenda, cum eae non a noſtro arbitratu pendeant, et plerumque de improuiſo tam vehementer irruunt, vt naues in maximum pereundi periculum incidant. Qui caſus, quo minus euitari poſſunt, eo magis eſt laborandum, vt naves tantam violentiam ſuſtinere queant.

§. 425. Poſt ventum vires, quibus naues maxime agitantur, in aqua ſunt poſitae, quae ad duo genera commode reuocantur. Primo ſcilicet etſi mare eſt tranquillum, tamen ſi nauis celeriter vehitur, magnam ab aquae reſiſtentia vim ſuffert, cuius effectus quidem potiſſimum in motus retardatione conſtat, verumtamen etiam pro figura nauis momentum ad inclinationem producit. Alter effectus multo vehementior cernitur, ſi aqua vndis vehementer turbatur; tum enim non ſolum naues ab alliſione vndarum vim patiuntur inclinationem efficientem, verum etiam ob ſuperficiem aquae non amplius horizontalem ſitus aequilibrii nauium maxime perturbatur, ex quo ingentes inclinationes et alterationes in portione, quae aquae eſt ſubmerſa, oriri poſſunt.

§. 426. Quod ad vires prioris generis attinet, eae ſunt eo fortiores, quo celerius nauis in aqua progreditur, et propemodum ſequuntur rationem celeritatum duplicatam. Fit autem iſte impetus potiſſimum aduerſus proram, ſi quidem nauis curſu directo progrediatur; in curſu obliquo
Tab. XIII. autem non multum a prora diſtabit. Effectus autem in
fig. 3. naui inclinationem generans imprimis ab obliquitate prorae AC pendet; quae ſi eſſet nulla, proraque verticaliter ſpinae CD inſiſteret, momentum reſiſtentiae ad inclinationem producendam perquam eſſet paruum, dum tan-

tantum penderet a diſtantia mediae directionis reſiſtentiae a plano horizontali per centrum grauitatis nauis directo. Atque hoc caſu reſiſtentia proram deprimeret, ſi media directio infra centrum grauitatis caderet, contra autem eleuaret.

§ 427. Maioris autem momenti fiet iſta reſiſtentiae vis inclinationem importans, ſi prora AC oblique deſcendat, tum enim media directio reſiſtentiae aquae RS ſurſum dirigetur eo magis, quo linea AC plus a ſitn verticali receſſerit. Hinc itaque momentum inclinans eo maius exiſtet, quo longior fuerit nauis, eo quod a diſtantia horizontali puncti R a recta verticali per centrum grauitatis ducta pendet. Tali igitur vi RS prora nauis eleuabitur, eoque inclinatio circa axem latitudinalem puppim verſus generabitur. Effectus iſte etiam ad nauis vtilitatem traduci ſolet, cum eo inclinatio proram verſus, quae a viribus nauem propellentibus oritur, diminuatur, nauisque magis in ſitu erecto detineatur: quin etiam tali prorae obliquitate reſiſtentia admodum diminuitur, quod eſt commodum non leuis momenti; ſiquidem aliae rationes non aduerſentur.

§. 428. Tametſi vero iſtiusmodi prorae obliquitas duplicem vtilitatem affert, decrementum ſcilicet reſiſtentiae et deſtructionem inclinationis a viribus propellentibus oriundae, tamen eam vltra certos limites augere non expedit, modumque in ea obſeruari oportet. In nauibus enim, quae vento propelluntur, in quibus effectus ab hac prorae decliuitate oriundus maximi vſus eſſe videatur, ob alias grauiores rationes iſta decliuitas, quantum fieri poteſt, debet euitari; namque per eam centrum reſiſtentiae nimis

a cen-

a centro grauitatis anteriora verſus remouetur, quo fit, vt gubernaculi vſus fiat admodum difficilis; quo de argumento autem infra fuſius agetur. In nauibus autem, quae ſolis remis cientur, quia vis proram verſus inclinans non eſt ſenſibilis, etiam deſtructione tantopere non indiget; propter reſiſtentiae vero diminutionem iſtae naues maiorem obliquitatem admittunt, quia nunquam curſu obliquo vti coguntur.

§. 429. Vt autem pro inſtituto huius capitis ſolam inclinationem ab hac reſiſtentiae vi oriundam contemplemur, ante omnia videmus, eius momentum ad nauem inclinandam eo fieri maius, quo magis obliqua conſtituatur prora. Ponamus enim proram tam oblique eſſe formatam, vt ſpeciem roſtri C*a* referat, etiamſi ipſa reſiſtentia ſit minor, tamen momentum ad nauem inclinandam augebitur ob duplicem rationem, primo ſcilicet, quia media directio *rs* propius ad ſitum verticalem accedit ac deinde, quia ipſa media directio *rs* magis a medio nauis verſus roſtrum *a* remouetur. Hinc igitur non ſolum inclinatio creſcet, ſed etiam in ipſo roſtro *a* ob magnam a centro grauitatis diſtantiam magis fiet ſenſibilis, ex quo perquam magna portio roſtri aquae modo immergetur, modo eminebit.

§. 430. Incommodum hoc, etiamſi in ſe ſpectatum leue videatur, tamen, quia roſtrum *a* admodum alte ſupra aquam exſtrui atque confirmari deberet, ne vnquam aquae ſubmergeretur, in reliquis ſcopis, quos in ſtructura nauium attendere oportet, magnum impedimentum inferret. Ad haec vero accedit impetus vndarum, quae pariter in obſtacula normaliter agentes tale roſtrum vehementius

ſurſum

ſurſum pellerent, atque oſcillationes circa axem latitudinalem nimis violentas producerent; vnde nauis hoc modo inſtructa proram haberet nimis mobilem, reſiſtentiamque propterea valde inaequabilem pateretur, vt hinc motus perturbatus et incertus oriri deberet. Has ob rationes nunc quidem praelonga illa roſtra, quibus veteres naues ſuas exornarunt, maximam partem ſunt abolita, cum experientia incommoda eorum ſatis clare monſtrauiſſet.

§. 431. Similiter ratio eſt comparata, quando vndae ad latera nauis impingunt, tum enim ex directione impetus intelligetur, quantum nauis debeat inclinari. Ac primo quidem ſi latera eſſent verticalia, tum media directio vis vndarum foret horizontalis, atque aliquantum infra aquae ſuperficiem caderet, quod ſi iam centrum grauitatis in eadem altitudine eſſet poſitum, tum momentum ad nauem inclinandam foret nullum, at quia centrum grauitatis nauis plerumque altius collocatur, inclinatio orietur eiusmodi, vt ſuperior nauis pars verſus vndas inclinetur. Sin autem latera nauis in ſectione aquae vehementer ſurſum diuergant, tum directio vis ab alliſione vndarum ortae magis ſurſum verget, nauemque in contrariam partem inclinabit.

§. 432. Inter binos igitur hos caſus contrarios dabitur media laterum nauium conſtitutio, in quae ſi vndae impingant, nulla ſenſibilis inclinatio oriatur. Pendebit ſcilicet haec conſtitutio a loco centri grauitatis nauis; ſi enim latera ita fuerint diſpoſita, vt media directio impetus vndarum per centrum grauitatis tranſeat, tum nulla omnino inclinatio eueniet. Quare ſi centrum grauitatis nauis altius ſit poſitum, quam ſuperficies aquae, tum expediet

ſi latera ſurſum aliquantum diuergant, vt media directio impetus vndarum pariter aliquantum ſurſum tendat, hancque diuergentiam conueniet eſſe eo maiorem, quo altius centrum grauitatis fuerit ſitum. Quoniam vero etiam accidit, vt vndae in ſuperiorem partem laterum impingant, ideo diuergentia memorata iterum diminui debebit.

§ 433. Quae cum ita ſe habeant, manifeſtum eſt, notabilem laterum diuergentiam ſurſum in regione ſuperficiei aquae tolerari omnino non poſſe. Nimium enim directio impetus vndarum inclinaretur ad horizontem, indeque momentum ad nauem inclinandam fieret maius. Et quoniam iſta vis latera vrgens tendit ad nauem circa axem longitudinalem inclinandam, cuius reſpectu ſtabilitas eſt minima, maxime erit cauendum, ne momenta ad nauem circa hunc axem inclinandam oriri queant notabilis magnitudinis, quia alias, ſi aliae vires inclinationem in eandem plagam accederent, ſtabilitas iis coniunctim reſiſtere non valeret. Supra aquam ergo minime conuenit latera nauium diuergentia conſtituere, quae regula in praxi quoque diligenter obſeruari ſolet, niſi aliae rationes grauiores abſolute contrarium poſtulant.

§. 434. Ponamus igitur latera nauis ſupra aquae ſuperficiem neque conuergere neque diuergere, hoc eſt in ſitu erecto perpendiculariter horizonti inſiſtere. Vndae igitur in haec latera impingentes vim exerent in directione horizontali, et niſi centrum grauitatis nauis admodum profunde ſit poſitum, vix ſenſibile producent momentum ad inclinationem. Quodſi autem nauis multum ſupra aquam emineat, centrumque grauitatis admodum ſit humile, tum vndae in latera iſtiusmodi verticalia impingentes multum valerent

valerent ad nauem inclinandam. His igitur caſibus iuuabit latera nauis ſurſum aliquantum conuergentia reddere, quo fiet, vt media directio impetus vndarum aliquantum deorſum magisque verſus centrum grauitatis dirigatur.

§. 435. Omnino autem impetus vndarum ad latera nauis impingentium nullam inclinationem circa axem longitudinalem producent, ſi latera ſuperiora verſus ita incuruentur, vt centrum curuaminis incidat in axem longitudinalem per centrum grauitatis ductum. Scilicet ſi M E Tab. XIII. fig. 4.
DFN repraeſentet ſectionem transuerſalem ad axem longitudinalem verticalem, in qua G ſit interſectio axis longitudinalis, EF ſectio aquae atque latera E*m*M et F*n*N formentur in arcus circulares, centrum in G habentes, quae curuatura aliquantulum etiam infra aquae ſuperficiem porrigatur; manifeſtum eſt, ab alliſione vndarum ad latera EM et FN mediam impulſus directionem per centrum G eſſe tranſituram; hincque momentum, quod nauem inclinare conatur, prorſus euaneſcere, ita vt nauis ab vndis nullam inclinationem ſentire queat.

§. 436. Hoc igitur pacto efficietur, vt ab alliſione vndarum ad latera nauium nulla inclinatio circa axem longitudinalem oriatur. Quod vero ad inclinationem circa axem latitudinalem attinet, ea quidem erit quoque nulla, ſi vndae in medio nauis, vbi exiſtit centrum grauitatis, in latera impingant; at ſi impulſus fiat prope proram ſeu puppim, momentum aliquod ad nauem circa axem latitudinalem inclinandam, ſi quidem naues per totam longitudinem eandem ſeruarent latitudinem, oritur. Verum cum naues verſus proram ac puppim incuruentur, directio iſtiusmodi impulſuum propius verſus centrum grauitatis di-

 rigitur

rigitur, quam ob cauſam inclinatio diminuetur. Suadet vero hanc nauium verſus proram ac puppim incuruatio etiam cum diminutio reſiſtentiae tum potiſſimum actio gubernaculi, quae ab impulſu vndarum in laterum extremitates nimium difficilis redderetur.

§. 437. Videamus nunc etiam, quid perturbatio in ſuperficie aquae horizontali ab vndis orta in ſtatu nauium efficere valeat. Sit igitur ADB ſectio quaedam nauis, AB linea horizontalis in ſuperficie aquae, dum eſt tranquilla, ducta, ac ponamus ſubito ob vndarum motum, lineam rectam ab factam eſſe aquae ſuperficiem, quae cum horizontali AB faciat angulum ACa vel BC$b = w$. In hoc ergo ſtatu portio laterum Aa immergitur, quae in ſtatu naturali extra aquam eminebat, ex altera autem parte portio Bb ex aqua quaſi educitur; ponamus autem volumen aDb aequale eſſe volumini ADB calculi facilitandi gratia, ſi enim volumen nunc ſub aqua verſans maius eſſet vel minus quam ADB, tota nauis vi propria vel emergeret vel magis immergeretur.

Tab. XIII. fig. 2.

§. 438. In hoc igitur ſtatu nauis erit quaſi in ſitu inclinato, cum alia portio, ac in ſtatu naturali aquae ſit immerſa. Perſpicuum autem eſt, nauem in hoc ſtatu, etiamſi obliquitas ſuperficiei ab maneret, perſeuerare non poſſe; quare videamus an nauis de hoc ſitu ſeſe in alium peiorem magisque damnoſum recipere debeat, an in magis conuenientem. Deſunt quidem verae leges, quas aqua in ſtatu violento poſita, vbi eius ſuperficies non eſt horizontalis, in preſſione obſeruat; interim tamen non multum a veritate aberrabimus, ſi ponamus easdem eſſe leges, quae in aqua tranquilla, atque ſic preſſio aquae in volu-

volumen nauis ſubmerſum huic ipſi volumini erit proportionalis, eiusque media directio tranſibit per centrum magnitudinis voluminis ſubmerſi aDb, eritque ad ſuperficiem aquae ab normalis; quam hyppotheſin tuto aſſumere licet, ſi quidem angulus ACa quam minimus ponatur.

§. 439. Sit iam O centrum magnitudinis voluminis ADB et G centrum grauitatis nauis, cuius pondus ſit $= M$, volumen autem aquae ſubmerſum $= V$. Iam vim reſtituentem quaerendo vt ſupra, erit vis ex preſſionibus aquae in volumen ADB agentibus orta $= M$, eiusque momentum ad nauem conuertendam ſecundum ſenſum BDA erit $= M.GO.w$ tendetque haec vis ad portionem Aa ex aqua extrahendam, eaque fiet, vt debitum volumen ſub aqua reſtet. Ex portione vero ACa oritur vis quae erit ad M vt volumen ACa ad V, ita vt ſit $= \frac{M.AC^2.w}{2V}$; ſimilique modo vis ex portione BCb orta erit $= \frac{M.BC^2.w}{2V}$; at ob ſpatia ACa et BCb aequalia erit $BC = AC = \frac{1}{2}AB$.

§. 440. Vis autem prioris ex ſpatio ACa orta directio erit Pp normalis ad ab, ita vt ſit $CP = \frac{2}{3}AC$, quae in longitudinem vectis $Pg = \frac{2}{3}AC + CG.w$ ducta dabit momentum nauem in eandem plagam BDA inclinare annitens, quod adeo erit $= \frac{M.AC^2.w}{2V}(\frac{2}{3}AC + CG.w)$ Simili modo vis ex ſpatio BCb orta tenderet in plagam contrariam, at quia ſpatium $B\cdot b$ ſubtrahi debet vt obtineatur ſpatium aDb, eius vis fiet conſpirans cum binis praecedentibus. Erit igitur haec vis $Qq = \frac{M.AC^2.w}{2V}$, et eſt $CQ = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}AC$. Haec vis ducatur in longitudinem vectis $Qg = \frac{2}{3}AC - CG.w$, prodibitque momentum $= \frac{M.AC^2.w}{2V}(\frac{2}{3}AC - CG.w)$. Ex his igitur

 naſci-

nascitur totale momentum, quo nauis vrgebitur in situm naturalem, cuius pars aquae submersa est ACB, $= M w \left(\frac{2AC^3}{3V} + GO\right)$.

§. 441. Perspicitur ergo hoc momentum, quo nauis per propriam vim conabitur partem A*a* submersam ex aqua extrahere, perfecte conuenire cum expressione stabilitatis supra inuenta. Ex ratiocinio enim adhibito intelligitur, si loco triangulorum AC*a* et BC*b* vera spatia essemus contemplati, tum similiter loco $\frac{2}{3} AC^3$ momentum sectionis aquae proditurum fuisse, quod in expressionem stabilitatis ingreditur. Quamobrem nunc clare intelligimus nauem eiusmodi sitibus obliquis in aqua vndis turbata per ipsam stabilitatem resistere: atque si nauibus sufficiens stabilitas sit conciliata, tum etiam eo ipso potestatem esse habituras eiusmodi aquae viribus ex superficie non horizontali ortis resistendi; ita vt ad pericula, quae hinc oriri queant, euitanda nouis cautelis non sit opus.

§. 442. Sic itaque satis dilucide exposuimus, si indoles nauis perfecte fuerit cognita, hoc est eius stabilitas, situs centri grauitatis, sectio aquae, et volumen aquae submersum, quomodo inclinatio nauis, quae a viribus quibuscunque oritur, definiri debeat. Verum ex hac ipsa doctrina etiam insignem vtilitatem haurire possumus, ad ipsam nauium indolem inuestigandam, si ea nondum satis fuerit perspecta. Quemadmodum enim ex statu nauis cognito et viribus sollicitantibus cognitis inclinatio nauis potest definiri, ita vicissim, si inclinatio fuerit explorata, quae a datis viribus nauem sollicitantibus generatur, inde poterit natura nauis cognosci, atque si data sufficiant, ex iis tam locus centri grauitatis, quam stabilitas nauis eius-

que

que reliquae proprietates colligi poterunt, quarum rerum cognitio, quae alioquin non tam accurate haberi poteſt, maxime neceſſaria eſt ad euentus omnes determinandos ac prouidendos.

§. 443. Primum autem ex inclinatione, quae a vi quacunque, nauem horizontaliter ſollicitante, circa axem latitudinalem producitur, ſtatim centrum grauitatis ſectionis aquae cognoſcitur. Quodſi enim naui vis applicetur eam vel verſus proram vel puppim inclinans, eiusque vis directio fuerit horizontalis, qua fit vt neque maius neque minus volumen aquae immergatur, tum ſectio aquae, quam in ſtatu inclinato habebit, interſecabit ſectionem aquae, quam in ſtatu libero occupat in ipſo ſectionis aquae centro grauitatis. Scilicet ſi AEBF fuerit ſectio aquae in ſtatu naturali, et, poſtquam nauis a vi horizontali quacunque circa axem latitudinalem fuerit aliquantillum inclinata, notetur interſectio nouae ſectionis aquae cum priore, quae fiat in recta EF, tum haec recta EF tranſibit per centrum grauitatis I ſectionis aquae, cuius poſitio adeo per vnicum experimentum inuenitur. Tab. XII. fig. 4.

§. 444. Ex vnica porro inclinatione diligenter obſeruata locus centri grauitatis ſatis exacte definiri poterit. Quod vt appareat, ponamus nauem in prora A ſurſum trahi a pondere P ope funis AmnP circa trochleas m et n extra nauem fixas ducti, in puppi vero B deprimi a pondere Q in ipſa naui k ſuſpenſo, pondera autem P et Q inter ſe eſſe aequalia. Primum ergo manifeſtum, quia horum ponderum alterum ſurſum trahit alterum deorſum, nauis vim grauitatis non mutari, quare poſt inclinationem tantum volumen aquae erit ſubmerſum, quantum Tab. IV. fig. 1.

in

in ſtatu nauis libero. Deinde vero, quia vtriusque vis directio eſt verticalis, nauis ad motum horizontalem omnino non incitabitur. Quocirca, dum nauis ab his duobus ponderibus circa axem latitudinalem inclinabitur, eius centrum grauitatis G prorſus immotum manebit.

§. 445. Quo autem ipſa inclinatio curatius obſeruari, atque centri grauitatis locus G determinari queat, conueniet nauem ſecundum longitudinem prope parietem fixum in porta vbi aqua eſt tranquilla conſtitui; latusque nauis parietem verſus inſtrui aliquot ſtylis ad parietem vsque pertingentibus, qui in pariete motum, quem in inclinatione acquirent, deſignent. Sint huiusmodi ſtyli duo in prora A et in puppi B infixi; qui dum nauis inclinatur in pariete binos arcus circulares Aa et Bb depingent, commune habentes centrum in loco, vbi axis latitudinalis per centrum grauitatis nauis G tranſiens parieti occurrit. Datis autem his duobus arcubus Aa et Bb, ſi ſuper medietatibus chordarum normales αG et βG ducantur, earum interſectio G in pariete monſtrabit veſtigium axis latitudinalis, vnde in naui cum ipſe axis latitudinalis tum centrum grauitatis G innoteſcet.

§. 446. Facilius autem verus centri grauitatis locus inuenietur, ſi ante poſitio axis verticalis per centrum grauitatis ducti inueſtigetur, id quod ſequenti modo ſatis commode fieri poterit. Sit AEBF ſectio nauis horizontalis quaecunque per quam tranſeat axis verticalis in G, quod punctum inueſtigari oporteat. Applicentur naui in A et B duae vires horizontales AP et BQ aequales et in plagas oppoſitas trahentes; hisque adeo neque naui motus progreſſiuus neque vlla inclinatio inducetur. His

Tab. XIII. fig. 5.

autem

autem duabus viribus nauis conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis G ductum. Quodsi iam conuersio admodum parua fuerit secuta, notentur puncta *a* et *b*, in quae prora A et puppis B sint promotae; atque intersectio rectae *ab* cum AB dabit positionem axis verticalis in G, eiusque in plano verticali diametrali AB distantiam tam a prora quam a puppi.

§. 447. Cum autem hoc modo axis verticalis per centrum grauitatis ductus fuerit recte determinatus, modo ante tradito multo facilius ac tutius ipse centri grauitatis situs in hoc axe verticali determinari potest. Hinc enim iam cognitus erit situs rectae *g*D verticaliter per centrum grauitatis G ductae; ex quo si vnicus arcus A*a* fuerit notatus ex sola inclinatione eius ad rectam AB statim definietur positio centri grauitatis G in recta *g*D. Atque si difficile fuerit inclinationem aliquam circa axem latitudinalem, ob ingentem stabilitatum, generare, poterit simili modo nauis circa axem longitudinalem inclinari, quod facilius effici potest, indeque situs centri grauitatis G in axe verticali *g*D assignari.

§. 448. Si autem cognitus fuerit locus centri grauitatis nauis G, ope experimentorum, quibus inclinatio a datis viribus orta inquiritur, stabilitas nauis propositae tam respectu axis latitudinalis quam longitudinalis poterit explorari eiusque vera quantitas assignari. Sit A D B sectio nauis verticalis siue secundum longitudinem nauis facta siue secundum latitudinem, quae transeat per axem verticalem CD in quo situm est centrum grauitatis nauis G. Scilicet ad stabilitatem ratione axis latitudinalis explorandam debebit sectio nauis ADB secundum longitu-

dinem accipi, at pro ſtabilitate ratione axis longitudinalis ſectio A D B erit verticalis transuerſalis per centrum grauitatis G ducta, vtrumque enim caſum coniunctim pertractabimus, quia tam experimentorum quam concluſionis inde faciendae ratio eſt eadem.

§. 449. In tali ergo nauis ſectione A D B quam deſcripſimus conſtituatur malus M N ſufficientis longitudinis, eique in puncto quodam N ope funis N n P circa trochleam n extra nauim firmatum appendatur pondus P, quo ergo malus M N in directione N n quae ſit horizontalis trahetur vi $=$ P. Contra vero in puppi B nauis a pondere Q aequali ipſi P trahatur etiam in directione horizontali B m; quibus duabus aequalibus viribus fiet, vt centrum grauitatis nauis G quieſcat, atque ſimplex inclinatio verſus A producatur, ſiquidem momentum ponderis P praeualeat momento ponderis Q; haecque inclinatio fiet vel circa axem latitudinalem vel longitudinalem prout ſectio A D B fuerit facta vel ſecundum longitudinem vel latitudinem nauis. Perſpicuum autem eſt, ſi malus M N in ipſo axi verticali C D conſtituatur, tum eundem inſeruire poſſe ad experimenta vtriusque generis inſtituenda.

§. 450. Ponamus iam longitudinem mali M N $= f$, eousque ſcilicet ſumtam, vbi ipſi vi P applicatur, atque interuallum C G, quo centrum grauitatis G infra horizontalem A B eſt poſitum, eſſe $= h$. His poſitis momentum vis P ad nauem verſus A inclinandam erit $=$ P $(f + h)$ et momentum vis Q reluctans huic inclinationi $=$ Q h. Cum igitur ſit Q $=$ P, erit momentum, quo nauis actu verſus A inclinabitur $=$ P f. Sit iam w angulus inclinationis hinc oriundae ſeu eius ſinus, ſi quidem inclinatio

poni-

ponitur quam minima, atque ſtabilitas nauis huic inclinationi reſiſtens ſit $= F$, erit $\frac{Pf}{F} = w$, hincque $F = \frac{Pf}{w}$, vnde vera ſtabilitatis quantitas cognoſcitur.

§ 451. Huiusmodi experimenta ad ſtabilitatem nauivm reſpectu vtriusque axis principalis cognoſcendam inſtitui poſſunt, vel in ipſa naui, ſi apparatus et occaſio idonea habeatur, vel in exemplo minoris moduli ad ſimilitudinem propoſitae nauis perfecte tam fabricato, quam onerato. Quodſi autem ſtabilitas huiusmodi minoris nauiculae fuerit explorata, ex eo facile ſtabilitas maioris nauis ex ſimilitudine concludi poterit. Cum enim ſtabilitates nauium ſimilium reſpectu axium analogorum teneant rationem quadruplicatam laterum homologorum, haec illatio per regulam auream perfici poterit. Atque hoc modo iudicium ferri poterit, vtrum nauis propoſita viribus, quibus exponi debet, ſuſtinendis par ſit an ſecus.

§. 452. Hactenus inclinationes tam exiguas tantum ſumus contemplati, quae in calculo inſtar reuera infinite paruarum tractari queant, atque de huiusmodi inclinationibus regula data tantum valet, qua inuenimus momentum inclinationis per ſtabilitatem nauis diuiſum praebere angulum inclinationis Aſſumſimus enim in inclinatione nauis ſectionem aquae ratione magnitudinis ſenſibiliter non mutari, quod euenit cum in omnibus inclinationibus infinite paruis, tum etiam in maioribus, quando latera nauis ſuperficiei aquae perpendiculariter inſiſtunt. Haecque laterum poſitio propemodum maximam partem eligi ſolet, atque etiam debet, prouti ante oſtendimus curuaturae laterum centrum incidere debere in centrum grauitatis nauis ſeu potius in axem longitudinalem.

§. 453. Quanquam autem in tali nauium ſtatu inclinationes iam ſatis ſenſibiles pro infinite paruis haberi poſſunt, tamen non abs re erit monſtrare, quomodo inclinationes finitae magnitudinis, qua tales ſpectatae, tractari debeant. Hinc enim eo magis elucebit, quibus caſibus inclinationes finitae tanquam infinite paruae conſiderari queant ſine errore, et ſi error committatur, quantus is ſit futurus. Fieri namque poterit, vt inclinatio a datis viribus producta, ſi exacte inueſtigetur, vel maior vel minor ſit proditura, quam regula hactenus vſurpata oſtendit, atque hinc tutius iudicare licebit, quando naues ſubuerſioni fiant obnoxiae, cum omnimoda ſubuerſio ſemper cum inclinationibus ſatis magnis debeat eſſe coniuncta.

§. 454. In hac igitur disquiſitione poſitio laterum nauis prope ſectionem aquae maxime conſiderari debebit, cum ab ea ſectio aquae, quam nauis inclinata occupat, pendeat, haecque adeo inſuper in determinationem inclinationis a datis viribus oriundae ingredietur, atque cum ſtabilitate coniunctim inclinationem veram indicabit. Quod ſi autem inclinatio fuerit quam minima, ratio huius poſitionis laterum nauis in inclinatione afficienda euaneſcet. Quamobrem, ſi quantum laterum nauis conſtitutio inclinationem ſecundum praecedentem methodum inueniendam perturbet, fuerit compertum, tum etiam maxime conuenientem laterum nauis conſtitutionem definire licebit, de qua adhuc nihil, niſi ex alliſione vndarum quicquam definiri potuit.

§. 455. Quo autem hanc inueſtigationem facilius expedire queamus; vnicam nauis ſectionem verticalem, quae normaliter ad eum axem, circa quem fit inclinatio, ſit facta, contemplabimur; atque inclinationem, quae huic tan-

tantum ſectioni inducetur, determinabimus, prouti ſupra in ſtabilitatis determinatione initio fecimus. Hoc tamen non obſtante iſta inueſtigatio latiſſime patere cenſenda erit: primo enim eo referri poterunt omnia corpora prismatica, quae ſcilicet omnes ſectiones parallelas ei, quam hic conſideramus habeant eidem ſimiles et aequales. Deinceps vero etiam, ſi perpendamus, quomodo expreſſio ſtabilitatis ex totius corporis conſideratione orta comparata ſit ad eam ex vnica ſectione verticali inuenitur; non difficulter hanc ipſam determinationem transferre poterimus ad figuras nauium quascunque.

§. 456. Sit igitur ADB eiusmodi ſectio nauis verticalis normaliter facta ad axem circa quem nauis inclinari ponitur; in qua ſit G centrum grauitatis. AB ſectio aquae in ſtatu erecto, et O centrum magnitudinis partis ſubmerſae. Latera porro nauis A*a* et B*b* ad ſectionem aquae AB quomodocunque ſint inclinata; ponamus autem obliquitatem laterum vtriusque eſſe aequalem, ſeu angulum CA*a* aequalem eſſe deinceps poſito anguli CB*b*: neque vero lateribus in ſpatiis A*a* et B*b* vllam ineſſe curuaturam. Denique etiam aſſumimus, hanc ſectionem ADB duas medietates ADC et BDC habere inter ſe ſimiles et aequales, vti in ſectionibus nauium transuerſalibus, ad quas hanc inquiſitionem potiſſimum accommodari conuenit, euenire ſolet. Tab. XV. fig. 1.

§. 457. Sit iam a viribus quibuscunque huic ſectioni inclinatio inducta, qua recta *ab* perducta ſit in ſuperficiem aquae, quae adeo nunc erit horizontalis, atque portio *a*D*b* nunc erit aquae ſubmerſa. Ponamus autem a viribus ſollicitantibus inclinationem tantum produci, neque iis centrum grauitatis affici; ita vt poſt inclinationem

 volu-

volumen aquae submersum aequale sit illi, quod in statu naturali sub aqua versatur. Erit itaque triangulum AVa = triangulo BVb, ex qua aequalitate intersectio V novae aquae sectionis ab cum praecedente AB determinabitur. Hinc igitur sequitur ob angulos ad V aequales fore $AV.aV = BV.bV$; atque ob sinus angulorum CAa et CBb aequales erit etiam $AV.Aa = BV.Bb$, hincque $Aa:aV = Bb:bV$.

§. 458. Ponatur $AC = BC = a$ seu $AB = 2a$, sinus anguli $CAa = m$, cosinus $= n$, erit anguli CBb sinus $= m$, cosinus $= -n$. Sit porro anguli inclinationis AVa seu BVb sinus $= s$, et cosinus $\surd(1-ss) = u$; atque $CV = x$, erit $AV = a+x$, et $BV = a-x$. Ex his reperitur anguli AaV sinus $= mu+ns$; et anguli BbV sinus $= mu-ns$; hincque porro $Aa = \frac{s(a+x)}{mu+ns}$; $Bb = \frac{s(a-x)}{mu-ns}$; $Va = \frac{m(a+x)}{mu+ns}$ et $Vb = \frac{m(a-x)}{mu-ns}$. Quamobrem erit trianguli AVa area $= \frac{ms(a+x)^2}{2(mu+ns)}$, et area trianguli $BVb = \frac{ms(a-x)^2}{2(mu-ns)}$; quae binae areae, cum sint aequales, erit $(a+x)^2(mu-ns) = (a-x)^2(mu+ns)$ hincque $xx = \frac{2muax-nsaa}{ns}$ et $x = \frac{mua-a\surd(m^2u^2-n^2s^2)}{ns}$ seu $x = \frac{mua-a\surd(mm-ss)}{ns}$

§. 459. Prodibit ergo $a+x = \frac{a(mu+ns)-a\surd(mm-ss)}{ns}$ et $a-x = \frac{-a(mu-ns)+a\surd(mm-ss)}{ns}$; atque $Aa = \frac{a}{n} - \frac{a}{n}\surd\frac{mu-ns}{mu+ns}$, et $Bb = -\frac{a}{n} + \frac{a}{n}\surd\frac{mu+ns}{mu-ns}$, areaque vnius trianguli vel AVa vel $BVb = \frac{mmuaa-maa\surd(mm-ss)}{nns}$; cui vis, qua vtrumque triangulum ab aqua vrgetur, est aequalis. Eius vero directio vtrinque normalis est ad horizontalem ab, atque per vtriusque trianguli centrum grauitatis P et Q transit. Bisectis ergo Aa et Bb in α et β, erit $VP = \frac{2}{3}V\alpha$, et $VQ = \frac{2}{3}V\beta$: atque ex P et Q in ab demissis per-

pen-

pendiculis Pp et Qq, erit $Vp = \frac{2}{3}Va + \frac{1}{3}(au - ns)Aa$ et $Vq = \frac{2}{3}Vb - \frac{1}{3}(ma + nu)Bb$. seu $Vp = \frac{m(a+x)}{3(mu+ns)} + \frac{u(a+x)}{3}$ et $Vq = \frac{m(a-x)}{3(mu-ns)} + \frac{u(a-x)}{3}$.

§. 460. Cum nunc sit portio aquae submersa aDb, resoluatur ea in partes has $ADB + BVb - AVa$. Harum prima ADB, quae repraesentat volumen naturaliter submersum V, agit vi $= M$ ponderi nauis, eiusque momentum ad nauem restituendam est $= M.og$, demissis ex O et G in horizontalem ab perpendiculis Gg et Oo, fiet autem $og = GO.s$, ita vt momentum a prima parte ortum sit $= M.GO.s$. Partis BVb vis reperitur, si fiat vt $V : M = BVb\left(\frac{ms(a-x)^2}{2(mu-ns)}\right)$ ad quartam, quae ergo est $= \frac{M.ms(a-x)^2}{2V(mu-ns)} = \frac{Maa(mmu-m\surd(mm-ss)}{nns V}$ alteriusque partis AVa vis est $= \frac{M.ms(a+x)}{2V(mu-ns)} = \frac{Maa(mmu-m\surd(mm-ss)}{nns V}$. Vtrius que autem coiunctim momentum ad restitutionem tendens erit $= \frac{2Maa(mmu-m\surd(mm-ss)}{3nns V} \cdot \frac{(2mmua-ssua-mnsx)}{mm-ss}$, quod loco x posito valore inuento abit in $\frac{2M.msa^3(u-m\surd(mm-ss)}{3nn V:\surd(mm-ss)}$ ita vt momentum totale futurum sit $= Ms\left(GO + \frac{2ma^3(u-m\surd(mm-ss))}{3nnV\,\surd(mm-ss)}\right)$.

§. 461. Si anguli ad A et B fuerint recti, fiet $m=1$ et $n=0$, atque momentum virium ad inclinationem praescriptam producendam fiet $= Ms\left(GO + \frac{a^3(1+uu)}{3uuV}\right)$; atque si angulus inclinationis fiat infinite paruus, vt sit s infinite paruum et $u = 1$, prodit momentum huic inclinationi producendae par $= Ms\left(GO + \frac{2a^3}{3V}\right)$ quae est expressio pro stabilitate supra inuenta. Haec si comparetur cum momento, si s ponitur finitum, patebit expressionem pro s finito maiorem esse quam pro s infinite paruo; et hanc obrem vis qua nauis inclinationibus resistit

resistit, in maiori ratione crescit, quam in ratione sinuum inclinationum; adeo vt naues inclinationibus magis reluctentur quam ex stabilitate hactenus conclusimus.

§. 462. Videamus iam vtrum obliquitas laterum nauis maiorem stabilitatem producat an minorem, quam si latera verticaliter constituantur. Hancobrem ponamus angulos ad A et B quam minime a rectis discrepare, ita vt anguli VAa cosinus n sit vehementer paruus, fietque $m = V(1-nn) = 1 - \frac{nn}{2} - \frac{n^4}{8}$, et $V(mm-ss) = V(uu-nn) = u - \frac{nn}{2u} - \frac{n^4}{8u^3}$. Quibus valoribus substitutis obtinebitur momentum ad inclinationem producendam requisitum $= Ms(GO + \frac{a^3(1+uu)}{3uuV} + \frac{nna^3ss(3+uu)}{4u^4V})$. Maius igitur est hoc momentum, quam si omnino esset $n=0$, at incrementum, cum etiam s sit valde paruum, fiet insensibile. Quod si autem obliquitas laterum nauis finita ponatur, tum momentum inclinationem producens perpetuo eo erit maius, quo maior fuerit cosinus angulorum ad A et B.

§. 463. Tametsi autem hinc videatur nauibus eiusmodi laterum obliqnitatem cum ingenti emolumento induci posse, tamen si rem penitius scrutemur, vtilitatem inde oriundam parui atque etiam nullius momenti deprehendemus. Primo enim cum intersectio V eo magis a puncto medio C remoueatur, quo magis anguli ad A et B a rectis discrepant, oscillationes, quas nauis recipiet, eo maioribus succussionibus erunt coinunctae. Deinde vero convergentia laterum nauis deorsum spectans stabilitatem nauis ideo diminuit, quod cum volumen aquae submersum datae magnitudinis esse debeat, profunditas carinae eo maior sit proditura respectu latitudinis AB, quo ipso stabilitas multum diminuitur. Quod si autem quis velit latitudinem

titudinem nauis ſuperiora verſus tantopere augere, eo ipſo ſtabilitati parum conſulit, dum naui eandem latitudinem maiorem in aquae ſuperficie non tribuit; quo multo maius ſtabilitatis incrementum lucraretur, quam per laterum diuergentiam. Si enim latera nauis in A et B verticaliter deſcendant, tum profunditas carinae, ſalua eius capacitate, maxime diminuitur, hocque ſtabilitas plurimum augetur. Minime autem expedit latera diuergentia deorſum conficere, quia tum latitudo nauis in ſectione aquae praeter neceſſitatem contraheretur, quam perpetuo praeſtat quam ampliſſimam fieri.

§. 464. Quodſi autem in veram cauſam inquiramus, cur maior vis requiratur ad eandem inclinationem naui inducendam, quo maior fuerit laterum nauis obliquitas ad horizontalem AB; reperiemus huius phaenomeni rationem in eo eſſe poſitam, quod dum nauis inclinatur, ſectio aquae *ab* continuo creſcat, a cuius quantitate, vti ſupra vidimus potiſſimum ſtabilitas nauium ſeu vis inclinationi reſiſtendi pendet. Ex quo concludere licet, quo magis ſectiones aquae creſcant auctis inclinationibus nauis, tum conatum nauis ſeſe reſtituendi non ſolum augeri, ſed etiam in maiori ratione augeri quam inclinationes. Contra autem intelligitur, ſi ſectiones aquae fiant minores, dum inclinatio creſcit, tum nauis reluctantiam in minori ratione augeri, atque etiam nulla amplius incrementa capere; quo fiet, vt nauis omnino ſubuertatur. Quam primum enim vis reluctans inclinationi ceſſat augeri, aucta inclinatione, tum vis, a qua haec inclinatio eſt orta, continuo nauem magis inclinabit, donec eam prorſus ſubuertat.

Tab XV fig. 2. §. 465. Ponamus EADBF esse nauis sectionem verticalem, in qua sit AB sectio aquae et ADB portio aquae submersa, dum nauis situm erectum tenet. Inclinetur iam haec nauis a viribus externis, vt aCb fiat sectio aquae. In hoc iam statu vt nauis detineatur non sufficit, si momentum virium inclinantium aequale sit conatui proprio nauis sese restituendi, verum etiam requiritur, vt, si nauis aliquantillum plus inclinetur, conatus sese restituendi crescat: si enim pro maiori inclinatione conatus sese restituendi seu inclinationi resistendi non cresceret, sed vel eadem maneret vel adeo decresceret, tum eadem vis, quae minorem inclinationem importauit, etiam maiorem naui induceret, tandemque nauem subuerteret. Ad hoc ergo euitandum necesse est nauis latera ita constituere, vt aucta inclinatione sectiones aquae non sensibiliter diminuantur.

§. 466. Haec igitur cautela per totum illud nauis spatium est obseruanda, in quod sectiones aquae, dum naui a viribus externis inclinationes inducuntur, cadunt, vt eae nimirum non multo minores euadant, quam sectio aquae naturalis AB. Inclinationes autem, quas quaeque nauis sine subuersionis periculo sustinere debet, vsque ad supremum nauis limbum EF pertingunt, eritque adeo inclinatio per angulum FCB, qua sectio aquae FH supremam nauis oram F attingit, maxima, quam nauis suscipere potest; si enim inclinatio vltra augeatur, tum aqua non solum in nauem irrueret ac submergeret, verum etiam ob sectionem aquae subito minorem factam, nauis, etiamsi aqua non intraret, subuersioni resistere non valeret.

§. 467. Si ergo, antequam inclinatio naui totalem subuersionem affert, latera nauis ita collocentur, vt maiores

res inclinationes etiam maiores vires requirant; tum angulus FCB determinabit maximam inclinationem, quam nauis ſine ſubuerſionis periculo ſuſtinere poterit. Pendet autem quantitas huius anguli FCB cum ab eleuatione ſupremae nauis orae EF ſupra aquam AB, tum etiam a ſitu ipſius orae F reſpectu rectae AB; quo enim propius ora F ad punctum medium ſummitatis I, manente eleuatione CI eadem, accedit, hoc eſt quo magis latera nauis ſupra aquae ſuperficiem conuergant, tum maxima inclinatio FCB, quae in nauem cadere poteſt, fit quidem maior; contra vero ob diminutam ſectionem aquae FH huic inclinationi reſpondentem, nauis huic inclinationi, etſi maiori, minus reſiſtet, fierique poterit, vt nauis adeo, antequam hanc inclinationem attingat, ob rationes ante allegatas, penitus ſubuertatur.

§. 468. Sin autem ſuprema nauis margo EF latius extendatur, vt abeat in *ef*, et nauis latera ſint A*e* et B*f*, tum nauis quidem ob maiores aquae ſectiones *f h*, quas inclinata occupat, magis inclinationibus reluctatur, verum maximus angulus inclinationis, quam ſuſtinere poteſt, *f*C*b* minor erit quam in caſu praecedente; atque quo magis latera nauis ſuperiora verſus diuergant, ita vt ad eandem altitudinem ſupra horizontem AB aſcendant, eo minor fiet angulus BC*f* qui maximam inclinationem praebet. Manifeſtum autem eſt, fieri poſſe, vt figura EADBF inclinationi BCF, quia eſt maior, aeque vel magis reſiſtat, quam figura *e*ADB*f* inclinationi minori BC*f*; adeo vt adhuc ambigendum ſit, vtrum latera ſurſum divergentia an conuergentia nauibus magis conueniant.

§. 469. Hanc quaestionem ergo decidi oportebit ex aliis circumstantiis, naues spectantibus: hucque apprime pertinere videtur, quae supra de figura laterum dicta sunt, vt a fluctibus minimam naui inclinationem inducant. Quamobrem figura laterum AE et BF etiamnum erit commodissima, quae latera AE et BF ita habet incuruata, vt centrum habeant in centro grauitatis G. Interim tamen quoque ad figuram portionis aquae submersae ADB respiciendum est, quippe per quam sectiones aquae *ab*, FH quoque determinantur. Tum igitur curuatura laterum ex centro grauitatis G sumta maxime erit admittenda, quando sectio aquae FH non multo minor euadit quam AB; ita vt inclinatione aucta simul vis nauis sese restituendi adhuc sensibiliter augeatur.

Cap. VI.

DE ACTIONE GVBERNACVLI.

§. 470.

Quanquam gubernaculum eſt pars nauis externa, nec a nauis indole et figura pendere videtur, tamen eius actio ab intima nauium natura ac onerationis ratione ita pendet, vt ſine his rebus cognitis, determinari nullo modo queat. Eſt autem gubernaculum pars nauis maxime neceſſaria, quippe cuius ope directio curſus non ſolum conſeruatur, verum etiam pro lubitu inmutatur, adeo vt ſine gubernaculo nullus curſus certus inſtitui poſſit. Plurimum igitur intereſt, naues ita eſſe comparatas, vt propoſitus curſus gubernaculi beneficio facile teneri, atque, ſi opus fuerit, celeriter transmutari queat; in hocque conſiſtit vna ex primariis proprietatibus, quae in nauibus poſtulari ſolent.

§. 471. Actio gubernaculi autem in productione motus rotatorii circa axem verticalem per nauis centrum grauitatis tranſeuntem conſiſtit. Per huiusmodi motum rotatorium enim nauis, quando ab vndis aliisue viribus de curſu ſuo declinatur, ſtatim in ſitum debitum reducitur, hocque pacto eius curſus, quem ſequi debet, conſeruatur. Simili vero modo, quando curſus immutari, atque in aliam plagam inſtitui debet, quod ſaepe vſu venire ſolet, ita immutatio ope gubernaculi efficitur, nauique ea directio, quam curſus inſtituendus requirit, conciliatur. Quamobrem antequam gubernaculi actionem examini ſubiiciamus,

necesse erit ad vsum nostrum colligere, quae in parte superiori de motu nauium rotatorio circa axem verticalem exposuimus; eo quod in tali motu non solum actio gubernaculi constet, sed etiam omnes vires externae eiusmodi motum rotatorium producentes sese actioni gubernaculi immisceant.

§. 472. Motus rotatorius, quo nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem, determinatur, partim ex momento virium sollicitantum ad istum axem collecto, partim ex momento inertiae, quod tota nauis respectu eiusdem axis praebet, ac reperitur, si omnes nauis particulae per quadrata distantiarum suarum ab hoc axe multiplicentur, omniaque haec producta in vnam summam coniiciantur. Quod autem ad vires attinet, quibus eiusmodi motus rotatorius in naui produci potest, primum notandum est, a nulla vi, cuius directio est verticalis, motum rotatorium circa axem verticalem generari posse. Quotiescunque enim directio vis sollicitantis parallela est axi, circa quem vel motus vel inclinatio produci potest, toties eius vis momentum respectu huius axis erit nullum; ex eoque ideo nullus siue motus siue inclinatio nasci poterit.

§. 473. Cum igitur hinc excludendae sint vires omnes, quae in directionibus verticalibus nauem sollicitant, videamus, quid vires in directionibus obliquis agentes efficere valeant. Ac primo quidem huiusmodi vires semper resoluere licet, in binas, quarum alterius directio sit verticalis, alterius horizontalis; harumque ideo sola posterior horizontalis scilicet, in computum veniet, si quidem in motum rotatorium circa axem verticalem inde oriundum inqui-

inquirere velimus. Virium vero horizontalium eae quoque ineptae ſunt ad motum rotatorium generandum, quarum directiones per ipſum axem verticalem tranſeunt. Ex quibus perſpicuum eſt motum rotatorium in naui oriri non poſſe, niſi ex viribus, quarum directiones ſunt horizontales, et quae per ipſum axem verticalem non tranſeunt.

§. 474. Quodſi ergo vis ſollicitantis directio non fuerit verticalis, ea reſoluatur in binas, alteram verticalem alteram horizontalem, haecque ſola conſideretur. Vt autem motus rotatorius cognoſcatur ex ea vi horizontali oriundus, eius momentum reſpectu axis verticalis inueſtigari oportet. Quod commodiſſime fiet, ſi per directionem eius vis concipiatur ſectio nauis horizontalis, in eaque punctum, vbi ab axe verticali transfigitur, notetur. Tum enim, ſi ex iſto puncto recta normalis ad directionem vis ſollicitantis ducatur, dabit productum ex ipſa vi in rectam illam normalem ortum huius ipſius vis momentum, quod in motu rotatorio producendo conſumetur.

§. 475. Repraeſentet planum chartae ſectionem nauis horizontalem, in qua poſita ſit directio MP vis nauem ſollicitantis, quae ſit $= p$. Axis autem verticalis, qui per centrum grauitatis nauis ductus concipitur, iſtam ſectionem horizontalem in G traiiciat. Si iam ex G in rectam MP ducatur normalis GM, erit productum p.GM ipſum momentum ex vi ſollicitanti p ortum, ex quo motus rotatorius naſcetur; Poteſt vero etiam momentum huius vis p colligi ex alia quacunque recta ex G ad directionem vis MP ducta. Sit enim ex G ad MP ducta recta quaecunque GN, erit momentum $= p$.GN. ſin. GNP poſito ſinu Tab. XVI. fig. 1.

toto

toto $= 1$: eſt namque GN . ſin. GNP $=$ GM. Hinc intelligitur momentum rotationem generans duplici modo poſſe augeri; primo enim aucta ipſa vi p momentum in eadem ratione augetur, tum vero quo magis directio diſtet a puncto G, momentum tanto fiet maius.

§. 476. Si ergo nauis vnica vi ſollicitatur hoc modo eius momentum ad motum rotatorium generandum elicietur, atque ſi plures vires vrgeant, ex ſingulis ſimili modo momenta deducantur; quae vel addita vel ſubtracta inuicem, prouti erunt vel conſpirantia vel aduerſantia, dabunt momentum totale, ex quo motus rotatorius ex illis omnibus viribus coniunctis oriundus determinari poterit. Sit iſtud momentum totale $=$ P; atque ponatur momentum inertiae totius nauis reſpectu axis verticalis per centrum grauitatis ducti $=$ S, prodibit vis accelerans motum rotatorium $= \frac{P}{S}$. Scilicet motus angularis, ſi quis iam fuerit generatus tempuſculo dt incrementam capiet $= \frac{Pdt}{S}$ niſi reſiſtentia aquae aduerſaretur; vel poſita celeritate angulari iam acquiſita $= n$, fiet $du = \frac{Pdt}{S}$.

§. 477. Noſtrum autem inſtitutum non poſtulat, vt ipſum motum rotatorium, quemadmodum generetur, atque increſcat, definiamus; cum hoc pendeat a reſiſtentia aquae parumque interſit exactiſſime tempus noſſe, quo motus rotatorius per datum angulum abſoluatur. Sufficiet nempe comparatiue definiuiſſe, quibus caſibus celeritas angularis proditura ſit maior minorue. Hocque ſimpliciter cognoſcetur ex formula $\frac{P}{S}$; quae quo fuerit maior, eo incitatior erit motus rotatorius, contra vero quo minor ſit fractio $\frac{P}{S}$, motus rotatorius eo fiet lentior. Quamobrem vt

vt motus rotatorius producatur maxime velox, efficiendum eſt, vt expreſſio $\frac{P}{S}$ fiat, quam fieri poteſt maxima.

§. 478. Motus rotatorius igitur eo fiet celerior, quo maior reddatur valor fractionis $\frac{P}{S}$. Quare ad motum rotatorium maxime accelerandum requiritur primum vt numerator P hoc eſt momentum reſpectu axis verticalis maxime augeatur, quod fiet cum augendo ipſam vim ſollicitantem, tum eius diſtantiam ab axe verticali. Deinde vero etiam valor fractionis $\frac{P}{S}$ creſcet, ſi diminuatur eius denominator S, qui exprimit nauis momentum inertiae reſpectu axis verticalis per centrum grauitatis ducti. Hoc ergo efficietur, ſi in oneratione nauis grauiſſima onera quam fieri poteſt proxime ad axem iſtum verticalem collocentur. Contrario autem modo motus rotatorius fiet exiguus, ſi valor fractionis $\frac{P}{S}$ maxime diminuatur.

§. 479. Si duae naues concipiantur perfecte ſimiles, ſimiliterque oneratae, tenebunt earum momenta inertiae S rationem quintuplicatam laterum homologorum. Quodſi iam vires ſollicitantes etiam fuerint ſimiles, vt teneant rationem duplicatam laterum homologorum, quod euenit, ſi vires vel a vento vel ab aqua ad nauem irruente proficiſcantur, vbi ſuperficies has vires excipientes hincque ipſae vires quadratis laterum homologorum fient proportionales. Momenta ergo harum virium erunt in ratione triplicata laterum homologorum; ex quo motus rotatorii in nauibus ſimilibus a viribus ſimilibus orti tenebunt inter ſe rationem reciprocam duplicatam laterum homologorum; ita vt nauis duplo longior et octuplo ponderoſior receptura ſit motum rotatorium quadruplo tardiorem.

§. 480. Poterit autem ipſe motus rotatorius hoc eſt eius celeritas angularis ad quoduis temporis momentum ex principiis in libro ſuperiori ſtabilitis accurate definiri: fierique hoc poterit tam reſiſtentiae aquae ratione habita quam ea neglecta. Ponamus igitur primo nauem, dum a virium momento P circa axem verticalem rotatur nullam ab aqua perpeti reſiſtentiam; ſitque celeritas quam nauis durante motu rotatorio iam eſt nacta tanta, vt punctum nauis, quod ab axe illo verticali diſtat interuallo $= f$, habeat celeritatem debitam altitudini v hacque celeritate nunc quidem iſtud nauis punctum circa axem verticalem motu circulari circumferatur. His poſitis, ſi puncto temporis illud nauis punctum progrediatur per arculum $= ds$, interea motus rotatorius ita accelerabitur, vt fiat $dv = \frac{Pfds}{S}$; vnde ſi virium momentum P maneat conſtans erit integrando $v = \frac{Pfs}{S}$.

§. 481. Quodſi iam tempus, quo punctum nauis aſſumtum, ab axe verticali diſtans interuallo f, circumfertur per arcum circuli s, ponatur $= t$, erit $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{ds\sqrt{S}}{\sqrt{Pfs}}$ hincque integrando $t = \frac{2\sqrt{Ss}}{\sqrt{Pf}}$. Denotat hic autem $\frac{s}{f}$ angulum, quem nauis iam circa axem verticalem motu rotatorio abſoluit, qui angulus ſi ponatur $= \alpha$, isque datae magnitudinis puta vel rectus vel dati numeri graduum accipiatur, erit tempus quo nauis motum rotatorium per iſtum angulum abſoluit vt $\sqrt{\frac{S}{P}}$. In caſu ergo, quo tam nauis quam vires ſollicitantes ſimiles accipiuntur, erunt tempora, quibus naues per aequales angulos rotantur, in ratione ſimplici directa laterum homologorum. Ipſe autem motus ob reſiſtentiam neglectam erit vniformiter acceleratus.



§. 482.

§. 482. Vt autem nunc, quantum resistentia aquae hunc motum rotatorium perturbet, perpendamus; ponamus aquae sectionem esse figuram $aabb$, latera ab et ab habentem parallela, quae autem ad aa et bb terminetur arcubus circularibus aAa et bBb, centrum habentibus in axe verticali G, sintque huic figurae omnes sectiones horizontales nauis per totam carinam similes et aequales, et carinae profunditas sit $= c$, semilatitudo $MP = NQ = b$, et semilongitudo $AG = BG = a$. Licebit enim ad calculi commoditatem figuram nauium aliquantum a veritate abhorrentem fingere, cum aberratio in nauibus similibus, quas hic potissimum contemplamur similis sit futura, ita vt in ratione, quae inter motus rotatorios nauium similium intercedit, error nullus sit oriturus, quantumuis vera nauium figura ab hac assumta discrepet. Tab. XVI. fig 2.

§. 483. Habeat nauis iam motum rotatorium tantum, vt punctum nauis, ab axe verticali G distans intervallo $= f$, circumferatur celeritate altitudini v debita, atque consideretur particula Mm, quae contra aquam irruet in directione Mp normali ad MG, sit $GM = z$; et $GP = x$; erit $Mm = dx = \frac{zdz}{x}$ ob $zz = bb + xx$. Altitudo iam debita celeritati, qua elementum Mm circa G rotatur, erit $= \frac{zzv}{ff}$, et cum eius directio sit Mp normalis ad MG, resistentia erit quadrato sinus anguli pMb, quod est $= \frac{xx}{zz}$, proportionalis, vnde resistentia, quam patitur particula Mm ab aqua, erit $= dx . \frac{zzv}{ff} . \frac{xx}{zz} = \frac{vxxdx}{ff}$ In computum ducatur tota carinae profunditas c, erit resistentia, quam carinae elementum ipsi Mm respondens patitur $= \frac{cvxxdx}{ff}$.

§. 484. Tota ergo resistentia, quam nauis latus aE patitur erit, $= \frac{cvx^3}{3ff}$, facto $x = G\alpha = \sqrt{(aa-bb)}$; et quia latus oppositum bF simili modo in aquam impingit, erit eius resistentia pariter $= \frac{cv(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}{3ff}$, ita vt resistentia nauis totalis motui rotatorio reluctans futura sit $= \frac{2cv(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}{3ff}$. Huius autem resistentiae quantitas, vt cum viribus sollicitantibus comparari possit, ad pondus est reducenda, id quod facile fit, cum resistentia hoc modo expressa aequalis sit ponderi voluminis aquae, cuius capacitas est $= \frac{2cv(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}{3ff}$. Quare cum voluminis aquae, quod aequale est portioni nauis aquae submersae V, pondus habeat aequale nauis ponderi M, fiet resistentia $=$ ponderi $\frac{2Mc(aa-bb)^{\frac{3}{2}}v}{3Vff}$.

§. 485. Quantum autem ista resistentia motum rotatorium afficiat, ex eius momento colligi poterit. Vis autem quam portiuncula Mm sustinet, quae est $= \frac{cvxxdx}{ff}$, directionem habet MP normalem ad superficiem aE, eiusque adeo momentum respectu axis verticalis G erit $= \frac{cvx^3dx}{ff}$; vnde momentum resistentiae, quam latus aE, patitur erit $= \frac{cvx^4}{4ff} = \frac{(aa-bb)^2cv}{4ff}$ posito $x = G\alpha = \sqrt{(aa-bb)}$. Quia iam tantam quoque resistentiam latus bF patitur, erit momentum totalis resistentiae ad motum rotato-

tatorium impediendum $= \frac{(aa-bb)^2 cv}{2ff}$. In quod, quia pondus introduci debet, vt fiat momento virium P homogeneum, habebitur volumine nauis aquae ſubmerſo V et pondere nauis P in ſubſidium vocatis momentum ex reſiſtentia ortum $= \frac{M(aa-bb)^2 cv}{2Vff}$.

§. 486. Quodſi iam ponamus nauis punctum, quod ab axe G diſtat interuallo $= f$, conuerti tempusculo dt per arculum circularem ds atque celeritatem interea ita augeri, vt altitudo debita v incrementum capiat dv, propter momentum virium et reſiſtentiae, quo nauis actu vrgetur $= P - \frac{M(aa-bb)^2 v}{2Vff}$ erit $\frac{dv}{f} = \frac{P\,ds}{S} - \frac{M(aa-bb)^2 cv\,ds}{2SVff}$; ex qua aequatione celeritas rotationis ad quoduis temporis momentum poterit definiri. Quoniam autem motus rotatorius ob reſiſtentiam mox fiet aequabilis, et $dv = 0$, ſtatim habebimus celeritatem illam, qua nauis continuo ab motus initio aequabiliter rotari perget, quae definietur per hanc aequationem $\frac{v}{ff} = \frac{2PV}{M(aa-bb)^2 c}$ ex qua ipſa celeritas angularis, quae eſt $= \frac{\sqrt{v}}{f}$ prodit $= \frac{\sqrt{2PV}}{(aa-bb)\sqrt{Mc}}$.

§. 487. Concipiamus iam duas naues perfecte ſimiles, quae etiam a viribus ſimilibus circa axes verticales circumagantur, ſit maioris profunditas carinae $= C$ minoris $= c$, quae laterum homologorum vicem ſuſtineant. Pertineat formula inuenta pro celeritate angulari ad nauem minorem; erit P vt c^3; V vt c^3; $aa-bb$ vt cc et Mc vt c^4; ex quibus orietur celeritas angularis vt $\frac{c^3}{c^4}$ ſeu vt $\frac{1}{c}$. Ex quo colligitur nauium ſimilium a viribus ſimilibus ad motum rotatorium incitatorum celeritates angulares, quas circa axem verticalem adipiſcuntur, eſſe in ratione ſimplici inverſa laterum homologorum.

§. 488. His igitur praeparatis poterimus actionem gubernaculi tam explicare quam determinare. Ac primo quidem in examen venit vis externa gubernaculum vrgens, quae ex allapsu aquae contra gubernaculi superficiem oritur: de qua vi iam ergo constat, eius quantitatem tenere rationem compositam ex simplici superficiei gubernaculi, in quam aqua illidit, ex ratione duplicata sinus anguli, sub quo fit allisio atque in ratione duplicata celeritatis, qua aqua impingit. Harum rerum, quibus vis a gubernaculo excepta determinatur, vnica tantum, nempe angulus, sub quo aqua gubernaculum impellit, ab arbitratu nauclceri pendet, binae reliquae vero cum per figuram nauis, tum per motum relatiuum nauis in aqua determinantur, ita vt iis, prout occasio tulerit, vti oporteat; neque eas pro lubitu moderari liceat.

§. 489. Praecipua autem causa, a qua gubernaculum vim accipit idoneam ad nauem circa axem verticalem convertendam, posita est in motu aquae aduersus gubernacunaculum. Talis ergo vis existit in aqua quiescente, quando nauis quomodocunque mouetur, tum enim aqua respectu gubernaculi motum habebit, quo in gubernaculum incurrens illi vim inferet. Quando autem aqua ipsa mouetur, tum gubernaculum ab aqua vim sentiet, dummodo nauis non eodem motu, quo aqua mouetur. Quodsi enim vel nauis in aqua quiescente quiescat, vel in aqua mota parem habeat motum secundum eandem directionem; gubernaculum, in quocunque situ detineatur, nullam vim ab aqua sentire poterit. Quare vt gubernaculum vim exerere queat, necesse est, vt aut nauis in aqua quiescente moueatur, aut in aqua mota vel quiescat, vel motu ab aquae motu diuerso promoueatur.

§. 490. Siue autem sola nauis moueatur siue tam aqua quam nauis simul diuerso motu ferantur, totus motus per regulas cognitas vel in solam aquam vel in solam nauem transferri poterit; quo ipso repraesentatio non parum adiuuabitur. Ponamus ergo aquam quiescere, quia vniuersam theoriam ad hunc casum potissimum accommodari conuenit, atque nauem in aqua moueri. Hic vero statim occurrunt duo casus, qui seorsim tractari debent; primus scilicet si nauis cursu directo secundum spinae directionem progrediatur; alter vero obtinet, si nauis motu obliquo secundum directionem a spinae directione diuersam feratur. Ad hosque duos casus referri poterunt omnes, qui in aqua mota seu fluuio siue nauis quiescat siue moueatur locum habere possunt.

§. 491. Sit AEBF sectio nauis horizontalis vel in superficie aquae vel infra eam facta, nauisque progrediatur cursu directo secundum directionem BA, ita vt A sit prora, B puppis. Repraesentet vero BC gubernaculum mobile circa axem B, et videamus cuiusmodi effectus ex quouis situ gubernaculi, vti si in situ B*c* detineatur, in motu nauis vel eius directione nasci debeat. Iste autem effectus ante omnia deduci debet, ex motu, quo aqua in regione posteriori BMC respectu nauis agitabitur; ex eiusque cum quantitate tum directione concludi poterit, quanta vi gubernaculum in situ quocunque B*c* detentum vrgeatur. Primo quidem perspicuum est, si nauis omni latitudine EF careret, tum aquam penitus in quiete esse permansuram, vel respectu nauis motum esse habituram aequalem illi, quo nauis progreditur, at in directione contraria, nempe in regione B*c*C aqua motum habitura est in directione QM parallela ipsi AB et celeritate ipsi nauis celeritati aequali.

Tab. XVI. fig. 3.

§. 492.

§. 492. Quodſi autem latitudo nauis EF in computum ducatur, mox apparebit aquam in regione BC*c* non in directione QM affluere poſſe, cum ob nauis corpus non detur ſpatium, vnde aqua in directione QM venire poſſit. Dum quidem nauis, poſtquam corpore ſuo ſpatium BC*c* occupauit, hoc ſpatium relinquit, id vacuum non manet, ſed continuo aqua repletur. Vnde autem aqua veniat, quae continuo ſpatia poſt nauem relicta occupet et adimpleat, tam accurate definiri non poteſt, veriſimile autem eſt, hanc aquam vnde quaque confluere, maxime autem eam aquam ſubingredi, quae circa latera nauis E et F verſatur. Quia enim nauis aquam praeſe propellit, haec ipſa magis locum vacuum, quo ſe recipiat, affectabit.

§. 493. Planiora haec fient, ſi naui perfectam quietem tribuamus, contra vero ponamus vniuerſam aquam inſtar fluuii in directione contraria *a*A eadem celeritate, quam ante naui affinximus; perſpicuum enim eſt, in hac hypoteſi eadem phaenomena ſequi debere, quae in antecedenti, vbi naui in aqua quieſcente motum in directione A*a* adiudicauimus. Aqua igitur in directione *a*A adveniens in proram impinget, atque ad latera vtrinque deflectet, ex quo in regione K mouebitur in directione KL; cum autem ad L pertigit, vbi latitudo nauis non multum variatur, naturalem ſequetur directionem LP, donec latera nauis retrorſum conuergant; tum autem motum ſuum iterum inflectet iuxta nauis latera, vt tandem in directione obliqua PM in gubernaculum incurrat. Inflexionem autem hanc aquae iuxta nauis latera ope calculi definire haud licet, propter defectum principiorum hydraulicorum

licorum huc ſpectantium, ex quo acquieſcere debemus concluſionibus generalibus, quas experientia ducti formare valebimus.

§. 494. Inflexus iſte curſus aquae iuxta nauis latera eueniet eo facilius, quo minor fuerit nauis curuatura; hoc eſt quo minor fuerit nauis latitudo EF prae longitudine AB, et quo lentius latera vbique verſus B conuergant. Cum enim motus aquae inſitus teneat directionem AB, hanc directionem vi propria conſeruare conatur, eoque magis declinationi ab hoc curſu reſiſtet, quo ea fuerit maior. Quia etiam, ſi latera nauis verſus puppim vehementer conuergant, nauique prope puppim magna tribuatur latitudo, fieri poteſt, vt aqua in ſuo curſu latera nauis penitus deſerat, atque poſt nauem ſpatium aqua tranquilla repletum relinquat, quam perpetuo praeterfluat. Quia enim hoc caſu latera nauis ſubito inflectuntur puppimque claudunt, aqua tantopere et tam ſubito curſum ſuum inflectere non valet.

§. 495. Sic, ſi AEBF fuerit ſectio nauis horizontalis in aqua facta, eaque puppim B verſus ſubito conuergat, aqua latera nauis in S et T vsque alluens curſum ſuum iuxta latera SB et TB inflectere non poterit, ſed latera deſerendo motum ſuum in directionibus SV et TV continuabit. Quo fiet, vt poſt nauem ſpatium VSBT maneat aqua tranquilla repletum, in quo adeo gubernaculum BC nullam vim ſentire poterit. Idem phaenomenon euenire oportet, ſi nauis in directione BA progrediatur in aqua quieſcente, vbi etiam poſt nauem portio aquae perpetuo eadem nauem comitabitur, in qua gubernaculum nullum effectum exerere poterit. Hoc probatur quotidiana experientia

rientia, qua conſtat naues poſt ſe plerumque ſecum ducere quampiam aquae portionem, quae nauem per longiſſima interualla ſequatur; haecque aqua vocari ſolet aqua mortua, eo quod in nauem nullam vim exerere poteſt.

§ 496. Quando ergo nauem eiusmodi aquae mortuae copia ſequitur, gubernaculo nullus agendi locus relinquitur, id quod maximum eſt vitium, quod in naues cadere poteſt. Quamobrem maxime cauendum eſt, ne naues puppim verſus nimis latae conſtruantur, lateraque ad puppim B nimis cito et ſubito conuergant. Hocque praeceptum conſtructores nauium experientia edocti ſatis diligenter obſeruare ſolent, dum partem nauium ſub aqua verſantem puppem verſus lentiſſime conuergentem conſtituunt, vt copia aquae mortuae quam maxime diminuatur. In ſuprema aquae ſuperficie quidem puppi tam acuta cuſpis ob alias circumſtantias conciliari non poteſt; contra autem ſub aqua nauis ſectiones horizontales maxime cuſpidari ſolent, donec in imo loco omni latitudine carent.

§. 497. Hanc igitur ob rem in ſuprema aquae ſuperficie gubernaculum nullum edere poteſt effectum, atque ſuprema aquae ſuperficies pone nauem reſpectu nauis ſtagnabit eritque aqua mortua. Sub aqua vero, vbi carina verſus puppim incipit eſſe ſatis gracilis, aqua in gubernaculum incurret, et aqua mortua ceſſabit; hicque affluxus continuo deſcendendo creſcet, quoad in imo loco, vbi tota nauis in ſpinam deſinit, aqua ſecundum ipſius ſpinae directionem moueatur, eandemque habeat celeritatem reſpectu nauis quieſcentis, quam habet nauis reſpectu aquae quieſcentis. Maximum ergo effectum gubernaculum praeſtabit in imo loco, ita vt eius pars ſuperior immedia

diate ſub aqua ſita propemodum nullius ſit vſus. Quamobrem conuenit gubernaculo in infima parte maximam tribui latitudinem BC, quia ab ea potiſſimum omnis gubernaculi effectus proficiſcitur.

§. 498. Quoniam, ſi puppis ſubito clauditur, aqua in ſpatium aliquod poſt nauem omnino non affluit, ſed ſpatium SVT aqua quieſcente repletum relinquit, manifeſtum eſt, ſi puppis magis fiat cuspidata, tum portionem aquae quieſcentis diminui tandemque penitus ceſſare; vt in figura 3. Interim tamen etiam tum aqua non pleno curſu in Tab. XVI. fig. 3.
ſpatium BC*c* irruet, ſed tam in directione obliqua PM, quam etiam minori celeritate, quam eſt ea, qua aduerſus proram ſecundum *a*A impingere ponitur. Quamobrem cum vtrinque effectus gubernaculi infringatur, maximi momenti hoc eſt praeceptum, vt naues puppim verſus, in parte aquae ſubmerſa, quantum fieri poteſt, graciles efficiantur, et capacitas diminuatur. Quemadmodum etiam in praxi his in locis cauitas nauium omnino adimitur, ſolusque paries, qui lignum mortuum vocatur, relinquitur.

§. 499. His expoſitis videamus, quantam vim aqua iuxta puppim in gubernaculum impingens exerat. Ac primo quidem perſpicuum eſt, ſi gubernaculum BC in directum cum ſpina nauis fuerit conſtitutum, tum vires, quas vtrinque ab aqua allabente ſuſtinet, ſe mutuo deſtruere. Quia enim ponimus curſum aquae fieri in directione *a*A, is verſus puppim vtrinque aequaliter inflectetur, ideoque eadem vi in vtramque gubernaculi BC ſuperficiem impinget, ex quo aequilibrium oriatur neceſſe eſt. Quodſi autem gubernaculum BC in ſitum obliquum B*c* redigatur, angulusque CB*b* minor fuerit quam angulus BC*p*, quem

aquae pC cum ſpina ABC facit, tum quidem etiamnum aqua in vtramque ſuperficiem gubernaculi vim exeret, at impetus in ſuperficie Bc ab allapſu aquae PM maior erit quam in parte oppoſita, hincque vis reſultabit gubernaculum in directione MN vrgens, quae nauem circa axem verticalem rotare conabitur.

§. 500. Sin autem angulus CBc maior fuerit quam angulus BCp, tum aqua in parte pBc ceſſabit vllum effectum in gubernaculum Bc exerere, hincque gubernaculum omnem actionem aquae PM ex altera parte allabentis ſuſtinebit, ex qua vim definiri conueniet, qua navis circa axem verticalem circumagetur. Sunt itaque hi duo caſus, quibus angulus CBc vel minor eſt vel maior quam angulus BCp, penitus a ſe inuicem diſiuncti, neque lege continuitatis inter ſe connexi, ita vt vtrumque ſeorſim calculo expediri oporteat. Deinde etiam notandum eſt obliquitatem aquae allabentis ſeu angulum BCp per totam profunditatem variari, eumque in vna nauis regione prope ſpinam prorſus euaneſcere; quae varietas calculum redderet inſuperabilem. Hanc ob rem obliquitatem BCp mediam ſtatuemus inter maximam et minimam eamque toti profunditati tribuemus.

§. 501. Ponamus igitur per totam gubernaculi altitudinem aquam incurrere vtrinque in directione PM et p C, angulique PMQ vel pCB ſinum eſſe $= m$ coſinum n, exiſtente, id quod ſemper aſſumimus, ſinu toto $= 1$, ita vt ſit $mm + nn = 1$. Ac primo quidem ſit angulus CBc minor angulo BCp, quo caſu aqua vtrinque in gubernaculum impetum faciet: ſitque anguli CBc ſinus $= s$, coſinus $= u$. His poſitis angulus PMB ſub quo aqua in parte PM impinget,

pinget, erit aequalis summae angulorum $CBc + pCB$. eiusque ideo sinus erit $= mu + ns$. Contra vero ex altera parte aqua pC irruet in gubernaculum sub angulo $pCB - CBc$, cuius sinus est $mu - ns$. Quum igitur alter impetus alteri sit contrarius, ex excessu, quo alter alterum superat, effectus aquae in gubernaculum colligi debet.

§. 502. Cum igitur sub istis angulis aqua vtrinque in gubernaculum impingat, sit superficies gubernaculi, quae vtrinque impetum aquae excipit $= bb$, atque M sit istius vtriusque superficiei centrum grauitatis, in quo tota vis aquae collecta est aestimanda, quippe per quod media directio impetus aquae transit, et ad superficiem est normalis. Quodsi ergo velocitas aquae in regione puppis ponatur debita altitudini v. Vis aquae ex parte PM impingentis aequivalet ponderi voluminis aquae, quod est $= bbv(mu + ns)^2$. Ex parte opposita autem vis aequiualebit ponderi voluminis aquae, quod est $= bbv(mu - ns)^2$, quae vis, quia illi est contraria, remanebit vis ex plaga PM proueniens $= 4mnsubbv$. Quae, vt ad pondus reducatur, positis pondere nauis $= M$ et volumine sub aqua versante $= V$, erit ea $= \frac{4Mmnsubbv}{V}$.

§. 503. Huius iam vis media directio erit recta MN, per centrum grauitatis M superficiei gubernaculi, quae quidem sub aqua versatur, ducta et ad superficiem Bc normalis. Hanc ob rem ab ista aquae in gubernaculum actione nauis vrgebitur in directione MN vi $= \frac{4Mmnsubbv}{V}$, si quidem angulus CBc fuerit minor quam angulus BCp seu $mu > ns$. Quodsi autem angulus CBc maior fuerit angulo BCp, tum ob euanescentem alteram vim $bbu(mu - ns)^2$ in calculo nascetur formula longe diuersa, fietque

vis, qua nauis in directione M N vrgebitur $= \frac{Mhhv(mu+ns)^2}{V}$, haecque adeo expressio locum habebit si fuerit $mu < ns$.

§. 504. Quo autem nauis hanc vim, quam aqua in gubernaculum Bc exerit, sentiat, necesse est vt gubernaculum in isto situ tanta vi detineatur, quae sufficiat ad vim aquae sustinendam. Si enim gubernaculum non teneretur, maxima vis aquae pars impenderetur ad gubernaculum circa axem B rotandum, quoad quiesceret in situ BC, hocque motus ipsius nauis parum afficeretur. Quamobrem ad gubernaculum in situ Bc detinendum tanta vis a gubernatore, qui clauum tenet, est applicanda, cuius momentum respectu axis B, circa quem gubernaculum mobile existit, aequale sit momento vis aquae respectu eiusdem axis. Hoc est si ponatur axis iste B circa quem gubernaculum mobile est, verticalis, et distantia $MB = k$, debebit esse momentum vis, quod ad gubernaculum in situ Bc retinendum requiritur, $= \frac{4Mmnsuhhvk}{V}$ casu quo $mu > ns$, altero vero casu quo $ns > mu$, debebit illud momentum esse $= \frac{M(mu+ns)^2 hhv}{V} k$.

§. 505. Gubernaculum autem dirigi atque detineri solet ope temonis, qui est vectis heterodromus mobilis circa axem B, quem axem adhuc verticalem ponimus, postea inuestigaturi, quantum obliquitas huius axis discriminis afferat: reuera enim iste axis in nauibus oblique ad horizontem constitui solet. Quodsi ergo huius vectis seu temonis brachium interius quod gubernator tenet, habeat longitudinem $= f$. atque vis, quam gubernator adhibere debet ad gubernaculum in situ Bc conseruandum ponatur $=$ P, erit momentum huius vis ex natura vectis $=$ Pf. Quare casu quo $mu > ns$ debet esse $Pf = \frac{4Mmnsuhhv}{V} k$, altero

tero vero caſu, quo habetur $CBc > BCp$ ſeu $mu < ns$ oportet eſſe $Pf = \frac{M(mu+ns)^2 bbv}{V} k$.

§. 506. Si ergo gubernaculum in ſitu Bc a gubernatore firmiter detineatur, vi, quam modo definiuimus, nauis ipſa ſollicitabitur in directione MN, vi vel $= \frac{4Mmnsubbv}{V}$ vel $= \frac{M(mu+ns)^2 bbv}{V}$; illa ſcilicet ſi $mu < ns$, hac ſi $mu < ns$. Atque quia axem B, circa quem gubernaculum mobile exiſtit, ponimus verticalem, erit directio media ex vi aquae orta MN horizontalis. Quodſi autem vim P, qua gubernator clauum tenet in computum ducere velimus, ambo illi caſus, quibus eſt vel $mu > ns$ vel $mu < ns$ in vnum recident; fietque vtroque caſu vis, qua nauis inclinatione horizontali MN ſollicitabitur $= \frac{Pf}{k}$. Atque ſic ex vi a gubernatore impendenda P, ex longitudine temonis f, et ex diſtantia centri grauitatis gubernaculi M ab axe B quae eſt k, innoteſcit perpetuo vis, quam nauis ſuſtinet, eiusque directio MN.

§. 507. Ab hac ergo vi, quia eius directio eſt horizontalis, primum motus nauis progreſſiuus afficietur, idque pari modo, ac ſi eadem vis in directione ipſi MN parallela naui in ipſo centro grauitatis eſſet applicata: hincque ſi ante curſus nauis fuerit directus ſecundum directionem BAa, per vim gubernaculi naui curſus aliquantulum obliquus inducetur, haecque obliquitas pendebit cum a nauis celeritate tum a viribus nauem in directione Aa propellentibus. Praeterea ſi punctum M vel altius vel humilius fuerit poſitum quam centrum grauitatis nauis, nauis quoque inclinabitur circa axem horizontalem Et quia punctum M potiſſimum infra centrum grauitatis nauis cadit, latus nauis EA deprimetur, contra vero latus FB eleuabitur pro ratione ſtabilitatis.

§. 508.

§. 508. Tandem autem ab hac vi nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis trenſeuntem conuertetur, in quo principalis gubernaculi ſcopus verſatur, et ad quem hic nobis potiſſimum eſt reſpiciendum. Quoniam igitur ipſa vis eſt $= \frac{Pf}{k}$, eiusque directio horizontalis MN, ſi axis verticalis nauis hanc ſectionem horizontalem AEBF in G traiicere ponatur, erit iſtius vis momentum ad nauem circa axem verticalem conuertendam $= \frac{Pf}{k}(BG + BN)\frac{BM}{BN}$; eoque prora nauis A in regionem $A\alpha$ detorquebitur, ita vt directio nauis, quae ante erat BA, verſus α inflectatur. Ponatur $BG = a$, ob ſinum $CBc = s$ et coſinum $= u$ erit $\frac{BM}{BN} = u$, et $BN = \frac{k}{u}$, ex quo momentum vis nauem conuertentis erit $= \frac{Pf}{k}(a + \frac{k}{u})u = \frac{Pf(au+k)}{k}$.

§. 509. Ceteris paribus igitur eſt vis gubernaculi nauem conuertens, vt vis P, quam gubernator adhibere debet ad gubernaculum in ſitu ſuo conſeruandum. Ex quo intelligitur, tum demum gubernaculum nihil valere ad nauem conuertendam, ſi nulla vi opus fuerit ad gubernaculum continendum. Euenit hoc autem ſi gubernaculum in ſitu BC fuerit conſtitutum, vbi ob $s = 0$ fit etiam vis $P = 0$. (§. 505); quo in loco gubernaculum in ſitu aequilibrii verſatur. At cum in hoc ſitu aqua vtrinque in gubernaculum irruat ſub angulo BCp, hic aequilibrii ſitus erit violentus, eo quod vires contrariae ſe multo deſtruunt. Quare ſi gubernaculum caſu de hoc ſitu declinetur; vel ſubinde, quod ob ſummam circumſtantiarum mutabilitatem facile euenire poteſt, vires illae contrariae non inter ſe ſint perfecte aequales, gubernaculum in ſitu BC non erit in aequilibrio abſoluto ſed vel in hanc vel illam plagam vrgebitur.

§. 510. His igitur casibus si gubernator voluerit gubernaculum in situ directo BC conseruare, vim adhibere debebit, ideoque nauis, etsi gubernaculum situm tenet directum BC, tamen conuertetur. Quamobrem, si nauis directio non debeat inflecti, gubernaculum non tam in situ directo BC erit detinendum, quam eo in situ, in quo sine vi manebit; cursusque nauis invariatus restabit, si clauo nulla vis inferatur, quemcunque situm teneat gubernaculum. Cum igitur ob aquam vtrinque ad gubernaculum BC oblique impingentem vtraque vis non perpetuo sit aeque vehemens, vtique eueniet vt gubernaculi situs aequilibrii, a quo nauis nullam vim suffert, non perpepetuo in situm directum CB incidat, sed modo in hanc modo illam regionem deflectat. Hancque ob causam gubernaculo spatium aliquod concedi debet, in quo libere fluctuare possit, si quidem nauis directionem inflecti non oporteat.

§. 511. In tali ergo libero spatio, quod gubernaculo conceditur, gubernaculum circa axem B oscillationes peraget, quas inuestigare operae praetium erit. Ad hoc ponamus gubernaculi cum temone, quippe qui simul movetur, respectu axis B momentum inertiae esse $=$ G et quia momentum virium aquae, quae gubernaculum in situ obliquo Bc, quem minime a situ directo BC discrepare ponimus, constitutum in situm BC redigere conantur est $= \frac{4Mmnsubbvk}{V}$, vbi est s sinus anguli CBc percurrendi, quem minimum assumimus, ideoque erit cosinus $u = 1$. Cum igitur spatium percurrendum sit vt s, erit longitudo penduli simplicis isochroni cum oscillationibus gubernaculi, $= \frac{GV}{4Mmnbbkv}$. His igitur oscil-

lationibus nisi omnis libertas concedatur, nauis directionem suam conseruare non poterit.

§. 512. Hae ergo gubernaculi vibrationes celeriores erunt eoque vehementiores, quo minor fuerit in numeratore valor ipsius G, in denominatore autem quo maior fuerit valor ipsius $mnhhkv$, ob valorem $\frac{V}{4M}$ constantem. Ob denominatorem ergo, qui maximae variabilitatis est capax; primum erunt oscillationes eo vehementiores, quo propius angulus obliquitatis BCp, secundum quem aqua circa puppim mouetur, ad angulum semirectum accesserit. Deinde etiam oscillationum vehementia crescet, quo maior fuerit altitudo v, hoc est quo celerius nauis in aqua progreditur. His igitur casibus nisi gubernaculum perfecte liberum relinquatur vt motum oscillatorium recipere possit, nauis directionem suam conseruare non poterit, verum modo in hanc modo in illam plagam deflectetur. Hancque cautelam nautae probe obseruare solent, dum gubernaculo in turbidis potissimum tempestatibus spatium satis amplum concedere iubent, in quo libere agitetur.

§. 513. Quo autem ipsam vim gyratoriam, qua navis a gubernaculo circa axem verticalem conuertetur, curatius determinemus, sit momentum inertiae totius nauis respectu axis verticalis per centrum grauitatis transeuntis $=$ S; erit acceleratio nauis circa hunc axem orta vt $\frac{Pf(au+k)}{Sk}$. Ex qua expressione intelligitur nauem ceteris paribus eo facilius actioni gubernaculi obedire, quo minor fuerit valor momenti S; hoc est quo propius moles nauis ad istum axem verticalem admoueatur. Supra quidem vidimus oscillationum nauis tranquillitatem obtineri, si omnia onera quantum fieri potest ab axibus horizontalibus

per

per centrum grauitatis ductis, maxime remoueantur: quare vt simul per onerationem nauis gubernatu facilis reddatur, maxima onerum copia ab ipso centro grauitatis nauis quidem maxime debebit remoueri; verum tamen ita, vt ab axe verticali per centrum grauitatis ducto quam minime remoueatur. Ex quo intelligitur per onerationem tam oscillationum tranquillitatem, quam effectum gubernaculi facilem obtineri posse.

§. 514. Acceleratio porro autem conuersionis nauis circa axem verticalem potissimum pendet a quantitate momenti virium sollicitantium quod est $= \frac{Pf(au+k)}{k}$, quod quo fuerit maius, eo facilius effectus gubernaculi consequetur. Ponamus autem gubernaculum in tali situ Bc detineri, cuius declinatio a situ directo BC seu angulus CBc maior sit, quam obliquitas cursus aquae BCp; eritque $\frac{Pf}{k} = \frac{M(mu+ns)^2 bbv}{V}$, ideoque momentum virium nauem conuertentium $= \frac{M(mu+ns)^2 bbv(au+k)}{V}$ seu ob rationem $\frac{M}{V}$ constantem, erit momentum hoc vt $(mu+ns)^2 bbv(au+k)$. Ex qua formula primum colligitur effectum gubernaculi eo esse fortiorem, quo maior fuerit gubernaculi superficies bb, et quo celerius aqua in gubernaculum irruat, ceteris paribus. Ad hoc ergo praestaret gubernacula amplissima conficere, nisi aliae rationes hoc dissuaderent.

§. 515. Quosi iam superficies gubernaculi bb iam fuerit determinata, ac celeritas aquae seu v non ab arbitrio nostro pendeat, erit vis gyratoria vt $(mu+ns)^2(au+k)$, ex qua cognoscere licet, quantum declinatio gubernaculi seu angulus CBc ad nauem conuertendam conferat. Notandum autem est hanc formulam non valere nisi sit mu

$< ns$ seu $CBc > BCp$; At facile intelligitur valorem illius expressionis non continuo euadere maiorem, quo maior constituatur angulus CBc; etsi enim augendo angulum CBc crescit factor $(mu + ns)^2$; tamen contra ob cosinum anguli CBc, qui est $= u$, decrescentem tota expressio $(mu + ns)^2 (au + k)$ diminui poterit. Hincque perspicuum est angulum dari definitum CBc, pro quo expressio illa maximum induat valorem.

§. 516. Inuestigemus ergo angulum declinationis CBc, quae expressioni $(mu + ns)^2 (au + k)$ maximum valorem conciliet; ideoque eam expressionem differentiemus ponendo u et s variabiles fietque $(mu + ns)^2 adu + 2(au + k)(mu + ns)(mdu + nds) = 0$. Cum autem sit $uu + ss = 1$ erit $du = -\frac{sds}{u}$, vnde orietur sequens aequatio diuisione per $mu + ns$ instituta: $(mu + ns) as = 2(au + k)(nu - ms)$ seu $3masu + nass = 2nauu + 2nku - 2mks$. Quoniam vero interuallum $BM = k$ est valde paruum prae distantia $BG = a$, erit vtique proxime $3masu + nass = 2nauu$, atque posita tangente anguli $CBc = \frac{s}{u} = t$, erit $ntt + 3mt = 2n$, hincque $t = \frac{-3m + \sqrt{(9 - nn)}}{2n}$; et secans anguli $CBc = \sqrt{(1 + tt)} = \frac{\sqrt{(9 + 6n - 3nn)} - \sqrt{(9 - 6n - 3nn)}}{2n}$. Vnde fit $s = \frac{t}{\sqrt{(1 + tt)}} = \frac{\sqrt{3(1 + n)(3 + n)} - \sqrt{3(1 - n)(3 - n)}}{6}$ atque $= u = \frac{\sqrt{3(1 + n)(3 - n)} + \sqrt{3(1 - n)(3 + n)}}{6}$.

§. 517. Sin autem hos valores propius habere velimus, ita vt etiam interualli $BM = k$ etsi admodum parui respectu $BG = a$, ratio habeatur, ponatur verus ipsius anguli CBc sinus valor $= s'$, eiusque cosinus $= u'$; atque fingatur $s' = s + \frac{kzu}{a}$ et $u' = u \frac{kzs}{a}$; denotantibus s et u valores iam inuentos. His autem in aequatione proposita substitutis reperietur $z = \frac{2}{3} \cdot \frac{nu - ms}{muu - mss + 2nsu}$. Quodsi iam

iam loco s et u valores inuenti ſubſtituantur, obtinebitur ſin. $CBc = \frac{\sqrt{3}(1+n)(3+n) - \sqrt{3}(1-n)(3-n)}{6} + \frac{k}{3a} \cdot \frac{2n}{\sqrt{(9-nn)}}$ coſ. $CBc = \frac{\sqrt{3}(1+n)(3-n) + \sqrt{3}(1-n)(3+n)}{6} - \frac{k}{3a} \cdot \frac{\sqrt{(9-nn)} - 3\sqrt{(1-nn)}}{\sqrt{(9-nn)}}$.

§. 518. Quoniam autem aſſumſimus angulum CBc maiorem eſſe angulo BCp, ſub cuius obliquitate aqua in gubernaculum irruit; expreſſio anguli CBc inuenta, quo gubernaculum maxime efficax exiſtit, locum habere non poterit, niſi ſit angulus CBc maior angulo CBp, hoc eſt, ſumendis tangentibus, niſi ſit $\frac{s}{u}$ ſeu $t > \frac{m}{n}$. Inuenimus autem neglecta quantitate $BM = k$ prae maiore $BG = a$, eſſe $t = \frac{-3m + \sqrt{(9-nn)}}{2n}$; quae cum ſuperare debeat tangentem $\frac{m}{n}$, oportebit eſſe $-3m + \sqrt{(9-nn)} > 2m$ ſeu $\sqrt{(9-nn)} > 5m$ hoc eſt $\sqrt{(8+mm)} > 5m$ ob $nn = 1 - m^2$, ſumantur quadrata fiet $Q + mm > 25mm$ hincque $8 > 24mm$ ideoque $m < \frac{1}{\sqrt{3}}$ Ex quo colligitur angulum obliquitatis aquae BCp minorem eſſe debere quam $35° . 16'$, ſi quidem angulus CBc inuentus gubernaculo maximum effectum praebere debeat.

§. 519. Hinc manifeſtum eſt, ſi angulus BCp maior fuerit $35°, 16'$, tum valorem inuentum pro angulo CBc non amplius gubernaculo maximum effectum eſſe daturum, eo quod tum hypotheſis calculo aduerſetur. Quodſi autem angulus BCp exacte aequetur $35°, 16'$, ita vt eius ſinus ſit $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ ſeu tangens $= \frac{1}{\sqrt{2}}$; tum angulus CBc gubernaculo maximam vim tribuens accurate aequabitur angulo BCp, fietque directio gubernaculi Bc parallela directioni aquae pC in parte oppoſita ad puppim affluente. Sin autem angulus BCp maior euaderet, tum minor proditurus eſſet angulus CBc ex calculo, ideoque vtrinque gubernaculum vim aquae ſentiret, dum tamen in calculo

vnam tantum gubernaculi ſuperficiem aquae allidentem ponimus.

§. 520. Ponamus obliquitatem aquae BCp omnino euaneſcere, atque aquam ſecundum directionem ſpinae nauis ad puppim impingere, vt angulum obtineamus, ſub quo gubernaculum maximum effectum praeſtare iam pridem eſt inuentum. Qui enim adhuc iſtum angulum maximae efficaciae determinauerunt, non ſolum aquam directe circa puppim alluere poſuerunt, verum etiam interuallum $BM = k$ prae longitudine $BG = a$ negligendum cenſuerunt. Hanc obrem in formulis pro angulo CBc inuentis ponamus $m = 0$ et $n = 1$, prodibitque anguli CBc tangens $t = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$, hineque eius ſinus $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ et coſinus $= \sqrt{\frac{1}{3}}$: ex quo angulus CBc, ad quem gubernaculum inclinatum promtiſſimum effectum edit, erit 54°, 44′, omnino vti ab aliis iam pridem eſt inuentum. Creſcente ergo obliquitate aquae BCp angulus CBc continuo decreſcit, donec tandem euadat 35°, 16′, facto angulo BCp pariter = 35°, 16′.

§. 521. Maneat directio aquae pC ſpinae nauis parallela ſeu $m = 0$ et $n = 1$, verum interualli $BM = k$ rationem quoque habeamus in definiendo angulo CBc gubernaculo citiſſimum effectum conciliante. Habebimus ergo hanc aequationem quaeſito noſtro ſatis facientem: $ass = 2auu + 2ku$, ſeu $a = 3auu + 2ku$; ideoque $uu = \frac{-2ku}{3a} + \frac{1}{3}$. Hinc fit $u = \frac{-k}{3a} + \sqrt{\left(\frac{1}{3} + \frac{kk}{9aa}\right)} = \frac{-k + \sqrt{(3aa + kk)}}{3a}$. Sit iam k multo minor quam a, eritque proxime coſinus anguli $CBc = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{k}{3a} + \frac{kk}{6a^2\sqrt{3}}$. Sit $\frac{k}{a} = \frac{1}{20}$ vt fere fieri ſolet, prodibit coſinus anguli $CBc = 0,5609239$, atque

que ideo ipſe angulus CBc arit $= 55°, 53'$, et conſequenter maior, quam ſi interuallum BM $= k$ prae longitudine BG $= a$ neglexiſſemus.

§ 522. Vt nunc de ipſa celeritate, qua nauis a gubernaculo conuertitur quicquam definiamus, ſupra §. 486. vidimus in nauibus, quarum corpora ſint ſimilia, denotante c latus homologum puta profunditatem carinae, ſi momentum vis conuertentis fuerit $= P$, fore celeritatem angularem genitam vt $\frac{\sqrt{PV}}{cc\sqrt{Mc}}$. At noſtro caſu momentum gubernaculi eſt $= \frac{M(mu+ns)^2 bbv(au+k)}{V}$, ſeu neglecto k prae a $= \frac{Mau(mu+ns)^2 bbv}{V}$. Hoc ergo valore loco P ſubſtituto prodibit celeritas nauis angularis vt $\frac{\sqrt{bbu}(mu+ns)^2 v}{cc}$ ob a ipſi c proportionalem, ſeu poſita gubernaculi declinatione eadem erit celeritas angularis vt $\frac{\sqrt{bb}v}{cc}$. In nauibus ergo, quarum corpora praeter gubernacula ſunt ſimilia pro ſimili gubernaculorum declinatione erunt celeritates angulares in ratione compoſita ex directa velocitatis nauis et ſubduplicata ſuperficiei gubernaculi; atque ex inuerſa duplicata laterum homologorum.

§. 523. Si naues habeant quoque gubernacula ſimilia, vt ſit bb vti cc, tum celeritas angularis a gubernaculo oriunda erit vt $\frac{\sqrt{v}}{c}$ hoc eſt directe vt celeritas nauis, et inuerſe vt latera homologa: ex quo maiores naues tardius conuertentur quam minores idque in ratione laterum homologorum. At in maioribus nauibus gubernacula minora confici ſolent, quam ſimilitudo requireret; ac fere tota gubernaculi ſuperficies bb ſtatui ſolet lateri homologo c proportionalis: in hac ergo conſuetudine celeritates angulares diuerſarum nauium erunt vti $\frac{\sqrt{v}}{c\sqrt{c}}$, hoc eſt directe

vti

vti celeritates ipſae nauium, et reciproce tenebunt rationem ſeſquiplicatam laterum homologorum; nauis dcirco quadruplo longior et 64 vicibus grauior octies tardius conuertetur a gubernaculo ceteris paribus.

§. 524. Vt autem diuerſae naues ceterum ſimiles aequali celeritate angulari gubernaculi ope conuerti poſſent, gubernacula adhuc maiora confici deberent, quam pro ſimilitudinis ratione. In diuerſis ſclicet nauibus ſuperficies gubernaculi conſtitui deberet quadrato quadrato laterum homologorum proportionalis, ita vt eſſet bb vti c^4. Verum tum ob motum angularem eundem ipſe motus conuerſionis in nauibus maioribus, qui in ratione longitudinis creſcit, nimium fieret vehemens atque impetuoſus, vt tantae molis naues eiusmodi concitatum motum ſuſtinere nequeant. Quam ob cauſam iure nequidem poſtulari poteſt, vt naves maiores eodem tempore ſeſe in gyrum agi patiantur quam minores; hincque etiam multo minoribus gubernaculis, quam iſte effectus requireret, inſtrui ſolent, ita vt etiam minora conſtitui ſoleant, quam ſimilitudinis ratio requirit.

§. 525. Cur autem gubernacula in maioribus nauibus adhuc minora quam pro ſimilitudinis ratione conficere conſueuerint; cauſa non tam facile aſſignari poteſt, praecipue cum promtitudo gubernaculi in omnibus nauibus ſummo ſtudio deſiderari ſoleat. Reſpondent vero ad hoc artis nauticae periti, tanta gubernacula, quanta ſimilitudo requirit, in magnis nauibus cum nimis difficulter contineri, tum etiam tanti roboris pro ceteris circumſtantiis fabricari non poſſe, vt viribus aquae ſuſtinendis paria eſſent. Praecipua vero ratio in hoc poſita eſſe videtur, quod vſus, variique

variique casus quibus naues exponuntur, a nauibus maioribus non tam promptam gyrationem postulent, quam a minoribus; ita vt consuetae magnitudinis gubernacula etiam in maximis nauibus sufficere queant.

§. 526. Supra vidimus, si temonis, quo gubernaculum regitur et continetur, longitudo fuerit $= f$, fore vim a nauclero adhibendam, vt gubernaculum in dato obliquitatis situ conseruet, vti $\frac{bbkv}{f}$, seu celeritate posita eadem vti $\frac{bbk}{f}$. Quodsi ergo gubernaculum sit ad similitudinem in nauibus diuersae magnitudinis confectum, vt sint b et k itemque f vt latera homologa c, erit vis a gubernatore adhibenda tamen in duplicata ratione laterum homologorum; atque in naui duplo longiori quadruplo maior vis requireretur, ad gubernaculum in dato situ continendum. Sin autem gubernacula in maioribus nauibus adhuc maiora, quam pro similitudinis ratione conficiantur, vt motus angularis prodeat idem qui in minoribus, quia tum esse debent bb vt c^4 et k vt c^3 ob longitudinem gubernaculi vti c, prodiret vis a gubernatore impendenda vt $\frac{c^7}{f}$. Quare si f capiatur vt c foret vis gubernatoris in ratione sextuplicata laterum homologorum, quae omnino admitti non potest.

§. 527. In hoc autem statu maxime cauendum est, ne gubernaculum abrumpatur, cuius robur ruptioni resistens est in crassitiei gubernaculi ratione duplicata. Posita ergo crassitie gubernaculi $= s$ erit eius robur vt css; denotante c longitudinem seu latitudinem gubernaculi: momentum autem vis aquae, quae gubernaculum abrumpere conatur, est vt bbk, ex quo crassities s constitui deberet pro-

portionalis ipſi $\sqrt{\frac{hhk}{c}}$. Ponatur altitudo nauis, quae ſimul latus homologum exprimat, $= c$, et latitudo gubernaculi $= t$ erit $hh = ct$ et $k = \frac{1}{2}t$, vnde fiet s vt t. Si ergo gubernaculum ad ſimilitudinem nauium fabricatur, vt ſit t vti c, oporteret craſſitiem gubernaculi s quoque eſſe vti c, ideoque tantam, quantam ſimilitudo requirit. Quamobrem ſi craſſities ſumatur lateribus homologis proportionalis, tum poſſet latitudo etiam conſtitui lateribus homologis proportionalis.

§. 528. Quodſi ergo in nauibus diuerſae molis ſimilibus etiam gubernacula tam ratione craſſitiei quam latitudinis fiant ſimilia, tum quidem aeque ruptioni reſiſterent; at motus angularis ideo non fieret aequalis, verum proportionalis exiſteret inuerſe lateribus homologis, eoque tardior euaderet, quo maiores eſſent naues. Sin autem motus angularis deſideretur idem in omnibus nauibus, tum $hh = ct$ debet eſſe vt c^4 ideoque latitudo t deberet eſſe vt c^3 cui ſimul craſſities s fieret proportionalis. In naui ergo duplo longiore tam craſſities quam latitudo conſtitui deberet octuplo maior, quae ratio in maximis nauibus tantopere augeretur, vt gubernaculi craſſities tandem totam nauis latitudinem adaequaret. Quod cum minime admitti queat, manifeſtum eſt effici omnino non poſſe, vt naues maiores aeque celeriter ac minores ope gubernaculi circumagi queant.

§. 529. Neque vero reliquae circumſtantiae permittunt, vt craſſities gubernaculi in ratione laterum homologorum creſcat; namque craſſities gubernaculi excedere nequit craſſitiem ligni mortui, cui adaptatur, quia alias reſiſtentiam pareret motui nauis admodum noxiam, verum aliae

aliae rationes impediunt; quominus craſſities ligni mortui ſimilitudinem nauium ſequatur, quippe quae in nauibus maioribus minor ſtatuitur, quam ſimilitudinis lex poſtulat. Quam ob cauſam in nauibus maioribus tam craſſities quam latitudo gubernaculi in minori quam ſimilitudinis ratione creſcere debebit, ex quo eius effectus minor fiat neceſſe eſt. Vnde celeritas angularis in nauibus maioribus adhuc minor exiſtet, quam ratio inuerſa laterum homologorum requirit; hoc eſt in naui duplo longiori plus quam duplo erit tardior. Ex quibus abunde perſpicitur, quo maiores fuerint naues, eo minus eas effectum gubernaculi ſentire poſſe, quam naues minores cetera ſimili modo conſtructas, quod phaenomenon experientia manifeſto declarat.

§. 530. Ex his igitur quantitas gubernaculi ſecundum omnes dimenſiones perfecte determinatur. Primum enim eius longitudo ſeu altitudo aequalis eſt profunditati ad quam nauis aquae immergitur: eminet quidem inſuper extra aquam ad temonem vsque, haec autem pars in computum non ingreditur. Deinde craſſities gubernaculi aequalis conſtitui debet craſſitiei parietis nauis, cui adaptatur; maior enim ob rationes allegatas eſſe nequit, minorem autem confici non conuenit, cum quod aqua in id non libere allaberetur, tum vero potiſſimum, quia latitudinem minui oporteret, quam tamen maximam eſſe expedit. Debet autem latitudo ſumi craſſitiei proportionalis, ita vt ſi in vna naui ratio inter latitudinem et craſſitiem per experimenta fuerit determinata, eadem ratio in omnibus nauibus locum habeat. Interim gubernaculo in infima parte maior latitudo tribuitur, quam in ſuperiori, eo quod hic foret inutilis, et gubernationem difficiliorem redderet.

§. 531. Expoſita hac gubernaculi determinatione atque efficacia in motu nauis directo, inueſtigandus eſt eius effectus, quem in curſu obliquo exerit; quo nauis non ſecundum axis longitudinalis directionem progreditur, ſed ab ea parumper declinat; qui curſus, ſi nauis velorum ope aduerſus ventum propellitur, maxime eſt frequens. Haec vero declinatio vulgo angulum 15° excedere non ſolet, niſi forte vndarum impetus a latere venientium hanc declinationem maiorem reddit. Eiusmodi igitur motu obliquo aqua non in directione ſpinae ad gubernaculum allidit, ſed in directione fere contraria ei, quam nauis tenet. Atque hoc caſu latera nauis aquam ex ea regione in quam nauis declinat, minus iſtam directionem perturbant, quam in motu directo, contra autem in altera regione perturbatio fit eo maior.

Tab. XIII. fig. 1. §. 532. Ponamus igitur nauem in aqua curſu obliquo ferri in directione GP, ſeu quod eodem redit, aquam contra nauem quieſcentem AEBf impingere in directione PG. Ducantur rectae Qe et Rf latera nauis ſtringentes in e et f, ac parallelae directioni PG erit eAf portio ſuperficiei nauis impulſum aquae ſuſtinens. Quamobrem vt nauis in quiete perſiſtere queat, neceſſe eſt, vt a vi aequali et contraria ei, qua aqua impingit, ſollicitetur. Cum autem vis aquae non ſolum nauem propellere, ſed etiam circa axem verticalem conuertere conetur, niſi eius media directio per hunc ipſum axem verticalem G in centro grauitatis G traiectum tranſeat, vis quoque nauem in quiete conſeruans iſtam aquae vim reſpectu vtriusque effectus deſtruere debet. Haecque ſimiliter ſe habent, ſi nauis in aqua quieſcente ſecundum directionem obliquam GP progredia-

grediatur; retineamus autem ideam nauis quiescentis in aqua mota.

§. 533. Vrgeatur itaque nauis ab eiusmodi vi, vt in perfecta quiete conseruetur; atque consideremus gubernaculum BC in situ directo detentum. A parte igitur *f*, in quam aquae cursus obliquus vergit, aqua in gubernaculum BC irruet secundum directionem *p*C fere parallelam directioni R*f* seu PG, neque angulus BC*p* multum excedet angulum AGP, quoniam directio laterum nauis *f*B, quam cursus aquae versus puppim sequitur, multo minus a directione R*f* deflectit, quam in cursu directo fieri solet. Quodsi ergo haec vis gubernaculum agitans sola adesset, tum ea gubernaculum BC versus plagam *d* conuerteret, donec eius directio parallela fieret directioni *p*C. Sin autem gubernaculum BC in situ hoc directo firmiter detineretur, tum ab ista vi aquae resultaret momentum totam nauim circa axem verticalem per eius centrum grauitatis G transeuntem conuertens, quo prora A versus *r* gyraretur, nauisque ad cursum directum impelleretur.

§. 534. Respiciamus nunc autem ad motum aquae ex altera parte *e* ad gubernaculum allabentis. Ac primo quidem perspicuum est, propter nimiam laterum nauis *e*B a cursu aquae deflexionem, motum aquae haec latera sequi non posse. Relinquetur ergo prope gubernaculum in B copia aquae stagnantis: et, si haec aqua gubernaculum BC stringat, eius vis erit valde exigua, cum propter obliquitatem, tum etiam ob tarditatem. Ex quibus colligitur, aquam ex parte *e*L allabentem multo fore debiliorem, quam quae ex parte opposita *f* impingit, ideo-

que gubernaculum hoc caſu ſibi relictum in ſitu directo BC non perſiſtet, ſed declinabit in ſitum B*c*, in quo vires vtrinque vrgentes ſeſe in aequilibrio teneant. Quo minor itaque fuerit vis aquae ex parte *e* venientis, eo propius ſitus aequilibrii B*c* ad parallelismum cum directione *p*C accedet: denotet autem *e*L*d* fluxum aquae a parte *e* puppim verſus currentis.

§. 535. Quando igitur vires nauem ſollicitantes in aequilibrio fuerint cum vi aquae in partem anticam *e*A*f* irruentis, nauis in quiete manere nequit, niſi gubernaculum in ſitu obliquo B*c* detineatur, vbi vires id ſollicitantes vel ſunt nullae, vel ſe inuicem deſtruunt. In hoc ſcilicet ſitu ad gubernaculum detinendum nulla omnino opus erit vi, hincque ſponte in eo permanebit. Perpetuo enim obſeruandum eſt, vim gubernaculi ad nauem conuertendam proportionalem eſſe illi vi, quae ad gubernaculum in ſitu conſeruandum requiritur; quae ſi fuerit nulla, ita vt gubernaculum ſponte in ſitu ſuo perſiſtat, nulla in naui rotatio oriri poteſt. Sit igitur B*c* ſtatus aequilibrii gubernaculi pro curſus obliquitate PG propoſita, in quo gubernaculum relinquendum eſt, ſi quidem nauis curſum ſuum inuariatum conſeruare debeat, translatis ſcilicet iſtis ad nauem in aqua quieſcente oblique motam.

§. 536. Cum igitur ſit B*c* gubernaculi ſitus aequilibrii, ſi proram A verſus *r* conuertere velimus, gubernaculum in eandem plagam verſus D eſt conuertendum: atque hac conuerſione actio ſatis efficax oriri debet. Ponamus enim gubernaculum in ſitu BD detineri, ac primo quidem conſtat ex regione L nullam affore vim in gubernaculum agentem, quae proinde vim ex altera parte

te p allidentem imminuat. Hinc autem vis aquae in directione pM affluentis minime impeditur, cum in hac parte non ſolum nulla ſit aqua mortua ſed etiam fluuius Rf pleno curſu in gubernaculum irruat. Leuiori igitur opera in eiusmodi curſu obliquo nauis per Ar conuertitur, quam in curſu directo, vbi tam aqua mortua prope puppim, quam curſus aquae ob laterum nauis conuergentiam multum declinatus ac debilitatus effectum gubernaculi lentiorem reddit.

§. 537. Viciſſim autem perſpicuum eſt, ſi gubernaculum in oppoſitum ſitum puta in Bd dirigatur, tum eius effectum multo fore debiliorem, ac non nunquam prorſus nullum. Quanqnam enim aqua ex parte pC fluens gubernaculum non ſtringit, eo, quod ſitus Bc directioni pC iam fere eſt parallelus, tamen vis aquae eLd, ſiquidem in gubernaculum impingit, vehementer erit exigua, quoniam in regione B aqua maximam partem eſt tranquilla, et, ſi aqua eLd vllum habet curſum, eum admodum lentum eſſe oportebit. Quo magis enim curſus aquae a curſu naturali Qe deflectit, eo erit tardior, atque ad gubernaculum agitandum debilior. Quin etiam euenire poteſt, vt gubernaculum quantumuis in regionem Bd inclinetur, nullam omnino ab aqua vim ſuſtineat, ſed in aqua tranquilla verſetur. Hanc ob rem igitur in curſu obliquo nauis difficulter in regionem Aq vertetur; hoc eſt curſus obliquitas ope gubernaculi non tam facile augetur, quam diminuitur.

§. 538. Quando igitur nauis in fluuio oblique poſita abripitur, ad quem caſum ratiocinium potiſſimum accommodauimus, tum nauis quidem hanc obliquitatem AGP conſtanter ſine gubernaculi actione conſeruabit, ſi media

directio

directio impetus aquae in partem eAf facti per axem verticalem per centrum grauitatis nauis G ductum transeat: etiamsi interim ad ripam versus q sitam appellatur. At vero nauis facillime hanc obliquitatem vel augendo vel diminuendo amittet, ita vt ad eius restitutionem gubernaculo sit opus. Ex praecedentibus autem manifestum est, si obliquitas casu maior fuerit facta, tum gubernaculi ope eam facillime minorem reddi, atque in pristinum situm restitui posse. Sin autem casu nauis propius ad situm directum sese applicuerit, tum difficulter ea ab hoc situ remouebitur, ac versus q declinabitur, vt pristinam obliquitatem recuperet. Aliter vero res se habet, si media impetus aquae directio non per axem verticalem centrum grauitatis G traiicientem transeat.

§. 539. Si enim media directo impetus aquae propius ad proram A per sectionem verticalem nauis secundum longitudinem AB factam transeat, tum ipsa aquae vis conabitur nauem versus q conuertere, quae ergo vis, nisi sit nimis magna, ope gubernaculi in situm BD directi reprimi poterit. Sin autem media directio impetus aquae in partem eAf allabentis pone centrum grauitatis puppim versus planum diametrale nauis, traiiciat, tum eius vis tendet ad nauem versus Ar conuentendam, qui adeo effectus ope gubernaculi multo minus compesci poterit. Hoc igitur casu nauis mox ad situm directum redigetur, e quo difficulter gubernaculo ad pristinam obliquitatem declinabitur. Si nauis praeterea viribus externis ad motum sollicitetur, tum in hoc iudicio insuper ratio est habenda mediae directionis harum virium atque ipsius motus naui iam impressi; qua de re consuli possunt,

quae

quae in ſuperiori libro de motu nauium propulſarum tradita ſunt.

§. 540. Maxime autem eiusmodi curſus obliquus inſtitui ſolet, ſi naues aduerſus ventum velorum ope propelli debent, eiusmodi enim curſus naui induci nequit, niſi ſimul nauis oblique ſcilicet ſecundum directionem GP progrediatur. Ponamus ergo ventum ex plaga VG ſpirare, et nauem in directione GP progredi, ita vt impetus ſeu reſiſtentia aquae in partem eAf exeratur, cuius mediam directionem primum per ipſum axem G tranſire ponamus. Quodſi ergo vis venti a velis exceptae media directio per eundem axem tranſeat, omnis nauis conuerſio a gubernaculo pendebit. Facile igitur nauis in plagam Ar conuertetur, hoc eſt curſus a vento remouetur; difficillime autem in directionem Aq aduerſus ventum applicatur. Haecque pariter locum habent, ſi mediae directiones tam virium propellentium, quam reſiſtentiae aquae per alium quemcunque axem verticalem ſimul tranſeunt, tum enim earum momentum ad nauem conuertendam euaneſcit, totumque conuerſionis negotium gubernaculo relinquitur.

§. 541. Ponamus iam mediam directionem virium propellentium ad proram A propius incidere, quam mediam directionem reſiſtentiae aquae. Propter aequalitatem igitur harum virium, quae in motu vniformi locum obtinet, nauis in directione Ar conuertetur, qui effectus, quamuis ſit exiguus, per gubernaculum impediri nequit: oporteret enim gubernaculum in ſitum BL declinari, in quo eius effectus eſt vehementer debilis. Euenit hoc incommodum ſi vela anteriora praeualeant poſterioribus, hocque caſu nauis continuo magis a directione venti VG repelletur, aucto

angulo VGA; neque gubernaculi ope ista depulsio a vento impediri poterit. Hoc ergo incommodum aliter tolli non poterit, nisi velis posterioribus maiorem vim tribuendo, vt virium a vento exceptarum media directio propius versus puppim transferatur.

§. 542. Tantopere ergo vel vela posteriora augeantur vel anteriora diminuantur, vt media directio vis venti magis puppim versus vergat, quam media directio resistentiae aquae. Orietur itaque hinc momentum tendens ad nauem in directione A*q* ad ventum conuertendam: quae vis, nisi sit nimis magna ope gubernaculi destrui poterit, dum id in situ BD detinetur. Quodsi autem ab vndis alioue accidente prora A, a vento puta, *r* versus detorqueatur; quoniam gubernaculum per se ineptum est ad hanc remotionem tollendam, id per ipsam vim venti fiet, dummodo gubernaculum in situ aequilibrii B*c* relinquatur. Tantum igitur abest, vt ista velorum dispositio, qua posteriora anterioribus praeualent, damnum afferat, vt per eam potius inertiae gubernaculi, seu difficultati nauem ad versus ventum dirigendi maxime conuenienter occuratur.

§. 543. Incommodum hoc gubernaculi in cursu obliquo, pariter ac eius remedium probe cognitum est nautis; qui bene cauent, ne velis anterioribus nimiam venti vim concedant. Experientia enim ipsos docuit, si velis anterioribus plus iusto vtantur, nauem a vento depelli, neque gubernaculum sufficere ad nauem in debita directione continendam. Eousque igitur vela puppis multiplicant, seu prae his vela prorae contrahunt, donec vim obtineant nauem aduersus ventum dirigentem, quae si casu nauis a vento detrudatur, ipsa par sit naui in debitum si-

ſitum reſtituendae; deficiente hoc caſu gubernaculi miniſterio. Neque tamen nimis vela poſteriora velis anterioribus praeualere debent, ne vis nauem aduerſus ventum vertens tantopere augeatur, vt a gubernaculo eius actio impediri nequeat. Expediet autem hanc praeualentiam quam minimam ſtatui, quae tantum ſufficiat ad gubernaculi defectum emendandum.

§. 544. Quanquam hactenus axem, circa quem gubernaculum conuertitur, verticalem aſſumſimus, tamen facile perſpicitur, eadem valere, tam quae de actione gubernaculi in curſu directo propoſuimus, quam in curſu obliquo, ſiquidem axis ille ſitus non enormiter a ſitu verticali diſcrepat. Atque ſi vllum deprehendetur diſcrimen, id totum in quantitate actionis gubernaculi ad datum angulum declinati verſabitur; hocque nomine alius quoque angulus declinationis reſultabit, ſub quo gubernaculum promtiſſimum exeret effectum. Quamobrem ne hanc partem praetermittamus, in effectum, quem gubernaculum mobile circa axem ad horizontem inclinatum producit diligentius inquiremus; atque in hoc negotio, quo facilius abſolui poſſit, curſum nauis directum aſſumemus, ſimulque aquam in directione ſpinae nauis contra gubernaculum irruere ponemus.

§. 545. Repraeſentet igitur planum chartae ſectionem nauis verticalem ſecundum ſpinam factam, ſitque recta AC horizontalis a prora ad puppim ducta, que ſimul exhibeat directionem aquae in gubernaculum allidentis. Sit recta BD axis ille obliquus, circa quem gubernaculum BHID mobile exiſtat, faciens cum horizontali AC angulum ACB ſuperne obtuſum, infra autem ACD Tab. XVII. fig. 2.

acutum; Sit porro gubernaculum BHID in eodem plano verticali situm, ita vt hoc statu sit in situ aequilibrii vtrinque ab aqua nullam vim sentiens; ex qua momentum ad nauem conuertendam nascatur. Eiusmodi autem situs inclinatus gubernaculo in nauibus actu tribui solet, propterea quod superior nauium pars multum in puppi vltra spinam prominet, ex quo necesse est, vt axis BD deorsum ad proram vergat, atque exterior gubernaculi margo HI fere fiat verticalis, quoniam gubernaculum inferius latius est quam superius. Quando autem in cursu prora nauis magis demergitur quam puppis, inclinatio illa axis BD fit minor.

§. 546. Conuertatur iam gubernaculum BHID ex situ aequilibrii in situm B*bid*, atque si ante termini gubernaculi BH et DI fuerunt horizontales, nunc erunt B*b* et D*i* ad horizontem inclinati, dum extremitates *b* et *i* ascenderunt. Cum igitur temo, quo gubernaculum dirigitur, directionem HB productam sequatur, eius manubrium in naui descendit, dum gubernaculum conuertitur, ex quo necesse est, vt super pauimento fornicato moueatur, cuius medium altius sit, quam latera. Quoniam vero propter alias rationes pauimentum nauis in puppi tam versus proram quam versus latera efficitur decliue, vti motus temonis postulat, veri simile videtur, ob hanc potissimum rationem axem gubernaculi ad horizontem inclinari, quo motus temonis decliuitatem superioris nauis superficiei sequi possit. Debebit ergo ista suprema superficies, super qua temo gyratur, esse superficies coni, cuius axis sit BD.

§. 547. Ad angulum, per quem gubernaculum ex situ aequilibrii est conuersum, metiendum ducantur ex puncto

puncto quocunque axis C in vtroque plano BHID et B*hi*D rectae CG et C*g* ad axem BD normales, comprehendent eae angulum GC*g* declinationi gubernaculi B*hi*D a statu aequilibrii aequalem. Cum enim recta GC sit normalis ad BD, motu rotatorio punctum G in *g* transfertur atque inclinatio duorum planorum mensuratur angulo, quem duae rectae in vtroque plano ad inter sectionem communem normaliter ductae inter se constituunt. Si igitur ex puncto G ducatur recta horizontalis GMN ipsi AC parallela, erunt lineae AC, GC, et GN in eodem plano verticali; fietque angulus CGM aequalis angulo quo axis BD a situ verticali distat, cuius anguli igitur sinus erit $= \frac{CM}{GM}$, et cosinus $= \frac{CG}{GM}$ posito sinu toto $= 1$; vel anguli ACB seu ACD sinus erit $= \frac{CG}{CM}$.

§. 548. Est vero porro GC*g* planum ad axem BD normale et G*g* arcus circuli centro C descriptus, ex quo erit C*g* = CG. Deinde est etiam planum GC*g* in vtrumque gubernaculi situm BHLD et B*hi*D normale, quia normale est ad rectam BC vtrique plano communem. Quodsi ergo in hoc plano GC*g* ex G in C*g* ducatur perpendiculum GL erit haec GL normalis in planum B*hi* D; simul vero $\frac{GL}{CG}$ exprimet sinum anguli GC*g*, quo gubernaculum ex situ suo aequilibrii est remotum. Cum nunc recta GN sit parallela directioni aquae in gubernaculum incurrentis, angulus sub quo aqua in gubernaculum B*hi*D incidit, aequalis erit angulo quem recta MG cum plano B*hi*D constituit; qui angulus aequalis erit angulo CML, ducta ex L ad M recta LM. Cum enim GL sit normalis ad planum B*hi*D angulus GML exprimet inclinationem rectae GM ad planum B*hi*D.

§. 549. Quoniam recta LM in plano BhiD existit erit quoque GL ad ML perpendicularis, ideoque triangulum GLM rectangulum ad L. Hinc anguli GML, sub quo aqua in gubernaculum BhiD incurrit, sinus erit $= \frac{LG}{GH}$, cuius quadrato tota vis, quam aqua in gubernaculum exerit est proportionalis. Cum autem sit $\frac{LG}{GM} = \frac{LG}{CG} \cdot \frac{CG}{GM}$, aequabitur ille sinus producto ex sinibus angulorum GCg et ACD, quorum ille declinationem gubernaculi a statu aequilibrii, hic vero inclinationem axis BD ad horizontem denotat. Vtique igitur minor est effectus gubernaculi circa axem obliquum mobilis, quam circa axem verticalem, idque in ratione sinus totius ad sinum anguli ACD. Ex quo colligitur axem BD a situ verticali admodum parum declinare debere; parua autem inclinatio parum diminuit effectum, quia angulorum a recto non multum descrepantium sinus a sinu toto sensibiliter non differt.

§. 550. Si ergo sinum anguli ACB, quo axis gubernaculi ad horizontem inclinatur ponatur $= r$, et sinus anguli GCg per quem gubernaculum de situ aequilibrii est traductum, sit $= s$, erit sinus anguli, sub quo aqua in gubernaculum BhiD irruit $= rs$: ex quo vis aquae irruentis erit vt $rrss$: scilicet si superficies gubernaculi aquam excipiens ponatur $= hh$, et altitudo debita celeritati aquae $= v$, aequabitur vis aquae ponderi voluminis aquae $= hhrrssv$. Cum autem volumen aquae V aequiponderet ponderi nauis M, erit vis ista aquae $= \frac{Mhhrrssv}{V}$ cuius media directio transit per centrum grauitatis gubernaculi, atque ad eius superficiem est normalis. Sumamus punctum L pro centro grauitatis superficiei gubernaculi, quia recta

LG

LG eſt normalis ad iſtam ſuperficiem, exprimet ea mediam directionem vis aquae gubernaculum vrgentis.

§. 551. Demittatur ex L in CG perpendiculum LP, quod cum futurum ſit normale in planum verticale BHID erit ipſum horizontale. Reſoluatur ergo vis $\frac{Mbbrrssv}{V}$ in laterales ſecundum directiones LP et GP, erit vis in directione horizontali LP, ſi quidem in puncto G applicetur $= \frac{LP}{GL} \cdot \frac{Mbbrrssv}{V} = \frac{Mbbrrssv\sqrt{(1-ss)}}{V}$. ob $\frac{LP}{GL}$ = coſinui anguli LCG. Sit $CL = k$, erit $CG = \frac{k}{\sqrt{(1-ss)}}$; ac, ſi diſtantia puncti C ab axe verticali per centrum grauitatis nauis tranſeunte ponatur $= a$, erit diſtantia puncti G ab eodem axe $= a + \frac{kr}{\sqrt{(1-ss)}}$; vnde momentum vis gubernaculi ad nauem convertendam erit $= \frac{Mbbrrssv\sqrt{(1-ss)}}{V} \left(a + \frac{kr}{\sqrt{(1-ss)}}\right)$; quod itaque eo minus eſt, quo angulus ACD magis a recto diſcrepat atque ſi angulus ACD fuerit ſemirectus, momentum hoc duplo fit minus. Haecque igitur ad effectum gubernaculi circa axem obliquum mobilis cognoſcendum ſufficiunt.

Cap.

⁂)o(⁂

Cap. VII.

DE ACTIONE REMORVM.

§. 552.

In libro ſuperiori, atque etiam in huius praecedentibus capitibus ſatis ſuperque oſtendimus, quantum effectum datae vires nauem ſollicitantes tam ratione motus progreſſiui, quam rotatorii circa axem ſiue horizontalem ſiue verticalem per centrum grauitatis ductum producere debeant. Vires autem naui immediate applicatas eſſe aſſumſimus, ita vt ex earum magnitudine et directione effectus, quem in naui producunt, determinari queat. Quanquam vero remi in ipſis nauibus applicantur, tamen quanta vis exeorum agitatione reſultet ad nauem propellendam, minime liquet; neque enim vis remigum, neque ea vis, quam hypomochlium ſuſtinet, ad nauem propellendam tantummodo impenditur. Quo igitur veram vim, quae ex remigatione oritur ad nauem mouendam, inueſtigemus, a caſibus ſimplicioribus ordiri debemus, qui tandem ad caſum remigationis ſatis complicatum manuducant.

§. 553. Praecipua vis remorum autem a reſiſtentia aquae, quam, dum agitantur, ſentiunt, proficiſcitur; ſi enim aqua ipſorum motui non reluctaretur, vel ſi remi in aere agitarentur, tum perſpicuum eſt nullam vel inſenſibilem vim eſſe orituram ad nauem propellendam. Sin autem aqua maius obſtaculum agitationi remorum offerret, nullum eſt dubium, quin nauis celerius propellatur. Caſus iſte poſterior locum habet, ſi remi non aquae ſed obſtaculo inuincibili innitantur, veluti ripae, vel fundo

maris

maris seu fluuii, vbi experientia testatur hoc modo naues citius moueri, quam si remi per aquam stringantur. Quocirca antequam effectum remorum contra obstaculum mobile cuius modi est aqua, definiamus, conueniet in effectum inquirere, quem remi contra obicem immobilem innitentes producere valeant; hoc enim modo nauem mouendi, quoties occasio permittit, nautae vtuntur, ex quo per se etiam euolui meretur.

§. 554. Ponamus igitur in ripa vel fundo maris fixum esse palum PQ, cui vel funes alligando vel perticas vncosue applicando naues ad motum cieri queant. Si scilicet funis SR palo sit alligatus, isque in R ab hominibus in naui trahatur, nauis vtique ad palum accedet in directione AS. Idem accidet si pertica vnco instructa palo infigatur, similique vi in directione AR trahatur; subit enim pertica hoc casu vicem funis, atque vsurpatur, cum nauis iam tam prope ad palum accesserit, vt vnco apprehendi queat, funium autem vsus ad longiora interualla extenditur, quos lintris ope praemitti paloque alligari vel etiam ancora firmari oportet: hocque modo naues in portubus, fluuiis, et vbicunque occasio postulat, hominum viribus protrahi solent. Homines scilicet funem apprehensum omni qua valent vi versus puppim B ducunt, sicque nauem ad palum PQ admouent, hac ergo operatione cursus a prora ad puppim toties est repetendus, quoad nauis ad locum PQ fuerit perducta.

§. 555. Ad effectum istius hominum vis, qua funem SAR versus puppim protrahunt, inuestigandum, probe notari oportet, vim hominum trahentium esse maiorem, si homines quiescunt, quam si progrediuntur; hoc

enim posteriori casu portio illius vis, quam homines impendunt, in ipsorum cursu consumitur. Homo namque progredi vel currere nequit, quin ad hoc vim insumat, et si tanta celeritate, qua potest, currit, nullam omnino vim ad quicquam trahendum vel trudendum impendere potest. Ponamus maximam celeritatem, quam homo libere currens sustinere potest, debitam esse altitudini α, qua si currat nullam vim in tractionem vel trusionem impendere queat. Sit autem vis, qua quiescens trahere valet, aequalis ponderi p; veri simile est eundem hominem celeritate altitudini v debita progredientem trahere posse vi $= p(1-\frac{v}{\alpha})$: haec saltem hypothesis a veritate tam parum aberrabit, vt error nullius in praxi sit momenti.

§. 556. Cum homo interuallo vnius horae circiter milliare germanicum vnum currens absoluere queat, habebit hoc cursu celeritatem, quanta lapsu grauis ex vno pede Rhenano acquiritur; ita vt futurum sit $\alpha = 1$ pedi. Homo porro quiescens trahendo horizontaliter ingens pondus sustinere potest: quoniam vero in opere continuo indesinenter eandem vim exerere debet, loco vis p non nimis magnum pondus assumere licet; ad summum ergo pro p pondus 50 librarum accipiemus, quod autem iam nimis est magnum, si homo laborem continuo perpeti debeat, conueniet ergo, si opus sine interruptione durare debeat, pro p non maius pondus quam 30 vel 40 librarum substitui: quo in negotio autem diligenter perpendendum est, vtrum homines sint robusti, ac labori adsueti, an debiles. Interim perpetuo tutius est vires hominum nimis paruas existimare.

§. 557.

§ 557. His de viribus hominum aestimandis propositis, ponamus in naui ACDB funem SAR in S fixum a ψ hominibus protrahi, quorum singuli quiescentes horizontaliter trahendo pondus p sustinere valeant. Principio igitur quo omnes trahere incipiunt eorum vis aequiualebit ponderi ψp. Ponamus autem nauem iam esse motum aequabilem consecutam, cuius celeritas debita sit altitudini v; eadem ergo celeritate operarii versus puppim migrabunt, eritque adeo ipsorum vis ad nauem protrahendam non amplius ψp sed $\psi p(1-\frac{v}{\alpha})$; huic igitur vi aequalis erit resistentia quam nauis in isto motu offendit: quae cum sit quadrato celeritatis hoc est ipsi altitudini v proportionalis, ponatur ea $= Rv$, eritque itaque $Rv = \psi p - \frac{\psi p v}{\alpha}$, vnde nascitur $v = \frac{\alpha\psi p}{R\alpha + \psi p}$, quae est altitudo debita celeritati, qua nauis a ψ hominibus tracta promovetur.

§. 558. Ponamus nauem tantam sufferre resistentiam, quantam pateretur superficies plana bb in aqua directe promota; eritque Rv aequale ponderi voluminis aquae bbv, atque si pondus nauis ponatur $= M$ et volumen carinae $= V$, erit vis resistentia $Rv = \frac{Mbbv}{V}$, ideoque $R = \frac{Mbb}{V}$. Hoc valore substituto inuenietur $v = \frac{V\alpha\psi p}{Mbb\alpha + V\psi p}$; cuius radix quadrata exhibebit celeritatem qua nauis progreditur. Cum α sit altitudo vnius pedis, altitudo v in pedibus exprimatur; eritque $250\sqrt{1000\,v}$ spatium, quod nauis vno minuto secundo conficiet in partibus millesimis pedis expressum. Vno minuto primo ergo nauis conficiet spatium $15\sqrt{1000\,v}$ pedum Rhenanorum. Per milliare ergo germanicum quod continet 24000 pedes nauis protrahetur tempore $\frac{1600}{\sqrt{1000\,v}}$ minutorum primorum.

§. 559. Vt hunc motum exemplo illustremus sit pondus nauis M $=$ 640000 librarum erit V $=$ 10000 pedum cubicorum. Sumatur $bb = 100$ pedum quadratorum, positisque $\alpha = 1$ pedi, et $p = 40$ librarum, fiet $v = \frac{\psi}{160+\psi}$ pedum, atque nauis vno minuto primo trahetur per spatium $15 \sqrt{\frac{1000\psi}{160+\psi}}$ pedum. Sit numerus hominum trahentium $\psi = 10$, atque nauis vno minuto primo protrahetur per spatium $= 15 \sqrt{\frac{1000}{17}} = 115$ ped. proxime. Decem igitur homines impendent tres horas cum semisse ad nauem per spatium vnius milliaris germanici protrahendam. Quadraginta autem homines eandem nauem vno minuto secundo protrahent per spatium $= 15 \sqrt{200}$ pedum, 212 pedum, et vnum milliare germanicum conficient tempore vnuis horae cum 53 minutis.

§. 560. Ex hoc exemplo apparet, in nauibus grandioribus fore $\frac{Mbb\alpha}{Vp}$ numerum admodum magnum, quodsi ergo numerus hominum trahentium ψ respectu huius numeri sit valde paruus, tum proxime erit $v = \frac{V\psi p}{Mbb}$. Celeritas ergo nauis, si numerus operariorum ψ fuerit valde paruus respectu numeri $\frac{Mbb\alpha}{Vp}$, tenebit rationem subduplicatam numeri operariorum, ita vt quadruplo plures operarii nauem tantum duplo celerius promouere valeant. Quodsi autem numerus operariorum ψ propius ad numerum $\frac{Mbb\alpha}{V}$ accedat, vel ipsum etiam superet, tum in minori proportione celeritas nauis augebitur quam duplicata operariorum. Si enim numerus operariorum in infinitum vsque augeatur, fiet tantum $v = \alpha$ seu vnius pedis, atque nauis aeque celeriter progredietur, ac homo vacuus nihil gerens migrare valet. Perspicuum enim est naui maiorem celeritatem a hominibus trahentibus

bus induci non posse, quam est ea, qua nullum onus vrgentes liberi ambulare valent.

§. 561. Haec ita se habent, si operarii funem SR simpliciter nuda manu prehendentes protrahant; verum quandoque ad hoc opus machinis vtuntur, quibus quantum proficiatur, inquiramus. Ponamus igitur in naui constitutum esse axem in peritrochio mobilem circa axem C, quo circumacto funis Sa circa cylindrum aC convoluatur, nauisque versus S propellatur. Vires autem hominum applicentur axi in data distantia AC, dum machinam circa axem horizontalem C mobilem ope alius funis AR quem trahunt, circumagunt. Vel quod perinde est, si axis machinae C verticaliter fuerit constitutus, eiusmodi machina in grandioribus nauibus vsurpari solet ad ancoras eleuandas, nauem mouebunt, dum machinam ope vectium CA in A prehensorum in gyrum agunt. Vterque enim modus eodem redit, quoniam operarii celeritatem vectis in A sequi, ac proinde eadem celeritate ambulare debent. Tab. VII. fig. 4.

§. 562. Si igitur, cum nauis iam ope huius machinae a ψ operariis agitatae motum aequabilem in directione aS fuerit nacta, celeritas nauis ponatur debita altitudini v; erit vti vidimus resistentia aquae superanda $= \frac{Mhbv}{V}$, tanta igitur vi fnuem Sa tendi oportet, quare si ratio radiorum AC : aC ponatur $= m:n$, vis funem AR trahens debebit esse $= \frac{Mnhbv}{Vm}$; et quoniam punctum a circumuoluitur celeritate, nauis celeritati aequali $V v$, celeritas puncti A, qua operarii incedere debent erit $= \frac{m\sqrt{v}}{n}$, seu celeritas operariorum debita erit altitudini $\frac{mmv}{nn}$. Hinc eorum

rum vis erit $= \psi p(1 - \frac{mmv}{nn\alpha})$ quae id circo aequalis esse debet vi $\frac{Mnbbv}{Vm}$, quae ad tensionem funis AR requiritur. Ex quo habebitur aequatio $\frac{Mnbbv}{Vm} = \psi p - \frac{mm\psi pv}{nn\alpha}$, quae praebebit $v = \frac{Vmnn\alpha\psi p}{Mn^3\alpha bb + Vm^3\psi p}$.

§. 563. Ex hac expressione intelligitur rationem inter $m:n$ nimis magnam aeque esse damnosam celeri nauis promotioni, ac rationem nimis paruam; siue enim sit $\frac{m}{n} = 0$, siui $\frac{m}{n} = \infty$, vtroque casu celeritas nauis euanescit. Ex quo perspicuum est dari rationem inter m et n finitam, quae naui maximam celeritatem inducat. Ad eam inueniendam ponamus $\frac{m}{n} = z$, atque oportebit hanc expressionem $\frac{V\alpha\psi pz}{M\alpha bb + V\psi pz^3}$ maximam fieri, id quod euenit, si sumatur $z^3 = \frac{M\alpha bb}{2V\psi p}$ siue $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\frac{M\alpha bb}{2V\psi p}}$. Qui valor in expressione ipsius v substitutus dat $v = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4V^2\alpha\psi^2p^2}{M^2b^4}}$, vnde erit celeritas ipsa $\sqrt{v} = \sqrt[3]{\frac{2V\psi p\sqrt{\alpha}}{3Mbb\sqrt{3}}}$, ex qua formula spatium, per quod nauis dato tempore protrahetur, assignari potest.

§. 564. Si volumen V in pedibus cubicis exprimatur erit $M = 64\,V$ librarum: vnde prodit $v = \frac{mnn\alpha\psi p}{64 . n^3\alpha bb + m^3\psi p}$ Sumatur pro p pondus 32 librarum, et cum sit α vnius pedis, exprimatur superficies bb in pedibus quadratis, eritque $v = \frac{mnn\psi}{2n^3mbb + m^3\psi}$ pedum. Quamobrem nauis vno minuto primo protrahetur per spatium $15\sqrt{\frac{1000mnn\psi}{2n^3bb + m^3\psi}}$ pedum; in qua expressione tantum tres insunt quantitates a circumstantiis pendentes, nempe numerus hominum ψ; ratio inter radios machinae seu ergatae $AC : aC = m : n$; ac planum bb, quod in aqua, directe motum, parem

parem cum naui ſuffert celeritatem, Erit ergo bb minor quam ſectio carinae transuerſa, quoniam conuergentia laterum reſiſtentia diminuitur. Satis prope ergo valor bb aeſtimando colligi poterit, qui in noſtra expreſſione ſecundum pedes quadratos determinari debet.

§. 565. Quod ad quantitates ψ et bb attinet, perſpicitur celeritatem nauis ab aucto numero operariorum ψ augeri, contra vero ab aucta reſiſtentia ſeu valore bb diminui. Ratio autem $m:n$ vti vidimns celeritatem aeque augere ac diminuere valet, nauis enim promtiſſime protrahetur, ſi ſtatuatur $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\frac{bb}{\psi}}$, ſubſtitutis valoribus, quos modo aſſumſimus, veritati ſatis conſentaneis. Iſta autem ratione inter m et n obſeruata celeritas nauis debita erit altitudini $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\psi\psi}{b^4}}$ ped. atque ipſa celeritas iſta maxima erit $=\sqrt[3]{\frac{\psi}{3bb\sqrt{3}}}$, ſiue nauis hoc modo vnius minuti primi ſpatio promouebitur per $15\sqrt{333}\,\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\psi\psi}{b^4}}$ pedes ſeu per $273\,\frac{861}{1000}\sqrt[3]{\frac{\psi}{bb}}$ pedes, ſi quidem ſuperficies bb in pedibus quadratis exprimatur.

§. 566. Cum ſit $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\frac{bb}{\psi}}$, intelligitur ſi numerus hominum operantium ψ aequalis fuerit numero pedum quadratorum in plano bb contentorum, tum ob $\frac{m}{n} = 1$ nauem ſine ergatae miniſterio celerrime protractum iri; hocque caſu operarii cum maximo lucro vires ſuas impendunt, ſi funem Sa immediate prehendant ac protrahant. Reliquis caſibus expediet machina, ſeu ergata vti: Si enim, quod ſemper vſu venire ſolet, numerus hominum ψ minor fuerit quam bb, tum prodit $m > n$, ita

ita vt his casibus ergata commodissime vti liceat; cuius ope promtissimus adeo exeretur effectus, si statuatur CA : C$a = \sqrt[3]{hh} : \sqrt[3]{\psi}$. Atque si ista dispositio maxime lucrosa obseruetur, erit pro diuerso operariorum numero eandem nauem trahentium celeritas naui inducta in ratione subtriplicata numeri operariorum.

§. 567. Si nulla machina adhibeatur seu sit $\frac{m}{n} = 1$, erit $v = \frac{\psi}{2hh+\psi}$, sin autem ergata maxime idonea quam descripsimus vsurpetur, erit $v = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\psi\psi}{h^4}}$ quae expressio semper maior est quam illa, nisi sit $\psi = hh$. Illo autem casu nauis vno minuto primo per spatium $15\sqrt{\frac{1000\psi}{2hh+\psi}}$ pedum, hoc vero per spatium $273\frac{861}{1000}\sqrt[3]{\frac{\psi}{hh}}$ pedum promouetur. Vt discrimen clarius percipiatur, ponamus esse $hh = 100$. ped. quadr. atque numerum operariorum $\psi = 10$; nauis igitur sine machina protrahetur per spatium 103. pedum. Sin autem ergata maxime idonea adhibeatur in qua sit CA : C$a = \sqrt[3]{10} : 1 = 21544 ; 10000$, tum nauis vno minuto primo protrahetur per spatium 127. pedum. Ope machinae igitur nauis vno minuto per spatium 24. pedibus maius, et vna hora per spatium 1440. pedibus maius protrahetur quam sine machina, quod discrimen satis est notabile.

Tab. XVII. fig. 3. §. 568. Quae hic de promotione nauis, dum funis SR ab hominibus in R versus puppim B protrahitur, dicta sunt, eadem quoque valent, si loco funis pertica vnco instructa adhibeatur; dum enim vnco palo PQ infixo pertica trahitur, nauis pariter ad palum admouebitur, ac si

ſi funis fuiſſet adhibitus. Quodſi autem pertica RS contra palum applicata in directione RS protrudatur, tum nauis a palo remouebitur, idque eadem celeritate ac ſi aequali ope funis ad palum admota eſſet. Cum enim palus omni motui reſiſtat, vis qua pertica in directione RS truditur eundem praeſtabit effectum, ac ſi nauis pari vi in directione SR propelleretur. Atque ſi numerus hominum perticam trudentium ſit $= \psi$, atque bb ſit planum motu directo eandem reſiſtentiam, quam nauis patiens, idque in pedibus quadratis exprimatur, erit celeritas, qua nauis in directione AR a palo remouebitur, debita altitudini $\frac{\psi}{2bb+\psi}$ pedum.

§. 569. Quando nautae ad fundum aquae pertingere poſſunt, perticam RS ipſi in S oblique infigunt, et contra R huic perticae innitendo nauem in directione ba promouent. Quanta enim vi homo in naui conſtitutus perticae RS incumbit, eamque contra fundum S vrget, tanta vi ipſe homo in directione Rr repellitur. Quatenus autem ab hac vi ſurſum in directione Rt eleuatur, iſte effectus in ſolum hominem redundat, neque nauis alium effectum hinc ſentit, niſi quod eius pondus ea hominis parte, quam pertica ſuſtinet, minuatur. Altera autem vis in directione horizontali Ru tota ad nauem propellendam impenditur, ſiquidem homo contra pauimentum nauis innitendo pedibus hanc vim in nauem transferat. Ad hanc vim determinandam ſit vis, qua homo virgae RS incumbit, $=$ ponderi p, atque anguli REa, quo inclinatio perticae ad horizontem indicatur, ſinus ſit $= m$ coſinus $= n$; hinc per reſolutionem fit vis in directione $Rt = mp$, qua pondus hominis ipſiusque nauis ſubleuatur, Tab. XVII. fig. 5.

altera autem vis Ru qua nauis promouetur erit $=$ np.

§. 570. Vim autem, qua homo perticae in directione RS inniti valet, hoc modo colligere poterimus. Sit pondus hominis proprium $= q$, ac manifestum est, si pertica haberet situm verticalem, tum hominem toto hoc pondere q perticae incumbere posse; perticae ergo inclinatae RS ponderis tantum sui parte mq inniti poterit. At praeter pondus proprium homo pollet vi horizontaliter vel trahendi vel trudendi, quae, si sit in quiete, ponatur $= p$, pro quo pondere ante 30 vel 40 libras assumsimus, sin autem progrediatur celeritate altitudini v debita, erit ea vis $= p(1-\frac{v}{\alpha})$ denotante $\sqrt{\alpha}$ maximam celeritatem, qua homo vacuus currere valet, vbi α est altitudo vnius circiter pedis. Quoniam vero hac vi in perticam oblique agit, eius portionem $np(1-\frac{v}{\alpha})$ in directione RS impendit. Vtraque ergo vi homo perticam in directione RS vrgebit vi $= mq + np(1-\frac{v}{\alpha})$; ac tanta vi homo in directione Rr vrgebitur, si quidem v sit altitudo debita celeritati, qua homo progreditur.

§. 571. Quia autem homo incumbens perticae RS tanta vi, eadem celeritate, qua nauis progreditur, ambulare debet, ponamus v esse altitudinem celeritati nauis iam acquisitae debitam; qua vniformiter iam procedat; atque superficies nauis tantam patiatur resistentiam, quantam superficies plana bb eadem celeritate directe in aqua mota; erit ergo vis ad nauem promouendam requisita $= \frac{Mbbv}{V}$. Nauis autem in directione horizontali Ru propellitur vi $= mnq + nnp(1-\frac{v}{\alpha})$; ex quo habebitur ista aequatio

quatio $\frac{Mbbv}{V} = mnq + nnp - \frac{nnpv}{\alpha}$; quae ergo dat $v = \frac{V\alpha(mnq + nnp)}{Mbb\alpha + Vnnp}$. Cum α fit vnius pedis, fi bb in pedibus quadratis exprimamus, ponamusque $p = 32$ libr. et $q = 128$ libr. (conueniet enim pondera nimis parua accipere) fiet $v = \frac{4mn + nn}{2bb + nn}$ pedibus, atque $15\sqrt{\frac{1000(4mn + nn)}{2bb + nn}}$ dabit numerum pedum vno minuto percurforum.

§. 572. Si plures homines fimili modo perticis innitantur tum nauem vtique celerius propellent; ponamus numerum hominum effe $= \psi$, atque omnes perticis aequaliter ad horizontem inclinatis incumbere; prodibit celeritas nauis vniformis debita altitudini $v = \frac{(4mn + nn)\psi}{2bb + nn\psi}$ ped. Quoniam maximus valor ipfius nn eft $= 1$, patet numerum $nn\psi$ femper fore valde paruum refpectu numeri $2bb$; ex quo erit proxime $v = \frac{(4mn + nn)\psi}{2bb}$: ex cuius confideratione intelligitur, dari certum quendam angulum REa, fub quo vis hominum maximam celeritatem naui inducat. Fit enim ob $nn + mm = 1$ haec formula $4mn + nn$ maximum fi fumatur $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}$, quae dat angulum RE$a$ $= 37°, 59'$; eritque $m = \frac{\sqrt{17} - 1}{\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}}$ et $n = \frac{4}{\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}}$; vnde oritur $v = \frac{(\sqrt{17} + 1)}{4bb} = 1, 2808. \frac{\psi}{bb}$, ita vt hoc modo nauis vno minuto propelli debeat per fpatium $536, 82 \sqrt{\frac{\psi}{bb}}$ pedum. Celerius igitur hoc pacto nauis propellitur quam per tractionem funis horizontalis, quippe qua fub iisdem conditionibus nauis propellitur per fpatium $335, 40 \sqrt{\frac{\psi}{bb}}$ pedum.

§. 573. Hactenus autem non attendimus vires hominum verticales et horizontales ita inter fe comparatas effe oportere, vt per eas perticae eadem obliquitas conferuetur;

tur; cum enim pertica circa S sit mobilis, nisi virium momenta respectu S se destruant, ipsa pertica circa S mouebitur, quo fieret, vt minor pars ad motum nauis impenderetur. Hancobrem debebit esse $nq = mp$; quoniam igitur q ipsum hominis pondus excedere nequit, quod tantum 128 librarum assumsimus; atque vis horizontalis p vltra 40 aut 50 libras accipi nequit, necesse est vt tam $\frac{mp}{n}$ non excedat q, quam $\frac{nq}{m}$ non excedat p. Scilicet si angulus R E a fuerit semirectus et $m = n$, fit $q = p$; hoc ergo casu maior ponderis hominis pars, quam quae aequalis est vi p impendi nequit; eritque adeo tam q quam p tantum 40 circiter librarum. His obseruatis ob $nq = mp$ fiet $mq + np = \frac{p}{n}$; hincque oritur $v = \frac{V\alpha p}{Mb\, \alpha + Vnnp}$, ita vt obliquitas perticae motum nauis eatenus tantum acceleret, quatenus in denominatore terminus $Vnnp$ ob $nn < 1$ minor redditur.

Tab. XVII. fig. 3. §. 574. Proficiscitur vtique iste effectus, quo nauis tam ope funis tracti, quam perticae trusae propellitur, a reactione, quae actioni perpetuo est aequalis. Quanta enim vi funis SR in S fixus trahitur, in directione SR, tanta vi ipse funis retrahit in directione RS, hacque vi nauis, quia est mobilis versus palum PQ vrgetur. Similique modo si RS fuerit virga seu pertica rigida, quae in S applicata trudatur secundum directionem RS, tum eadem tanta vi in directione contraria SR repellet, nauemque a palo remouebit. Quantumuis autem hoc principium reactionis sit certum, tamen genuina ac propria vis nauem immediate mouens in actione pedum hominis trahentis seu trudentis, est sita. Dum enim homo manibus funem

funem in R prehensum versus puppim B trahit, tum pedibus proram versus renititur, quae vis cum immediate naui sit applicata, eam propellit. Manifestum autem est, vtrouis modo actio consideretur, eandem vim resultare nauem mouentem, ita vt alter modus alterum confirmet, atque effectum actionis, quem determinauimus, magis corroboret.

§. 575. Accedamus iam propius ad institutum huius capitis quo actionem remorum in aqua vibratorum inuestigare proposuimus: et ne mobilitas aquae nimiam initio pariat difficultatem, remum ROS non aquae sed obici firmo MN inniti ponamus. Repraesentetur igitur remus linea recta RS quae primum mobilis sit circa punctum fixum S, tum vero etiam hypomochlium O in ora navis sit positum, circa quod, etsi est mobile, ipsa nauis conuerti potest; ita vt primo nauis cum remo motum communem circa S; deinde vero sola nauis motum proprium circa O recipere queat. Trahat remex in R remum in directione RP manibus vi quapiam, atque manifestum est, remigem aequali vi pedibus nauem in directione contraria PR repellere debere. Hoc igitur casu remus in directione RP certa quadam vi ea scilicet quam remex exercet, sollicitabitur. Simul vero nauis in directione contraria PR eadem vi repelletur: quantus igitur effectus ab his duabus viribus ad motum nauis resultet, inuestigari oportet. Tab. XVII. fig. 6.

§. 576. Perspicuum iam primum est, si nauis cum remo vnum corpus inflexile constitueret, ita vt circa O nullus nauis motus oriri queat, quod eueniret si remi pars OR in naui firmiter affigeretur, hoc casu inquam

 per-

perſpicuum eſt, quantacunque vis a remige impendatur, nullum omnino motum oriri poſſe. Alius enim motus tum locum habere nequit praeter rotatorium circa punctum fixum S; at reſpectu huius puncti S momenta duarum illarum virium, inter ſe aequalium et contrariarum, ſe penitus deſtruunt, ita vt ab illis nullus motus circa S oriri queat. Quodſi autem remum tantum loco ſuo fixum ponamus, ita vt alius motus oriri nequeat, niſi rotatorius nauis circa hypomochlium O, tum vis remigis manu remum in directione RP trahentis, ob remum immobilem, nullum omnino effectum producet, vis autem contraria, qua pedibus renititur, nauem circa O ſecundum plagam AEB conuertet, qui motus cognoſcetur ex momento vis PR reſpectu puncti fixi O. Hoc ergo caſu nauis, cuius prora in A, regredietur potius quam progredietur.

§. 577. Dum autem hoc caſu nauis circa punctum fixum O conuertitur in plagam AEO, neceſſe eſt vt punctum O vim ſuſtineat, qnae id prorſum trudere conetur, vti euenit in omni motu rotatorio circa axem fixum. Hancobrem ſi remo mobilitas circa S iterum concedatur, ita vt punctum O fiat mobile, tum illa vis effectum ſuum actu exeret, punctumque O vna cum naui circa S in directione RP circumaget. Inducetur ergo hoc pacto naui duplex motus, primum nempe rotatorius circa hypomochium O in plagam AEB; ac deinde inſuper motus circa punctum fixum S in plagam contrariam BEA, quo duplici motu nauis omnino promouebitur. Cum igitur iſte motus ex duplici motu angulari ſit compoſitus, binique ſint axes in S et O circa quos motus exiſtere queat, inueſtigatio motus nauis hinc oriundi altioris eſt inda-

indaginis, neque ope principiorum hactenus ad motum nauium a datis viribus ortum determinandum adhibitorum definiri poterit: ex quo maiori cura huic inquisitioni erit incumbendum.

§. 578. Sit ergo virga rigida RS mobilis circa axem fixum S, quem perpendicularem ad planum figurae concipiamus, cum hac autem virga in O ita connexum sit corpus AB, vt id circa axem ad planum figurae pariter normalem, qui per O transeat, libere gyrari queat: perspicuum enim est casum nauis, quem finximus, huc redire. Iam antequam vires, quibus corpus actu sollicitatur, atque ad motum incitatur, perpendamus, inquiramus generatim in motum, qui in corpus cadere queat. Ac primo quidem virga RS alium motum praeter angularem circa axem S recipere nequit, perueniat itaque angulo RSr confecto in situm $S o r$, si igitur corpus AB non esset mobile circa O, motum virgae perfectissime sequi deberet, ita vt totum corpus aequali motu angulari circa axem S feratur: puncta scilicet O, R, V, quae hoc casu aeque ad corpus ac virgam pertinent transferentur in o, r, v, ita vt sit $So = SO$; $Sr = SR$; et et $Sv = SV$. Tab. XVIII. fig. 1.

§. 579. Tribuamus nunc corpori AB mobilitatem circa axem O, qui, quia virgae motum necessario sequitur, priori motu translatus est in o. Gyretur ergo interea, dum virga RS motu angulari RSr in situm proximum RSr peruenit, corpus AB angulo quocunque circa axem o; ita vt linea ov, quatenus ad corpus refertur, confecto angulo voV circa axem o perueniat in situm oV. Haecque itaque recta oV alicubi secabit rectam SR productam

ductam in puncto V, hocque punctum V, quatenus ad corpus AB refertur, situm suum prorsus non mutabit; etsi enim motu anguleri circa axem S transfertur in v, tamen motu angulari corporis circa axem O iterum in pristinum locum V restituitur. Cum igitur in hoc motu generali, qui omnes motus possibiles in se complectitur punctum corporis V quiescat, punctumque O in o transferatur, perspicuum est corporis AB motum eundem omnino fore, ac si corpus circa axem fixum V motu angulari OVo ferretur interea, dum virga RS motu angulari RSr circa axem fixum S promouetur.

§. 580. Quoniam igitur corpus AB circa axem fixum V motu angulari OVo transfertur, videamus quanta vi opus sit ad motum hunc in corpore AB generandum. Dum autem corporis punctum O spatiolum Oo percurrit, assignari poterit spatiolum, quod quaevis corporis particula interea absoluere debet; atque hinc vis acceleratrix ex eaque porro vis motrix ad quamuis particulam mouendam determinatur. Erit scilicet vis acceleratrix cuiusvis particulae proportionalis spatiolo percurrendo seu ipsi distantiae ab axe V, eiusque directio normalis erit ad hanc distantiam. Vis acceleratrix autem in massam cuiusque particulae ducta dabit vim motricem. Quodsi ergo singulae istae vires colligantur resultabit vis ipsis omnibus aequiualens, cuius tam quantitas quam directio debet determinari; quae inuestigatio etsi ex principiis staticis potest expediri, tamen ea succinctius absoluetur ex iis, quae supra de motu angulari cuiusuis corporis circa axem fixum tradidimus.

§. 581

§. 581. Quod primum ad directionem istius vis ad motum angularem circa axem fixum V producendum requisitae attinet, ea perpetuo eadem deprehenditur, siue motus sit incitatior siue remissior. Ad eam definiendam considerari debet corporis centrum grauitatis, quod sit in G, ex quo ad axem V ducatur normalis GV, eritque directio illius vis quaesita normalis ad hanc rectam VG productam. Sit massa seu pondus totius corporis AB = M, eiusque momentum inertiae respectu axis per centrum grauitatis G ducti $= Mbb$: quo cognito sumatur in VG producta $GT = \frac{bb}{VG}$; eritque T punctum applicationis vis illius quaesitae; ideoque si ducatur TQ normalis ad VT, erit TQ directio vis, quae in corpore AB motum angularem circa axem V producere valet. Quantitas autem huius vis ex effectu debet colligi, qui cum sit etiamnunc incognitus, ponamus vim istam in directione TQ sollicitantem = Q.

§. 582. Cum autem quantitas huius motus angularis a viribus, quibus corpus actu sollicitatur pendeat, necesse est, vt vis ista Q in directione TQ sollicitans aequiualeat viribus corpus actu sollicitantibus; Quamobrem si loco huius vis Q corpori applicata concipiatur vis aequalis at in contrariam plagam sollicitans, ista vis cum viribus corpus actu sollicitantibus in aequilibrio consistet, seu corpus in perfecta quiete conseruabit; vnde tam quantitas huius vis Q, quam positio axis V, a qua punctum T pendet, determinabitur. Assumo hic autem virgam RS inertiae expertem, ita vt ad eam circa axem S mouendam nulla vi opus sit: si enim inertia remi RS quoque in computum duci debeat, quod deinceps faciemus, etiam vis ad

eum in situm Sr promouendum requisita considerari debet, cuius oposita simul cum ea, quae vi Q opponitur effectum virium actu sollicitantium destruet.

§. 583. Quoniam igitur duplex motus rotatorius possibilis est, nempe circa axes S et O, necesse est vt momenta virium actu sollicitantium respectu horum axium aequalia sint momentis ex vi $TQ = Q$ oriundis respectu eorundem axium. At vis $TQ = Q$ momentum respectu axis O est $= Q . OQ$. sin. A . $OQT = \frac{Q . OQ . HV}{GV}$; atque momentum respectu axis S est $= Q . QS$. sin. A . $TQS = \frac{Q . QS . HV}{GV}$. Illud momentum ergo tendet ad corpus AB circa axem O in sensum AVB conuertendum, hoc vero momentum impendetur ad corpus cum remo circa S in sensum Vv rotandum. Vterque autem effectus reducitur ad rotationem corporis circa axem imaginarium V: atque cognita vi Q et puncto V, motus corporis perinde ex regulis datis definietur, ac si axis V esset fixus. Etsi enim hic axis reuera non est fixus, tamen vis Q corpus ita mouebit, vt punctum V in quiete perseueret. Ideoque corpus ab hac vi pari modo mouebitur, quo moueretur, si omnino esset liberum.

§. 584. Sit iam vis, quam remex exercet ad remum RS in directione RP protrahendum $= p$: atque remex vi aequali et contraria nauem AB pedibus seu ea corporis parte, qua naui inhaeret, retrourgebit, vi scilicet p in directione PR. Harum virium posterior tantum impendetur ad nauem circa axem O rotandam: pro axe autem S ambae simul effectum suum exerent. Cum autem hae duae vires sint aequales et oppositae, se mutuo destruent, ita vt respectu axis S momentum inde oriatur nullum.

nullum. Quamobrem momentum ex vi Q respectu huius axis ortum debet nihilo aequari, vnde fit $\frac{Q.QS.HV}{GV} = 0$. Ex vi autem p nauem in directione PR vrgente oritur momentum respectu axis $O = p.RO$ tendens in sensum AVB, vnde ista resultat aequatio $p.RO = \frac{Q.OQ.HV}{GV}$ ex quibus duabus aequationibus tam punctum V quam vis ipsa Q cognoscetur.

§. 585. Ex priori aequatione intelligitur vel Q, vel QS, vel HV esse oportere $= 0$, at secunda docet nec Q nec HV nihilo aequales esse posse; eritque igitur $QS = 0$; atque recta TQ ad rectam VGT normaliter ducta per ipsum punctum S transibit. Hinc porro erit $OQ = SO$; ideoque $p.RO = \frac{Q.SO.HV}{GV}$. Quia duae habentur incognitae, quantitas vis Q nimirum, et positio puncti V, ponamus $HV = z$; erit $VG = \surd(z^2 + GH^2)$ et $GT = \frac{bb}{\surd(z^2 + GH^2)}$: ergo $VT = \frac{z^2 + bb + GH^2}{\surd(zz + GH^2)}$; hincque $VQ = \frac{zz + bb + GH^2}{z} = VS = z + SH$: ex qua aequatione elicitur $HV = z = \frac{bb + GH^2}{SH}$ indeque $GV = \frac{\surd(b^4 + 2b^2.GH^2 + (GH^2 + SH^2)\, GH^2)}{SH}$. His valoribus inventis vis Q ita definietur vt sit $Q = \frac{p.RO}{SO} \cdot \frac{GV}{HV}$, vnde totus effectus, quem vis remigis producit, absolute potest definiri.

§. 586. Vis remigis ergo eundem in naui producet effectum, ac si, remota axium consideratione, sola nauis sollicitaretur vi $= \frac{p.RO}{SO} \cdot \frac{GV}{HV}$ in directione SL, ita vt producta RS in N angulus LSN aequalis sit angulo HGV. Quare si haec vis SL resoluatur in laterales SM et SN, quarum illa sit ad directionem remi RS normalis, haec vero in directionem remi incidat, fiet vis $SM = \frac{p.RO}{SO}$;

 et

et vis $SN = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH}{HV} = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH . SH}{bb + GH^2}$. Illa iam vis SM est ipsa illa vis, qua remus contra obicem S apprimitur indeque propter reactionem repellitur; quoniam est vis SM ad vim RP vti RO ad SO, vti natura vectis hypomochlio O incumbentis postulat. Altera autem vis SN retrahet nauem versus S; ex quo intelligitur, nisi ea adesset, per vim remigis nauem AB ab obice S retractum iri, vel si remus in S firmiter inhaereat, hypomochlium O de loco suo mutatum iri, nisi punctum remi O naui sit firmiter affixum.

§. 587. Ponamus autem nunc remum inertia ac pondere praeditum, ita vt is sine detrimento virium circa S moueri nequeat. Sit pondus remi $= K$, eius centrum grauitatis in I, atque momentum inertiae $= Kkk$. Sumatur $IK = \frac{kk}{SI}$, ita vt K sit centrum oscillationis remi axi suspensionis S conueniens; ac requiretur vis quaedam R remo in K normaliter puta in directione KF applicanda, quae in ipso motum angularem circa axem S producat. Momentum ergo huius vis erit $= R . KS$, quod diuisum per momentum inertiae respectu axis S nempe per $K(kk + SI^2)$ dabit vim acceleratricem remi angularem $= \frac{R \cdot KS}{K(kk + SI^2)}$. Vis autem acceleratrix angularis nauis circa axem V erit $= \frac{Q . TV}{M(bb + GV^2)}$, quae vires angulares cum sint in ratione angulorum OSo et OVo simul describendorum, seu vt VO ad SO dabunt hanc aequationem $\frac{R . KS . SO}{K(k^2 + SI^2)} = \frac{Q . TV . VO}{M(b^2 + GV^2)}$ siue $\frac{R . SO}{K \cdot SI} = \frac{Q . VO}{M . GV}$ ob $IK = \frac{kk}{SI}$ et $ST = \frac{bb}{GV}$.

§. 588. Quoniam ex hac vi remo applicata nullum nascitur momentum ad axem O relatum; manebit superior aequatio pro isto axe quae erat $p . RO = \frac{Q . OQ . HV}{GV}$.

At

At reſpectu axis S, pro quo a vi remigis nullum momentum reſultat, momenta virium aſſumtarum Q et R ſe mutuo deſtruere debent, quae cum in figura ad eandem partem vergant, erit $R.KS + \frac{Q.QS.HV}{GV} = 0$. Cum autem in aequatione paragraphi praeced: ſit $Q : R = \frac{SO}{K.SI} : \frac{VO}{M.GV}$ erit $\frac{KS.VO}{M.GV} + \frac{QS.SO.HV}{K.SI.GV} = 0$, ſeu $K.SI.KS.VO - M.QS.SO.HV = 0$. Sit vt ante $HV = z$; erit $VO = z + HO$; $VQ = \frac{zz + bb + CH^2}{z}$; et $QS = z + SH - VQ = \frac{z.SH - bb - GH^2}{z}$ quibus ſubſtitutis emergit iſta aequatio $K.SI.KS(z + HO) + M.SO(z.SH - bb - GH^2) = 0$, quae praebet $z = HV = \frac{M.SO(bb + GH^2) - K.SI.KS.HO}{K.SI.KS + M.SO.SH}$; vnde erit $Q : R = \frac{SO}{K.SI} : \frac{z + HO}{M\sqrt{(zz + HG^2)}} = (K.SI.KS + M.SO.SH)\sqrt{(zz + HG^2)} : K.SI(bb + HG^2 + SH.HO)$.

§. 589. Ex valore ipſius $HV = z$ inuento reperietur $QS = \frac{-K.SI.KS(bb + GH^2 + SH.HO)}{M.SO(bb + GH^2) - K.SI.KS.HO}$; quae expreſſio, ſi fuerit affirmatiua, punctum Q citra S cadet, vti figura repraeſentat, hincque cognoſcitur locus applicationis vis Q navem ad motum ſollicitantis. Reſoluatur haec vis, vt ante fecimus in laterales, ac prodibit vis $QW = \frac{Q.HV}{GV} = \frac{p.RO}{OQ}$. At eſt $OQ = OS - SQ = \frac{M.SO^2(bb + GH^2) + K.SI.KS(bb + GH^2 + HO^2)}{M.SO(bb + GH^2) - K.SI.KS.HO}$ vnde vis $QW = \frac{p.M.RO.SO(bb + GH^2) - p.K.RO.SI.KS.HO}{M.SO^2(bb + GH^2) + K.SI.KS(bb + GH^2 + HO^2)}$ et vis $QN = \frac{p.M.RO.SO.GH.SH + p.K.RO.GH.SI.KS}{M.SO^2(bb + GH^2) + K.SI.KS(bb + GH^2 + HO^2)}$.

§. 590. Ex his formulis intelligitur, ſi pondus remi K valde ſit paruum reſpectu ponderis nauis M, tum terminos, in quibus ineſt K ſatis tuto negligi poſſe: atque etiamſi plures remi adhibeantur, tamen omnium ſimul ſumtorum pondus adeo prae pondere nauis M quaſi infinite paruum ſpectari poteſt. Hancobrem ſine ſenſibili

 errore

errore formulis prius inuentis vti poterimus, nauisque motus is erit, qui producitur a duabus viribus SM et SN in puncto S applicatis, quarum huius directio SN in directionem remi incidit, illius vero ad hanc est normalis, erit autem vis $SM = \frac{p \cdot RO}{SO}$ et vis $SN = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{b^2 + GH^2}$. Quae vires cum in nauem aeque agant, ac si esset libera saltem minimo temporis puncto, duplicem motum in naui generabunt, primo nempe motum progressiuum, quo centrum grauitatis in directione ipsi SL parallela promouetur; ac deinde motum rotatorium circa axem verticalem per centrum grauitatis G transeuntem, quo nauis in sensum AVB conuertetur.

§. 591. Si ex altera nauis parte alius remus similiter contra obicem firmum applicetur, atque aequali vi a remige vrgeatur, manifestum est, nauem in directione spinae BA esse progressuram. Acceleratio enim secundum hanc directionem duplicabitur, verum acceleratio in latera vtrinque destruetur. Sit anguli GYH, quem remus cum spina nauis constituit, sinus $= m$, cosinus $= n$; ex vi $SM = \frac{p \cdot RO}{SO}$ orietur vis nauem in directione spinae GA propellens $= \frac{mp \cdot RO}{SO}$; et vis in directione GE ad spinam normali $= \frac{np \cdot RO}{SO}$; praeterea vero inde oritur momentum nauem in sensum AVB conuertens $= \frac{p \cdot RO \cdot SH}{SO}$. Simili modo ex vi $SN = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$ prodit vis nauem in directione GA propellens $= \frac{-np \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$ in directione GE vis $= \frac{mp \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$. Denique indidem nascitur momentum nauem in sensum BVA conuertere conans $= \frac{p \cdot RO \cdot GH}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$.

§. 592. Quodsi autem ex altera nauis parte aequalis remus aequaliter contra obicem immobilem fuerit applicatus,

tus, ita vt ambo cum obicibus S firmiter ſint affixi, tum etiam ſuper hypomochliis in O repere omnino nequeant manifeſtum eſt, in naui nullum omnino motum produci poſſe; margines enim nauis vel propius ad ſe inuicem compeli, vel diduci deberent. Quare vt motus exiſtere queat, remos vel in obicibus S non firmiter affixos eſſe opertet, vel ſpatium ipſis eſt concedendum per quod remi ſuper hypomochlia O repere queant. Ad hoc autem vti vidimus impendetur vis illa SN; ita vt haec vis iam non amplius in computum duci debeat. Ex quo a duobus iſtivsmodi remis nauis in directione GA propelletur vi $= \frac{2mp\cdot RO}{SO}$. Vires ad latera autem GE tendentes pariter ac momenta motum rotatorium generantia vtrinque ſe deſtruent.

§. 593. Acquiſierit iam nauis a duobus huiusmodi remis ſollicitata motum in directione ſpinae BA, ſitque eius celeritas debita altitudini v. Progrediatur hac celeritate temporis elemento centrum grauitatis G per ſpatiolum $Gg = dx$; atque interea hypomochlium ſeu punctum remi O transferetur in o, vt ſit $Oo = \frac{GH\,dx}{GY} = m\,dx$; ex quo punctum R circa S conficiet ſpatium $Rr = \frac{m\cdot SR\cdot dx}{OS}$; circa O igitur motu relatiuo in naui abſoluet ſpatiolum $= \frac{m\cdot RO\cdot dx}{SO}$, ideoque circa O angulum $= \frac{m\,dx}{SO}$ abſoluet: quo angulo angulus GYO diminuetur. Cum igitur huius anguli diminuti ſinus ſit $= m + dm$ et coſinus $= n + dn$ fiet $dm = -\frac{mn\,dx}{SO}$ et $dn = \frac{mm\,dx}{SO}$; vnde erit $\frac{dn}{mm} = \frac{dx}{SO} = \frac{dn}{1-nn}$, et integrando $\frac{x}{SO} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+n}{1-n} + C$. erit ergo $\frac{1+n}{1-n} = e^{\frac{2(x-c)}{SO}}$ et $n = \frac{e^{2(x-c):SO} - 1}{e^{2(x-c):SO} + 1}$; et

$m =$

$m = \frac{2e^{(x-c):SO}}{e^{2(x-c):SO}+1}$. Motus ergo initio, vbi erat $x=0$, situs remi respectu nauis ita erat comparatus vt esset $m = \frac{2e^{c:SO}}{1+e^{2c:SO}}$ et $n = \frac{1-e^{2c:SO}}{1+e^{2c:SO}}$.

Tab. XVIII. fig. 2. §. 594. Ponamus nauem AB initio, vbi remi RS et rs agitari coeperunt situm tenuisse, quem figura repraesentat; euanescente spatio x. Sit anguli BYS sinus $= \mu$ cosinus $= \nu$, fiet $\nu = \frac{1-e^{2c:SO}}{1+e^{2c:SO}}$, hincque $e^{2c:SO} = \frac{1-\nu}{1+\nu} = \frac{\mu\mu}{(1+\nu)^2}$ ita vt sit $e^{c:SO} = \frac{\mu}{1+\nu}$. Cum igitur prora nauis A absoluerit spatium $AX = x$, positio remorum constanter ad obices S et s applicatorum respectu nauis ita immutabitur vt sit $m = \frac{2\mu e^{x:SO}}{e^{2x:SO}(1+\nu)+(1-\nu)}$ et $n = \frac{e^{2x:SO}(1-\nu)-(1-\nu)}{e^{2x:SO}(1+\nu)+(1-\nu)}$ vnde quouis loco obliquitas remorum cognoscitur, donec tandem fiat tanta, vt amplius agere nequeat. Ponamus remos sub simili obliquitate cessare, qua coeperant; cessabunt ergo si fiat $m = \mu$ et $n = -\nu$. Hinc erit $(1-\nu)^2 = e^{2x:SO}(1+\nu)^2$; ideoque $e^{x:SO} = \frac{1-\nu}{1+\nu}$ et $x = SO\, l\frac{1-\nu}{1+\nu}$. Deberet autem vtique esse $x = 2\nu.\, SO$, cuius erroris caussa in hoc versatur, quod quantitatem SO tanquam constantem assumsimus, quae reuera variatur, si punctum S maneat fixum.

§. 595. Sit igitur $SO = y$; erit $dy : Oo = YH : GH$
fig. 1. $= n : m$ hincque $dy = n dx$. Cum igitur sit $dm = \frac{-mndx}{SO}$
fig. 2. $= \frac{-mdy}{y}$ fiet $m = \frac{C}{y}$. Sit motus initio SO $= a$; fiet $\mu = \frac{C}{a}$, ideoque $C = \mu a$, ita vt prodeat $m = \frac{\mu a}{y}$ et $n = \sqrt{(yy-}$

$\frac{\surd(yy-\mu^2 aa)}{y}$). Habetur ergo $\frac{ydy}{\surd(yy-\mu^2\alpha^2)}=dx$, et $x=\surd(yy-\mu^2\alpha^2)C$, + quoniam ſi $x=0$ fit $y=a$, erit $x=\surd(yy-\mu^2 a^2)+\nu a$; quia coſinus anguli BYO ſeu ν eſt negatiuus. Quo circa erit $SO=y=\surd(aa-2\nu ax+xx)$; hincque $m=\frac{\mu a}{\surd(aa-2\nu ax+xx)}$ et $n=\frac{\nu a+x}{\surd(aa-2\nu ax+xx)}$. Remus ergo agere ceſſabit, quando fit $m=\mu$ et $n=-\nu$, hoc eſt percurſo ſpatio $x=2\nu a$ vti rei natura poſtulat. Ceterum prior valor $x=al\frac{1-\nu}{1+\nu}$ ab hoc parum differt, ſi quidem obliquitas remi fuerit valde parua.

§. 596. Cum igitur vis remorum ad nauem mouendam inuenta eſſet $=\frac{2mp.RO}{SO}$; ſi ponatur tota remi RS longitudo $RS=c$, erit $RO=c-y=c-\surd(aa-2\nu ax+xx)$ ob $SO=\surd(aa-2\nu ax+xx)$ durante motu, quoniam remos in S fixos ſuper margine nauis repere aſſumimus. Hinc erit vis illa $=\frac{2\mu ap(c-\surd(aa-2\nu ax+xx))}{aa-2\nu ax+xx}$, ſi quidem remiges conſtanter eandem vim p exerant. At quoniam ſi remus ipſe reſpectu nauis mouetur, remex, niſi ſe ipſum moueat, remum agitare nequit, minorem vim remex in remum exeret, quam ſi quieſceret. Cum igitur remi punctum R in naui circa O feratur per ſpatiolum $=\frac{m.ROdx}{SO}$ dum nauis celeritate $\surd v$ percurrit ſpatiolum dx, erit celeritas remigis debita altitudini $=\frac{mm.RO^2.v}{SO^2}=\frac{\mu\mu aav(c-\surd(aa-2\nu ax+xx))^2}{(aa-2\nu ax+xx)^2}$.

§. 597. Si ergo p denotet vim remigis quieſcentis atque α ſit altitudo debita celeritati, qua motus nullam amplius vim exerere poteſt, vis remigis praeſenti ſtatu aeſtimanda eſt $=p\left(1-\frac{\mu\mu aav(c-\surd(aa-2\nu ax+xx))^2}{\alpha(aa-2\nu ax+xx)^2}\right)$, quae in ſuperiori expreſſione loco p debet ſubſtitui. Offendat iam nauis in motu ſuo tantam reſiſtentiam, quantam ſuper-

 ficies

ficies plana $= ff$ aequali celeritate directe mota; erit resistentia $= \frac{Mffv}{V}$; ex his resultabit nauis acceleratio $Mdv = \frac{2\mu apdx(c - \sqrt{(aa - 2\nu ax + xx)})}{aa - 2\nu ax + xx} - \frac{2\mu^3 a^3 pvdx(c - \sqrt{(aa - 2\nu ax + xx)})^3}{\alpha(a^2 - 2\nu ax + xx)^3} - \frac{Mffvdx}{V}$. Quodsi autem variationem partis remi SO tanquam infinite paruam spectemus vt sit $\sqrt{(aa - 2\nu ax + xx)} = a$ erit $Mdv = \frac{2\mu pdx(c-a)}{a} - \frac{2\mu^3 pvdx(c-a)^3}{\alpha a^3} - \frac{Mffvdx}{V}$.

§. 598. Quo ista hypothesis, qua longitudinem SO $= a$ constantem assumimus, propius ad veritatem accedat, obliquitatem remi BYS ab angulo recto tam parum discrepantem accipi oportet, vt sit $\mu = 1$. Cui hypothesi satisfit, si remi continuo contra nouos obices immobiles applicentur. Quoniam vero, dum remi ad nouos obices applicantur, non agunt, bina remorum paria considerentur, ita vt dum vnum par nauem propellit, alterum par motum sese ad nouos obices applicandi conficiat. Quatuor itaque huiusmodi remi alternatim agentes nauem non magis sollicitabunt, quam si duo continuo agerent; hincque quatuor remigum hoc pacto nitentium effectus in hoc consistet, vt sit $Mdv = \frac{2bpdx}{a} - \frac{2b^3 pvdx}{\alpha a^3} - \frac{Mffvdx}{V}$ posito breuitatis gratia $RO = c - a = b$, existente $SO = a$. Sic igitur ob vires continuo aequabiliter durantes motus nauis quasi vniformiter continuabitur.

§. 599. Hoc pacto, etiamsi nauis motum a quiete inceperit, mox ad motus vniformitatem perueniet; ita vt fiat $dv = 0$. Erit ergo celeritatis, quae a quatuor istiusmodi remis naui inducetur, altitudo debita $v = \frac{2Va^2 b\alpha p}{2Vb^3 p + Ma^3 ff\alpha}$. Ad quam quantitatem cognoscendam notari oportet esse p circiter 40 libr. sumamus autem tantum $p = 32$ libr. α $=$ vni pedi; et si longitudines in pedibus rhenanis exprimantur

primantur fore $M = 64 V$ librarum: ex quibus fiet $v = \sqrt{\frac{a^2 b}{b^3 + a^3 ff}}$ ped. Hinc si a, b, et f, in pedibus rhenanis exprimantur, ex iis quae supra tradita sunt, patet, nauem a quatuor remigibus hoc modo propulsam tempore vnius minuti primi confecturam esse spatium $15 \sqrt{\frac{1000 a^2 b}{b^3 + a^3 ff}}$ pedum.

§. 600. Casus iste, quo remos obicibus immobilibus applicari ponimus, locum obtineret, si aqua remis omnino non cederet, sed, quasi esset conglatiata, vbique obstacula inuincibilia obiiceret; ita tamen vt ipsa nauis in motu suo consuetam resistentiam offendat. Quodsi ergo aqua remis nequicquam cederet, tum quatuor remiges, quorum quisque quiescens vi 32 librarum remum vrgere valeat, nauem tanta celeritate promouebunt, vt vno minuto primo percurrat spatium $15 \sqrt{\frac{1000 a^2 b}{b^3 + a^3 ff}}$ pedum, si quidem remiges per aequalia temporis interualla alternatim remos vrgeant, et nouis obstaculis applicent. Sin autem moram duplo longiorem inter sollicitationes remorum interponant, vti fere in remigatione fieri solet, tum effectus repertus non quatuor sed sex remigibus debebitur. Hincque duodecim remiges vno minuto nauem propellent per spatium $15 \sqrt{\frac{2000 a^2 b}{2b^3 + a^3 ff}}$; et generatim 6ψ remiges per spatium $15 \sqrt{\frac{1000 \psi a^2 b}{b^3 \psi + a^3 ff}}$ pedum.

§. 601. Sit P vis immaterialis, quae nauem directe in directione AX trahendo aeque celeriter promoueat, ac 6ψ remiges, eritque $M dv = P dx - \frac{M ff v dx}{V}$; ideoque motu ad vniformitatem composito $v = \frac{PV}{Mff} = \frac{P}{64 ff}$ ped. si vis P in libris, et superficies ff in pedibus quadratis exprimatur. At a 6ψ remigibus oritur $v = \frac{a^2 b \psi}{b^3 \psi + a^3 ff}$, vnde

de erit $P = \frac{64a^2bff\psi}{b^3\psi + a^3ff}$ librarum. Vnus ergo remex cen- ſendus eſt ad nauis propulſionem conferre vim $= \frac{32a^2bff}{3b^3\psi + 3a^3ff}$ librarum. Quo plures ergo remiges adhibentur eo minor vis a ſingulis ad nauem propellendam naſcitur. Sin autem ſuperficies ff tanta fuerit vt terminus $b^3\psi$ prae a^3ff euaneſcat, tum vis vnius remigis aeſtimanda erit $\frac{32b}{3a}$ librarum; alias autem adhuc erit minor.

§. 602. Quod ad celeritatem nauis a 6ψ remigibus ipſi impreſſam, qua vno minuto primo abſoluit ſpatium $= 15\sqrt{\frac{1000\psi a^2b}{\psi b^3 + a^3ff}}$ pedum; primo apparet celeritatem vtique augeri multiplicato remigum numero; attamen in minore ratione celeritas creſcit, quam ſubduplicata numeri remigum. Deinde quia ff exhibet reſiſtentiam nauis abſolutam, perſpicuum eſt celeritatem fere eſſe in ratione reciproca ſubduplicata reſiſtentiae, quamdiu terminus ψb^3 valde eſt paruus reſpectu termini a^3ff; at niſi hoc fuerit celeritas in minore ratione creſcet; ita vt diminutio reſiſtentiae celeritatem in minore quam ſubduplicata ratione augeat. Tum vero celeritas nauis plurimum pendet a ratione $a:b$ ſeu SO : RO, neque vero longitudo remi ipſa quicquam ad celeritatem confert; ex quo remos tam breues fieri expedit, quam circumſtantiae ceterae permittunt, quo minor virium portio ad ipſos mouendos impendatur.

§. 603. Si ponamus $\frac{SO}{RO} = \frac{a}{b} = z$, erit altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{\psi zz}{\psi + ffz^3}$, vnde intelligitur nimis magnum valorem pro z celeritatem aeque diminuere, ac nimis paruum. Dabitur ergo valor definitus pro z ſubſtituendus, qui naui maximam celeritatem conciliet; quique continetur in hac aequatione $2\psi = ffz^3$, ita vt ſit z $=$

$= \frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}$. Quare ſi haec ratio inter partes remi RO et SO conſtituatur, nauis celerrime promouebitur, atque vno minuto primo conficiet $15 \sqrt{\frac{1000aa}{3bb}}$ pedes $= 273, 86 . \frac{a}{b}$ ped. Quando igitur $2\psi < ff$, tum remi pars SO minor capi debet quam pars RO, ſin $2\psi = ff$ fiet SO = RO, atque ſi numerus remigum tantopere augeatur, vt fiat $2\psi > ff$, tum remi pars SO ſuperare debet partem RO quo magis ſcilicet numerus remigum augetur, eo maior ſtatui debet ratio inter SO:RO idque in ratione ſubtriplicata.

§. 604. Cum igitur ſumta $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}$, nauis a 6ψ remigibus celerrime promoueatur et vno minuto primo ſpatium $273, 86. \sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}$ pedum abſoluat, erit eius celeritas vt $\sqrt[3]{\frac{\psi}{f}}$ hoc eſt celeritas erit in ratione ſubtriplicata directa numeri remigum et ſubtriplicata inuerſa reſiſtentiae abſolutae ff. Quamobrem quo naui eidem duplo maior celeritas imprimatur numerus remigum octuplo maior ſtatui debet, manente eadem reſiſtentia; ſimul vero ratio $\frac{SO}{RO}$ duplo maior eſt capienda. Per diminutionem porro reſiſtentiae celeritas nauis quoque augetur; vt autem ex hoc capite celeritas duplo maior reddatur oporteret reſiſtentiam octuplo fieri minorem; tanta autem diminutio non eſt in noſtra poteſtate. Si profunditas carinae ſit C pedum, latitudo carinae, vti ſupra oſtendimus maior eſſe debet quam 2C; ſit ea vt ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis eo maior euadat, = 3C, erit ſectio carinae transuerſa maxima circiter = 2CC, atque ſi reſiſtentia multum diminuatur, fiet propemodum $ff = CC$.

§. 605. Si igitur $\frac{SO}{RO} = \frac{a}{b}$ eam habeat rationem quam nauis celerrimus motus postulat, ex hac sola ratione celeritas nauis absoluta definietur: percurret enim nauis vno minuto primo $273,86. \frac{a}{b}$ pedes; atque vna hora $16431, 6. \frac{a}{b}$ ped. Quare cum milliare germanicum contineat 23627 ped, seu vt nauis vna hora milliare germanicum absoluere queat, debet esse $\frac{a}{b} = \frac{23627}{16431} = \frac{10}{7}$ proxime. Hinc fiet $\frac{2\psi}{ff} = \frac{1000}{343}$, et $2\psi = \frac{1000}{343}. ff$, hincque numerus remigum ad hoc requisitorum $6\psi = \frac{3000}{343} ff = 8\frac{3}{4} ff$. Quodsi ergo profunditas carinae sit vnius pedis, remiges 9 vna hora milliare germanicum conficient; sin profunditas carinae f sit duorum pedum, remiges 35 requirentur ad vnum milliare vna hora absoluendum. Et, si sit $ff = 16$, vt fere in triremibus euenire solet, remiges 140 valebunt nauem vna hora per milliare germanicum promouere: remiges autem 18 eandem nauem vna hora per semissem vnius milliaris propellent.

§. 606. In instituto igitur nostro hoc iam sumus consecuti, vt motum nauis ab actione remorum oriundum determinare valeamus, si aqua remis obstaculum immobile obiiceret, quod eueniret, si vel aqua vtrinque circa nauem esset congelata, vel series palorum vtrinque firmiter esset constituta, quibus remi applicari queant. Quae hypothesis etsi a veritate abhorret, tamen ad motum nauium a vibratione remorum in aqua ortum determinandum maxime est accommodata atque viam dilucide sternit; dum enim aqua motui remorum cedit, effectum a cessione oriundum facillime cognoscemus, si ante effectum remota penitus cessione inuestigauerimus. Ceterum hypothesis

thesis, quam hactenus tractauimus, etiam in se spectata non omni caret vtilitate; saepenumero enim euenit, vt remos contra obices firmos applicare liceat; hisque ideo casibus quantus naui motus imprimatur, operae pretium erat inuestigare: ne vllus nauium propellendarum modus esset praetermissus.

§. 607 His igitur praeparatis progrediamur ad effectum remorum more solito in aqua vibratorum determinandum, qui etsi in motu naui impresso consumitur, tamen initio nauem a vi quacunque externa in eodem situ firmiter detineri ponamus. Contineatur itaque nauis A B constanter in quiete, ita vt vis a remis orta ipsi nullum motum inducere valeat; sitque COD remus mobilis circa hypomochlium in naui fixum O, qui a remige in naui sedente ac secundum directionem CR ad remum continuo normalem ita vibretur, vt extremitates C et D circa O arcus circulares CR et DS describant. Versetur autem portio quaedam remi DE in aqua, cuius planities in situ verticali contra aquam impellatur atque cum vis aquae normaliter agat ad superficiem remi, erit directo vis aquae a remo exceptae horizontalis, quae vtique ad nauem promouendam maxime est accommodata. Assumimus autem superficiem remi, qua aquam stringit, planam, ita vt per lineam rectam COD repraesentari queat. Tab. XVIII. fig. 3.

§. 608. Perductus sit remus iam in situm ROS, ibique sit eius motus, quo in situm proximum rOs promouetur tantus, vt celeritas puncti R per spatiolum Rr debita sit altitudini u, ex qua cuiusuis remi puncti celeritas cognoscetur. Nempe si dicatur OS $= a$, OR $= b$; et interuallum quodcunque OX $= x$, erit celeritas puncti

S =

$S = \frac{x\surd u}{b}$, et celeritas puncti $X = \frac{x\surd u}{b}$. Quo autem inuestigatio haec latius pateat, atque ad nauem motam facile traduci queat, aquam non quiescentem sed motam ponemus, ita vt in directione HX spinae nauis AB parallela fluat celeritate debita altitudini v; tantam enim celeritatem aqua habere censenda est, si nauis in directione spinae BA progrediatur celeritate altitudini v debita. Quodsi autem aqua euanescente v quiesceret, remi particula $Xx = dx$ contra aquam directe impingeret celeritate $\frac{x\surd u}{b}$, ex qua vis resistentiae aquae determinari deberet.

§. 609. Quoniam vero aqua ipsa mouetur in directione HX celeritate $\surd v$, atque remi elementum Xx in directione KN normali ad OX celeritate $\frac{x\surd u}{b}$, quaeri debet celeritas aquae relatiua, qua in remum impingit. Ad hoc capiatur XM ad XN vt $\surd v$ ad $\frac{x\surd u}{b}$, et compleatur parallelogrammum XNLM: cuius diagonalis LX exhibebit tam directionem quam celeritatem, qua aqua in remi particulam Xx irruet. Si enim remus tanquam quiescens consideretur, eiusque motus in aquam transferatur: tum si aqua nullum haberet motum proprium, particula aquae L moueri censenda esset in directione LM normali ad remum, celeritate $\frac{x\surd u}{b}$, ob motum autem proprium eadem aquae particula L progredietur in directione LN parallela ipsi AB celeritate $\surd v$. Quare vtroque motu particula L describet diagonalem LX, et remi elementum Xx percutiet secundum hanc directionem celeritate quae erit ad $\surd v$ vel $\frac{x\surd u}{b}$ vti est LX ad LN vel LM.

§. 610. Sit anguli BYO quem directio remi RS cum directione spinae nauis AB constituit sinus $= m$, cosinus

cosinus $= n$ posito sinu toto $= 1$, erit anguli LNX sinus $= n$ cosinus $= m$. Hinc cum sit $NX = \frac{x\sqrt{u}}{b}$ et $NL = \sqrt{v}$ reperietur $LX^2 = v + \frac{xxu}{bb} - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b}$, quae exprimet quadratum celeritatis, qua aqua in remi elementum Xx incurrit. Incurrit autem sub angulo LXO, cuius sinus aequatur cosinui anguli LXN. At anguli LXN sinus est $= \frac{n.LN}{LX} = \frac{n\sqrt{v}}{\sqrt{(v - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b} + \frac{xxu}{bb})}}$; eiusque ergo cosinus seu sinus anguli incidentiae LXO $=$ $\frac{\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v}}{\sqrt{(v - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b} + \frac{xxu}{bb})}}$. Cum igitur vis aquae impellentis est vt quadratum celeritatis, atque vt quadratum sinus anguli incidentiae coniunctim, erit ea vt $(\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$; quae quantitas ducta in remi elementum in quod agit, dabit volumen aquae; cuius pondus aequatur vi aquae impingentis.

§. 611. Ponatur latitudo remi in loco X, qua aquam percutit $= y$, erit elementum remi illam vim sentiens $= ydx$; vnde vis, quam hoc remi elementum ab aqua suffert, aequiualebit ponderi aquae, cuius volumen est $= ydx(\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$. Huiusque vis directio ad remum est normalis. Notari autem oportet, vbique esse debere $\frac{x\sqrt{u}}{b} > m\sqrt{v}$, alioquin enim remus non parte anteriori aquam percuteret, sed aqua in parte postica in ipsum irrueret. Quoniam vero alicubi angulus BYO existit rectus, ideoque $m = 1$, necesse est vt sit $\frac{x\sqrt{u}}{b} > \sqrt{v}$; hincque $x > \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. Initium ergo remi X quo aquae immergi incipit magis ab O remotum esse oportet, quam interuallo $\frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$; si quidem directio RS sit horizontalis; sin autem RS, vti necessario euenit, ad horizontalem

ſit inclinata, tum iſte terminus $\frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ inſuper in ratione coſinus anguli inclinationis remi ad ſinum totum augeri debet.

Tab. XVIII. fig. 4. §. 612. Conſideremus remum hoc modo agitatum ſeorſim, ſitque EEFF eius planities verticalis, qua aquam percutit, ponatur $OC = f$; $CD = b$; $EE = g$, $OX = x$, et $YY = y$, erit vis, quam elementum $YyyY$ ab aqua ſuſtinet $= y\,dx\,(\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$, exiſtente $OC = f > \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. Quoniam iam omnium harum virium directiones ſunt inter ſe parallelae, ad planum nempe EF normales; vis ipſis omnibus aequiualens aequabitur ſummae omnium. Ponamus, vt hanc ſummam inuenire queamus, EF eſſe lineas rectas, atque $FF = k$, erit $k-g : b = y-g : x-f$, hincque $y = g + \frac{(k-g)(x-f)}{b} = g - \frac{f(k-g)}{b} + \frac{x(k-g)}{b}$. Quod ductum in $dx\,(\frac{xxu}{bb} - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b} + mmv)$ et integratum dabit $\frac{(gb-fk+fg)}{b}(\frac{x^3u}{3bb} - \frac{mxx\sqrt{uv}}{b} + mmvx) + \frac{(k-g)}{b}(\frac{x^4u}{4bb} - \frac{2mx^3\sqrt{uv}}{3b} + \frac{m^2vxx}{2}) - \frac{(gb-fk+fg)}{b}(\frac{f^3u}{3bb} - \frac{mff\sqrt{uv}}{b} + m^2fv) - \frac{(k-g)}{b}(\frac{f^4u}{4bb} - \frac{2mf^3\sqrt{uv}}{3b} + \frac{m^2ffv}{2})$. Ponatur iam $x = f + b$ ac prodibit vis totalis.

§. 613. Ne expreſſio tantopere prolixa prodeat, ponamus $k = g$, ita vt figura remi EEFF ſit parallelogrammum rectangulum, eritque vis a remo excepta $= gb\,((ff + g + \frac{1}{3}bb)\frac{u}{bb} - m(2f + b)\frac{\sqrt{vu}}{b} + mmv)$. Quoniam vero neceſſe eſt, vt ſit $f > \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, ponatur $f = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}} + i$, atque reperietur vis illa remi $= \frac{gbu}{bb}(ii + ib + \frac{1}{3}bb)$. Ad cuius mediam directionem inueniendam, quae ſit in S, quaeratur momentum reſpectu O, quod erit $= \int yx\,dx\,(\frac{xxu}{bb} - \frac{2mx\sqrt{vu}}{b} + mmv)$, cuius integrale ob $y = g$ eſt $= \frac{gx^4u}{4bb} - \frac{2mgx^3\sqrt{vu}}{3b} + \frac{mmgx^2v}{2}$ ac pro toto remo $= gb((f^3 + \frac{3}{2}f^2b + fbb + \frac{1}{4}b^3)\frac{u}{bb} - \frac{2m}{b}(ff + fb + \frac{1}{3}bb)\sqrt{vu} + mmv(f + \frac{1}{2}b))$

$= gb$

$= gb((ii + ib + \frac{1}{3}bb)\frac{m\sqrt{vu}}{b} + (i^3 + \frac{3}{3}i^2b + ibb + \frac{1}{4}b^3)\frac{u}{bb})$

vnde fit $OS = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}} + \frac{i^3 + \frac{3}{2}i^2b + ibb + \frac{1}{4}b^3}{ii + ib + \frac{1}{3}bb} = f + \frac{\frac{1}{2}i^2b + \frac{2}{3}ibb + \frac{1}{4}b^3}{ii + ib + \frac{1}{3}bb}$

§. 614. Ponamus remum eousque nempe in C aquae immergi, vt sit $OC = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, atque erit $i = 0$; vis igitur a remo excepta aequabitur ponderi aquae, cuius volumen est $= \frac{gb^3u}{3bb}$, huiusque vis media directio erit in puncto S sumto $OS = f + \frac{3}{4}b$, seu $CS = \frac{3}{4}CD$. Quamobrem si tota remi vltra hypomochlium O longitudo OD ponatur $= a$, et remi latitudo sit $= g$, tum erit $f = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ et $b = a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. Hinc erit vis remi RS in aqua vibrati $=$ Tab. XVIII. fig. 3.
$\frac{gu}{3bb}(a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3$; seu si pondus huic vi aequale desideretur erit id $= \frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3$ denotante M pondus nauis, et V volumen partis eius in aqua versantis; quae vis remum in directione ad ipsum normali ST vrgebit, sumta $OS = \frac{3}{4}a + \frac{mb\sqrt{v}}{4\sqrt{u}}$. Debet autem ante omnia esse $a > \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, alioquin secundum hypothesin nulla eius pars aquam vibraret.

§. 615. Sit iam vis, quam remex quiescens ad remum trahendum exercere valet $= p$, erit vis, qua remum RS iam motum sollicitabit $= p(1 - \frac{u}{\alpha})$, existente α altitudine vnius pedis circiter, vti supra notauimus, et p pondere, pro quo 32 libras accepimus. Quod si nunc remex remum motu vniformi trahat, ad quam vniformitatem remum mox a principio perducet, nisi pondus remi sit valde magnum, fiet $pb(1 - \frac{u}{\alpha}) = \frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3(\frac{3}{4}a + \frac{mb\sqrt{v}}{4\sqrt{u}})$. Quamobrem si angulus BYO fuerit rectus, vel ab eo non multum discrepet, vti in motu remorum vulgo fieri solet, erit $pb(1 - \frac{u}{\alpha}) = \frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}})(\frac{3}{4}a + \frac{b\sqrt{v}}{4\sqrt{u}}$

$\frac{b\sqrt{v}}{4\sqrt{u}}$): ex qua aequatione si valor ipsius u eruatur, atque in $\frac{Mgu}{3Vbb}(a-\frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3$ substituatur, prodibit vis, quam remus ab aqua in directione ST sustinet.

§. 616. Quoniam vero hic remi pars, quae in aqua vibratur, in se non est determinata, sed tam ex ipsius remi, quam aquae celeritate determinatur, in praxi eiusmodi mensura obseruari difficulter poterit. Quamobrem vt propius ad praxin inuestigationem nostram accommodemus, simulque calculo consulamus, in quo rem vero
Fig. 5. proxime expediuisse sufficit; concipiamus ergo remum palae formem ODFF cuius planities DFF aquam findat; sit eius centrum grauitatis, seu potius media directio vis aquae in puncto S, quod in planitiei puncto medio satis tuto accipere licet, siquidem longitudo DF prae OS sit valde parua. Ponatur OS $=a$, sitque latitudo remi FF $=g$ et longitudo DF $=b$, erit iam ex praecedentibus vero proxime vis, quam iste remus vibratus ab aqua sustinet $=gb\,(\frac{a\sqrt{u}}{b}-m\sqrt{v})^2$, seu pondus huic vi aequiualens est $=\frac{Mgb}{V}\,(\frac{a\sqrt{u}}{b}-m\sqrt{v})^2$; quae vis in puncto S normaliter ad planitiem DFF erit applicata.

Fig. 3. §. 617. Posita igitur portionis remi aquam findentis longitudine $=b$, et latitudine $=g$, remus ROS in S vrgebitur in directione ST vi $=\frac{Mgb}{V}\,(\frac{a\sqrt{u}}{b}-m\sqrt{v})^2$ cuius momentum respectu hypomochlii O erit $=\frac{Magb}{V}\,(\frac{a\sqrt{u}}{b}-m\sqrt{v})^2$. Huic ergo momento aequale esse debet momentum vis remigis, quod est $=pb(1-\frac{u}{\alpha})$, ita vt habeatur ista aequatio $pb(1-\frac{u}{\alpha})=\frac{Magb}{V}\,(\frac{a\sqrt{u}}{b}-m\sqrt{v})^2$, ex qua si valor ipsius u eruatur, innotescet vera vis, quam remex exercet. Si igitur obliquitas remi tam fuerit parua vt sinus

ſinus m ſinui toti aequalis aeſtimari queat, tum erit pb $(1-\frac{u}{\alpha})=\frac{Magb}{V}(\frac{a\sqrt{u}}{b}-\sqrt{v})^2$; et vis ST quam remus ſuſtinet erit $=\frac{Mgb}{V}(\frac{a\sqrt{u}}{b}-\sqrt{v})^2$ vel $=\frac{pb}{a}(1-\frac{u}{\alpha})$.

§. 618. Si igitur nauis ſtatuatur mobilis ab hac vi ST actu mouebitur, ſimul vero conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem. Quod ſi autem in altera nauis parte alius remus aequali vi vibretur, tum vires nauem rotantes ſe mutuo deſtruent, atque vis nauem in directione ſpinae BA propellens duplicabitur ita vt ea futura ſit $=\frac{2pb}{a}(1-\frac{u}{\alpha})$. Haec autem vis non continuo aget, cum remiges tempore opus habeant, cum ad remum ex aqua poſt finitam vibrationem extrahendum tum iterum in aquam immittendum, ita vt triens tantum temporis totius fere ad nauem promouendam impendatur. Hancobrem ſex remigum more ſolito operantium effectus huc redibit, vt nauis conſtanter vi $=\frac{2pb}{a}(1-\frac{u}{\alpha})$ propellatur: atque ſi 6ψ remiges operi ad moueantur, erit vis ab illis exerta $=\frac{2\psi pb}{a}(1-\frac{u}{\alpha})$.

§. 619. Ponamus iam reſiſtentiam, quam nauis motu ſuo directo in aqua ſuffert, tantam eſſe, quantam ſuperficies plana ff, directe in aqua mota aequali celeritate patitur; atque ſit motus nauis iam ad aequabilitatem perductus, ita vt celeritas ipſius debita ſit altitudini v. Habemus ergo caſum ſupra tractatum, quo aquam contra nauem quieſcentem celeritate $\sqrt{v}$ aduenire poſuimus; ſcilicet remi in naui hac celeritate mota in aqua ſtagnante eundem praeſtabunt effectum, ac ſi nauis quieſceret, et aqua celeritate $\sqrt{v}$ in directione HX afflueret. Reſiſtentia ergo quam nauis iſta celeritate ſecundum directionem

BA mota patitur erit $= \frac{Mffv}{V}$, cui, quia motus aequabilis ponitur, aequalis esse debet vis remorum, quorum numerus sit 6ψ, quae est $= \frac{2\psi pb}{a}(1 - \frac{u}{\alpha})$, ita vt habeatur ista aequatio $\frac{Mffv}{V} = \frac{2\psi pb}{a}(1 - \frac{u}{\alpha})$.

§. 620. Ad motum nauis igitur a 6ψ remigum opere ortum definiendum habemus has duas aequationes $\frac{Mffv}{V} = \frac{2\psi pb}{a}(1-\frac{u}{\alpha})$ et $pb(1-\frac{u}{\alpha}) = \frac{Magh}{V}(\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v})^2$; quae vt ad simpliciorem formam redigantur, ponamus longitudines in pedibus rhenanis exhiberi, et cum sit $\alpha = 1$, $M = 64\,V$ libr. et $p = 32$ libr. obtinebimus has aequationes $ffv = \frac{\psi b}{a}(1-u)$ et $b(1-u) = 2agh(\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v})^2$; ex quarum posteriori oritur $\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v} = \sqrt{\frac{b(1-u)}{2agh}}$ et $\sqrt{v} = \frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{\frac{b(1-u)}{2agh}} = \sqrt{\frac{\psi b(1-u)}{aff}}$. Erit ergo $\frac{aau}{bb} = \frac{b(1-u)}{a}(\sqrt{\frac{1}{2gh}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2$. Sit $\frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = z$ erit $z^3 u = (1-u)(\sqrt{\frac{1}{2gh}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2$ hincque $u = \frac{(\sqrt{\frac{1}{2gh}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}{z^3 + (\sqrt{\frac{1}{2gh}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}$ et $1 - u = \frac{z^3}{z^3 + (\sqrt{\frac{1}{2gh}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}$ et consequenter $v = \frac{\psi zz:ff}{z^3 + (\sqrt{\frac{1}{2gh}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}$.

§. 621. In hac expressione designat gh planitiem remi, qua aqua finditur; intelligitur ergo quo maior fuerit ista planities eo maiorem prodituram esse nauis celeritatem; et, si amplitudo ista remi fiat infinita, tum prodit $v = \frac{\psi zz}{ffz^3 + \psi}$, quae est ea ipsa expressio, quam invenimus posito obstaculo, cui remus applicatur, immobili. Hoc ipsum natura rei postulat, nam facta amplitudine remi infinita, resistentia aquae erit infinita, ideoque obici immobili aequiualebit. Minor ergo remi superficies naui minorem inducet celeritatem; ex quo videatur maxime ex-

expedire remos quam amplissimos confici. Verumtamen aliae rationes nimiam remi amplitudinem dissuadent; quoniam quo amplior remi extremitas efficitur, eo fortiorem ac grauiorem remum facere oportet, quo fit, vt difficilius vibretur indeque propulsio nauis debilitetur.

§. 622. Tantam igitur remis amplitudinem tribui oportet, quantam reliquae circumstantiae permittunt; has autem si consulamus, deprehendemus remo ab vno homine agitando maiorem commode amplitudinem tribui non posse, quam vnius pedis quadrati, ita vt futurum sit $gh = 1$ et $\sqrt{\frac{1}{2gh}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071$ proxime. Si materia simul leuior ac fortior reperiatur, vt remus minus grauis eandem vim sustinere queat, tum vtique consultum erit maiorem amplitudinem conficere; qua in re experientia aptissimam suppeditabit decisionem: dummodo hoc praeceptum teneatur, vt remi circa extremitatem, qua aquam vrgent, tam fiant ampli quam fieri potest; vt scilicet non solum satis sint firmi sed etiam ab vno homine facile tractari possint. Si plures homines vni remo destinentur, tum pari modo ex eorum vi tam firmitas remi, quam pondus et amplitudo determinabuntur.

§. 623. Sit $\sqrt{\frac{1}{2gh}} = \gamma$, et $\sqrt{\frac{\psi}{ff}} = \delta$, erit vt ostendimus $\gamma = 0,7071$ quam proxime; retinebimus autem valorem generalem γ; vt conclusiones latius pateant: erit ergo $v = \frac{\delta\delta zz}{z^3 + (\gamma+\delta)^2}$ ped. Maxima ergo ab eodem remigum numero, et eadem remorum amplitudine, naui celeritas imprimetur, si fuerit $z^3 = 2(\gamma+\delta)^2$, et $z = \frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}$. Definitur ergo hac aequatione ratio maxime idonea inter partes remi SO et RO, ad

nauem

nauem celerrime promouendam. Si $\gamma = 0$, prodit casus supra tractatus, vbi remos obstaculis immobilibus applicari posuimus; praesenti igitur casu, dum aqua remo cedit ratio SO ad RO maior oritur, ideoque pars remi exterior SO respectu partis interioris RO maior statui debet, quam in praecedente hypothesi erat definita: et quo minor remo amplitudo tribuitur ob auctum valorem γ, ratio $\frac{SO}{RO}$ augebitur.

§. 624. Quoniam est $\gamma = 0$, $7071 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, erit $2\gamma\gamma = 1$, hincque $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(1 + 2\delta\sqrt{2} + 2\delta\delta)}$; quae fractio cum sit vnitate maior, indicat perpetuo in remis partem exteriorem SO superare debere partem intra nauem sitam RO; quantumuis exiguus sit remigum numerus 6ψ. Aucto autem remigum numero 6ψ, ratio SO ad RO magis augeri debet. Si ergo pro quouis pede quadrato, quem superficies ff resistentiam absolutam exhibens continet, sex remiges constituantur, vt sit $\psi = ff$, fiet $\delta = 1$ eritque $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2})} = 1,79963 = \frac{9}{5}$ proxime. Hoc ergo casu debet esse SO:RO $= 9:5$. Si numerus remigum ab hac regula paulisper discrepet, vt sit $\psi = ff(1 \pm \theta)$ existente θ fractione quam minima, erit $\delta = \sqrt{(1 \pm \theta)} = 1 \pm \frac{\theta}{2}$ et $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2} \pm (2 + \sqrt{2})\theta)} = \frac{9}{5} \pm \frac{2\theta}{5}$; seu erit SO: RO $= 9 \pm 2\theta : 5$ proxime, si fuerit numerus remigum $= 6(1 \pm \theta)ff$.

§. 625. Hinc definiri potest absolute maxima celeritas, quam datus remigum numerus, remis secundum praecepta data institutis, naui imprimere valet. Cum enim

sit

fit $v = \frac{\delta\delta zz}{z^3 + (\gamma+\delta)^2}$, et $z = \sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}$, fiet $v = \frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ $= \frac{2\delta\delta \,.\, RO}{350}$ ped. Hinc nauis vno minuto primo propelletur per spatium $387, 3\,\delta\sqrt{\frac{RO}{SO}}$ pedum, hoc est per spatium $\frac{345\delta}{\sqrt[3]{(\gamma+\delta)}}$ pedum. Si igitur sit numerus remigum 6ψ $= 6ff$, ita vt sit $\delta = 1$, et ob $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}$, nauis tempore vnius minuti propelletur per spatium $387, 3\sqrt{\frac{5}{9}} = 288\frac{3}{4}$ pedum. Vna igitur hora nauis percurret spatium 17323 pedum, quod spatium aliquanto bessem vnius milliaris germanici superat. Si esset $\gamma = 0$, atque remi obstaculis inuincibilibus applicentur, tum casu $\psi = ff$ nauis vna hora spatium 20700 pedes absolueret.

§ 626. Ex his porro numerus remigum determinari poterit, qui nauem dato tempore per datum spatium promouere valeant. Oporteat scilicet nauem tempore vnius horae per spatium n pedum propelli; ac fiet $n = \frac{20700\,\delta}{\sqrt[3]{(\gamma+\delta)}}$ $= \frac{20700\delta}{\sqrt[3]{(\delta+\sqrt{\frac{1}{2}})}}$ ob $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}$, sit $n = 20700\,m$. fiet $\delta^3 = m^3\delta$ $+ m^3\sqrt{\frac{1}{2}} = m^3\delta + m^3 \,.\, 0, 7071$. Quodsi spatium vna hora absoluendum sit vnum milliare, fiet $m = 1, 1414$ eritque adeo $\delta^3 = 1, 48701\,\delta + 1, 05148$; vnde reperitur $\delta = 1, 4822 = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$. Habebitur ergo $\psi = 2, 1967\,ff$, et remigum requisitorum numerus erit $= 13, 18\,ff$. Vt autem nauis vna hora tantum 20700 pedes conficiat, ex aequatione $\delta^3 = \delta + 0, 7071$ oritur δ $= 1, 2531 = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$, hincque $\psi = 1, 57\,ff$, numerus ergo remigum ad hoc iter absoluendum requisitus est 6ψ $= 9, 42\,ff$.

§. 627. Ponamus numerum remigum $6\psi = nff$ erit $\delta = \sqrt{\frac{\psi}{ff}} = \sqrt{\frac{n}{6}}$; et $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{\frac{4n}{3}} + \frac{n}{3})}$; nauisque vna hora propelletur per ſpatium $23238 \sqrt{\frac{n}{6}} \cdot \frac{RO}{SO} = \frac{9487 \sqrt{n}}{\sqrt[3]{(1+\sqrt{\frac{n}{3}})}}$ pedum, ſubſtituendis ergo loco n ſucceſſiue numeris definitis erit

numerus Remigum	Ratio RO : SO	nauis vna hora propellitur per ſpatium.
ff	1000 : 1355	8150 ped.
2 ff	1000 : 1488	10995 ped.
3 ff	1000 : 1587	13042 ped.
4 ff	1000 : 1668	14690 ped.
5 ff	1000 : 1738	16092 ped.
6 ff	1000 : 1800	17323 ped.
7 ff	1000 : 1855	18426 ped.
8 ff	1000 : 1907	19432 ped.
9 ff	1000 : 1954	20358 ped.
10 ff	1000 : 1998	21217 ped.
11 ff	1000 : 2040	22022 ped.
12 ff	1000 : 2080	22786 ped.

§. 628. Quoniam igitur remis ad celerrimum nauis motum inſtructis naui a 6ψ remigibus imprimitur celeritas debita altitudini $v = \frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2}(\gamma+\delta)^2}$, videamus quanta vis requiratur, quae nauem directe ſecundum BA trahens ipſi eandem celeritatem inducat. Sit vis haec quam quaerimus $= P$ librarum: fiet $P = \frac{Mffv}{V} = 64ffv$ libr. ſi f et v in pedibus exprimantur, erit ergo $v = \frac{P}{64ff}$, quae ipſi

ipſi $\frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ aequalis poſita dabit P $= \frac{128\delta\delta ff}{3\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$; tantam ergo vim 6ψ remiges exerunt; vis igitur vnius remigis valebit $\frac{64\delta\delta ff}{9\psi\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ libr. $= \frac{64}{9\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ libr. propter $\frac{\psi}{ff} = \delta\delta$. Cum iam ſit $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}$, erit vis vnius remigis $= \frac{64 \cdot RO}{9 \cdot SO}$ libr. Si igitur ſit $RO = SO$, vis vnius remigis valebit $7\frac{1}{9}$ libr; at ſi $SO = 2RO$ valebit tantum ſemiſſem $3\frac{5}{9}$ libr.

§. 629. Ex his intelligitur vires ſingulorum remigum, quatenus tendunt ad nauem propellendam, ſine reſpectu ad nauem habito determinari non poſſe, etſi remiges aequales vires ad remos vrgendos impendant. Vidimus autem cum ſemper debeat eſſe $SO > RO$, maximam vim vnius remigis ad nauem propellendam non vltra 7 libras extendi poſſe, quae autem ſi nauis celerius progrediatur adhuc multo fit minor. Scilicet ſi nauis vna hora integrum milliare germanicum abſoluat, tum ob $\frac{SO}{RO} = 2,1246$, vnius remigis vis valebit $3\frac{1}{3}$ libr; ita vt de 32 libris, quas remex quisque ad remum impendit, tantum $3\frac{1}{3}$ librae ad nauem propellendam impendantur. Celeritate igitur nauis cognita, ex tabula praecedente innoteſcit ratio inter SO ad RO; hincque definietur vis vnius remigis ad nauem propellendam: ſi quidem remi modo maxime lucroſo ſint inſtructi.

§. 630. Quemadmodum haec ex principiis indubitatis deduximus, ac litteris vniuerſalibus tales tribuimus valores, qui a praxi parum diſcrepant, ſic etiam concluſiones, quas inde ſumus conſecuti, experientiae ſatis ſunt conſentaneae. Quod vt clarius appareat, exemplum ab experientia petitum ſecundum theoriam curatius euoluamus. Perhibetur autem eiusmodi exemplum in Comment. Acad.

 Scient.

Scient. Parisinae A. 1702, quo Vir Celeb. Daniel Bernoulli vsus est in Hydrodynamica; triremis scilicet Galera dicta a 260 Remigibus propulsa singulis minutis secundis $7\frac{1}{3}$ pedes absoluebat: tenebat autem in remis pars exterior SO ad partem interiorem RO rationem duplam, atque omnium remorum planities, quibus aqua findebatur, aestimabatur 130 pedum quadratorum. Resistentia triremis non assignatur, videtur autem ea tanta assumi posse, quantum patiatur superficies 20 ped. quadratorum aequali celeritate directe in aqua mota.

§. 631. Primum discrimen statim in eo versatur, quod in hoc exemplo singulis remigibus tantum semissis pedis quadrati, quo aquam percutiunt, tribuatur; dedimus autem hactenus vnicuique remo planitiem vnius pedis quadrati; quare hoc casu erit $gh = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2gh}} = \gamma = 1$. Mirum autem non est, hic minorem planitiem vni remigi respondere, quoniam plures remiges vni remo erant admoti, atque planities remorum non in eadem ratione augeri potest, si enim casu duorum remigum vni remo admotorum velimus superficiem remi duplicare, pondus remi in ratione $2\sqrt{2}:1$ augeri deberet; ex quo duo homines multo maiorem difficultatem offenderent ad hunc remum mouendum, quam vnus homo ad remum simplicem. Etsi ergo, si quisque remex remum vibrat, assumi potest $gh = 1$, in casu praesente tamen valor ipsius gh erit $= \frac{1}{2}$.

§. 632. Quoniam numerus remigium est 260, fiet $\psi = 43\frac{1}{3}$; hinc erit ob $ff = 20$ circiter, $\frac{\psi}{ff} = 2,1666$ etc. haec autem quantitas, quia pendet a vi cuiusque remigis, quae valde est variabilis, et modo intendi modo remitti potest, non tam exacte definiri potest, sed si

ſi remiges maiorem vim intendant, augetur, contraque diminuitur. In caſu praeſente videntur remiges omnibus viribus labori incubuiſſe, quia ſingulis minutis 24 vibrationes abſoluiſſe perhibentur, ita vt quantitas $\frac{\psi}{ff}$ maiorem valorem habuiſſe videatur. Sumamus ergo $\frac{\psi}{ff} = 2,56$ vt ſit $\sqrt{\frac{\psi}{ff}} = 1,6$; et $\sqrt{\frac{1}{2gh}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}} = 2,6$. Porro ratio partium cuiusque remi SO : RO erat dupla ideoque $\frac{a}{b} = z = 2$, hincque ex §. 620, reſultat altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{10,24}{14,76}$ ped. qua ergo nauis ſingulis minutis primis abſoluet 395 ped. hincque ſingulis minutis ſecundis $6, \frac{7}{12}$ ped.

§. 633. Experientia autem docuit iſtam nauem ſingulis minutis confeciſſe $7\frac{1}{5}$ pedes, quamobrem neceſſe eſt vt vel remiges multo maiorem vim exercuerint, quam quidem aſſumſimus, vel reſiſtentia nauis minor fuerit quam quae plano 20 ped. quadr. deſignari queat. Maiorem ergo fuiſſe oportet valorem $\frac{\psi}{ff}$, quam poſuimus, quamobrem eius valorem a poſteriori inueſtigemus. Sit ergo $\sqrt{\frac{\psi}{ff}} = \delta$ erit $v = \frac{4\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}$; cui vno minuto ſecundo reſpondet ſpatium $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4000\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}}$ ped; quod cum eſſe debeat $7\frac{1}{5}$ ped. erit $\frac{36}{5} = \sqrt{\frac{250\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}}$, ex qua fit $\delta = 1,7964$ hincque $\frac{\psi}{ff} = 3,2367$. Ita vt fuerit vel ff tantum 13, 39 ped. quadr. vel remiges maiorem vim quam 32 libr. impenderint vel vtrumque.

§. 634. Cognito iam per experientiam valore $\delta = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$, inquiramus, quantum ratio $\frac{SO}{RO} = z$, quae erat $= 2$ diſcrepet ab ea, quae naui maximam celeritatem ceteris paribus imprimere valet. Scilicet cum ſit $v = \frac{\delta\delta zz}{z^3 + (i+\delta)^2}$

 fiet

fiet haec expreſſio maxima, ſi fuerit $z^3 = 2 (1 + \delta)^2 = 15$, 638, quae praebet $z = 2, 5 = \frac{SO}{RO}$. Quare ſi remorum pars exterior ad interiorem habuiſſet rationem vt 2, 5 ad 1 ſeu vt 5 : 2, tum iidem remiges nauem adhuc celerius, idque cellerrime, quantum eadem vi licet, promouiſſent. Hoc enim caſu foret $v = \frac{20229}{23457}$ ped. qua celeritate minuto ſecundo abſoluuntur pedes 7, 3416. minuto primo autem 440, 496, et hora vna 26429, 76 ped. Ratione autem $\frac{SO}{RO} = 2$ nauis vno minuto ſecundo fecit 7, 2 ped. vno minuto primo 432 ped. et vnius horae ſpatio 25920 ped.

§. 635. Exemplo hoc non ſolum theoria, quam de actione remorum expoſuimus, confirmatur, verum e- etiam ipſa praxis huius theoriae ope ad maiorem perfectionis gradum euehi poterit. Per experientiam quidem iam ſatis prope ii caſus, quibus maximum minimumue locum habet, ſunt eruti, atque etiam in exemplo allato ratio SO : RO = 2 : 1 non tantopere a vera et maxime lucroſa 5 : 2 differt, quam videatur: dum enim plures remiges vni remo erunt admoti, omnes non in eodem puncto remum ſollicitare poſſunt, ex quo pars remi interior RO minor aeſtimari debet, quam reuera eſt, qua diminutione ratio SO : RO a ratione 5 : 2 parum diſcrepabit. Neque tamen ſola praxis ſine ſubſidio theoriae verum cuiusque maximi minimiue gradum ſupeditare valet; hincque theoria perpetuo praxi quantumuis iam excultae inſigne adiumentum ac lucrum afferet.

§. 636. Quoniam igitur in agitatione remorum conſueta tam exigua portio virium, quas remiges exerunt, ad nauis promotionem impenditur: eo quod duas temporis, qua

qua vnaquaeque agitatio abſoluitur, partes in eleuatione remorum eorumque noua applicatione conſumunt, vnamque tantum partem remos in aqua vibrant. Quo fit vt etiam in hoc temporis articulo non ſolum multum de vi ſua perdant, antequam remum ad motum aequabilem perducant, ſed etiam maximam partem remum oblique percutiant, quoniam vtrumque effectum remi vehementer debilitant. Primum igitur duae tertiae partes totius vis a remigibus exertae inutiliter pereunt; ac deinde quauis agitatione motus de nouo generari debet; neque enim motus in praecedente agitatione genitus, quicquam ad ſequentem confert, quin potius motus ante productus totus deſtrui debet, quod ſine virium diſpendio fieri nequit. Ex quo mirum non eſt de 32 libris, quas cuique remigi tribuimus tantum $3\frac{1}{3}$ libras ad nauis propulſionem redundare.

§. 637. Incommodum hoc practici quoque iam pridem ſenſerunt, et hancobrem alium remigandi modum propoſuerunt, quo remi in rotam diſpoſiti motu continuo in gyrum agantur. Qui modus vtique, ſi commode ad praxin accommodari poſſet inſigni gauderet praerogatiua prae modo ſolito. Primo enim omnis vis, quae continuo ad rotam circumagendam impenditur, perpetuo remos contra aquam impellit, neque vllo tempore vis omnino inutiliter collocatur. Deinde motus rotae ſemel impreſſus non ſolum non deſtrui debet, ſed etiam non parum confert ad vniformitatem conſeruandam; ita vt nulla virium portio inutiliter impendatur, niſi quae ad frictionem ſuperandam requiritur. Quo igitur intelligatur, quantum emolumentum ab huiusmodi machina ſit expectandum, effectum ab ea oriundum calculi ope determinabimus; ſimul Tab. XVIII. fig. 6.

mul

mulque inuestigabimus, quomodo ea ad institutum maxime idonea sit instruenda.

§. 638. Ad vtrumque igitur nauis latus constituta sit rota mobilis circa axem horizontalem O, cuius radii OA, OB, OC, etc. sint totidem remi cylindro O tam firmiter affixi, quantum vis ab ipsis sustinenda postulat. Vnus quisque ergo radius erit remus, cuius superficies, qua aquam percutit, cum axe horizontali in eodem plano est sita. Sit IK superficies aquae cui remorum partes $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, $E\varepsilon$, $F\zeta$ immergantur, atque circum agatur rota in sensum ABCDE, vt palae remorum submersae in aquam impingant. A vi igitur aquae nauis secundum directionem KI promouebitur; vires enim, quam singulae palae sustinent, eundem in naui propellenda effectum exerent, ac si in directionibus parallelis in centro grauitatis nauis essent applicatae.

§. 639. Ponamus nauem motum vniformem iam esse adeptam, quo in directione K progrediatur celeritate altitudini v debita; quem motum si in aquam transferamus, perinde erit, ac si nauis quiesceret, atque aqua in directione IK celeritate eidem altitudini v debita incurreret. Sit quoque celeritas, qua rota in plagam ABCD conuertitur, aequabilis et altitudo debita celeritati, qua extremitates radiorum A, B, C, etc. circumaguntur, sit $= u$. Longitudo radiorum OA ponatur $= a$, et latitudo palarum aquam findentium sit $= g$. Teneat pala OD situm verticalem, sitque eius pars δ D aquae submersa $= b$, ita vt huius palae superficies aquam percutiens sit $= gb$; erit pars radii extra aquam eminens $O\delta = a - b$. Consideretur iam alia quaecunque pala OC cum verticali OD an-

angulum constituens COD, cuius sinus sit $= m$, cosinus $= n$, posito sinu toto $= 1$, erit $\frac{O\delta}{O\gamma} = n$, et $O\gamma = \frac{a-b}{n}$ hincque pars aquam findens γC erit $= a - \frac{a+b}{n} = \frac{b-(1-n)a}{n}$, quae motu angulari circa O in aquam impingit.

§. 640. Consideremus huius palae elementum quodcunque X, in aqua versans, cuius ab axe O distantia sit $OX = x$. Hoc ergo punctum in directione ad OC normali XN mouebitur celeritate $= \frac{x\sqrt{u}}{a}$; tantaque celeritate aqua in hanc palam incurreret in directione NX, si aqua non haberet motum propium. At cum ob motum nauis aqua moueatur in directione HX celeritate $\sqrt{v}$; sumto $XN = \frac{x\sqrt{u}}{a}$, capiatur $XM = \sqrt{v}$, et compleatur parallelogrammum XMLN, cuius diagonalis LX tam directionem quam celeritatem, qua aqua in X incurrit, representabit. Erit autem vis aquae incurrentis, vt quadratum celeritatis XL^2 et quadratum sinus anguli incidentiae LXC coniunctim, ex quo vis aquae erit vt $XL^2 (\sin. LXC)^2$. Est vero $\sin. LXC = \cos. LXN$, et $(\sin. LXC)^2 = 1 - (\sin. LXN)^2$ et propter $\sin. LXN = \frac{LN\,\sin.\,LNX}{XL}$, erit $(\sin. LXC)^2 = 1 - \frac{LN^2 (\sin.\,LNX)^2}{XL^2}$.

§. 641. Cum iam sit anguli XNL sinus $= m$, et cosinus $= n$, erit $XL^2 = v + \frac{xxu}{aa} - \frac{2nx\sqrt{vu}}{a}$; et $LN^2 (\sin. LNX)^2 = mmv$; hincque oritur vis aquae in elementum X vt $(\frac{x\sqrt{u}}{a} - n\sqrt{v})^2$, quae si ducatur in elementum $g\,dx$ dabit volumen aquae $= g\,dx\,(\frac{x\sqrt{u}}{a} - n\sqrt{v})^2$, cuius pondus aequale est vi aquae impingentis. Directio huius vis normalis est ad superficiem palae, ex eaque ergo oritur vis nauem horizontaliter promouens $= ng\,dx\,(\frac{x\sqrt{u}}{a} - n\sqrt{v})^2$

$n\sqrt{v})^2 = ngdx\,(\frac{xxu}{aa} - \frac{2nx\sqrt{uv}}{a} + nnv)$, quae integrata dat $\frac{ngx^3u}{3aa} - \frac{nngxx\sqrt{uv}}{a} + n^3gxv - \frac{g(a-b)^3u}{3nnaa} + \frac{g(a-b)^2\sqrt{uv}}{a} - nng(a-b)v$. Ponatur $x = a$, ac prodibit vis a tota pala Cγ ad nauem promouendam orta $= \frac{ngau}{3} - nnga\sqrt{uv} + n^3gav - \frac{g(a-b)^3u}{3nnaa} + \frac{g(a-b)^2\sqrt{uv}}{a} - nng(a-b)v$.

§. 642. Praeterea vero vis aquae circumactionem rotae impedit, qui effectus propterea vi hominum compensari debet. Determinanda haec ex momento, quod ista vis respectu axis O praebet, quod est $= gxdx\,(\frac{xxu}{aa} - \frac{2nx\sqrt{uv}}{a} + nnv)$. Huius integrale est $= \frac{gx^4u}{4aa} - \frac{2ngx^3\sqrt{uv}}{3a} + \frac{nngxxv}{2} - \frac{g(a-b)^4u}{4n^4aa} + \frac{2g(a-b)^3\sqrt{uv}}{3n^2a} - \frac{g(a-b)^2v}{2}$. Ponamus $x = a$, vt prodeat totum momentum a pala Cγ ortum circumactioni rotae resistens $= \frac{gaau}{4} - \frac{2ngaa\sqrt{uv}}{3} + \frac{nngaav}{2} - \frac{g(a-b)^4u}{4n^4aa} + \frac{2g(a-b)^3\sqrt{uv}}{3nna} - \frac{g(a-b)^2v}{2}$. Hic autem vbique notandum est esse debere $\frac{x\sqrt{u}}{a} > n\sqrt{v}$; oportet ergo esse $\frac{(a-b)\sqrt{u}}{na} > n\sqrt{v}$ seu $a-b > \frac{nna\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. In situ ergo verticali OD debet esse $a-b > \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ seu $\frac{O\delta}{OD} > \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$; quod, si euenerit in omni situ obliquo simul erit $\frac{x\sqrt{u}}{a} > n\sqrt{v}$.

§. 643. Ponamus iam rotam duodecim radiis esse instructam, vti figura repraesentat, ac pro binis radiis OC et OE verticali OD proximis erit $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pro sequentibus OB et OF erit $n = \frac{1}{2}$. Numerus igitur palarum aquam simul percutientium pendebit ab eleuatione axis O supra aquae superficiem; quae tanta esse debet, vt sit $\frac{O\delta}{OD} > \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$: sumamus ergo $O\delta = a-b = \frac{1}{2}a$, vt sit $b = \frac{1}{2}a$, atque si radius OD sit verticalis, praeter eum duo tantum remi proximi OC et OE in aqua versabuntur. Etsi autem motu rotae quatuor radii in aquam porriguntur,

riguntur, tamen quia tum oblique mouentur, vis eorum tuto aequalis aestimari potest vi trium, quorum medius est verticalis; ita vt rota perpetuo eandem vim exerere sit censenda.

§. 644. Pro radio igitur verticali O D est $n = 1$, ex eoque ad nauem propellendam vis nascitur $\frac{7gau}{24} - \frac{3ga\sqrt{uv}}{4} + \frac{gav}{2}$. Pro radio vero O C est $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ex eoque nascitur vis ad nauem propellendam $= \frac{gau}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\right) - \frac{ga\sqrt{uv}}{2} + \frac{gav}{8}(3\sqrt{3} - 3)$, quae cum eadem sit pro radio O E nauis a tribus radiis O C, O D et O E atque adeo a tota rota propelletur vi $= \frac{gau}{3}\left(\frac{13}{24} + \sqrt{3}\right) - \frac{7ga\sqrt{uv}}{4} + gav\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\right)$ quae sumtis in fractionibus decimalibus valoribus proximis abit in $0,757905\, gau - 1,75 . ga\sqrt{uv} + 1,049037 . gav$. Haec igitur vis nauem propellens aequalis esse debet resistentiae, quam nauis in aqua patitur, quae vt supra assumsimus sit $= ffv$, ita vt iam habeatur vna aequatio $ffv = 0,757905 . gau - 1,75 . ga\sqrt{uv} + 1,049037 . gav$, qua ratio inter v et u continetur, vt sit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1,1545 + \sqrt{(1,31942 . \frac{ff}{ga} - 0,05126)}$.

§. 645. Momentum iam vis aquae a radio verticali OD ortum est $= \frac{15gaau}{64} - \frac{7gaa\sqrt{uv}}{12} + \frac{3gaav}{8}$: at momentum a radio O C vel O D ortum ob $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ erit $= \frac{2gaau}{9} - \frac{gaa\sqrt{uv}}{9}(3\sqrt{3} - 1) + \frac{gaav}{4}$, cuius duplum ad praecedens momentum ex radio verticali O D ortum dabit momentum totale, quo rota ab aqua impeditur $= \frac{391}{576} ga^2 u - gaa\sqrt{uv}\left(\frac{13}{36} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{7gaav}{8}$; seu in fractionibus decimalibus $0,67882 . gaau - 1,51581\, gaa\sqrt{uv} + 0,875 . gaav$, quod ductum in $\frac{M}{V}$ dabit momentum ponderis, cui

 aequa-

aequale eſſe debet momentum virium rotam circumagentium. Denotat autem M pondus totius nauis, et V volumen carinae, ita vt ſi V in pedibus cubicis et M in libris exprimatur ſit $\frac{M}{V} = 64$.

§. 646. Ex relatione autem inter u et v ſupra inventa reperitur $\frac{u}{v} = 1,28160 + 1,31942. \frac{ff}{ga} + 2,3090 \sqrt{(1,31942. \frac{ff}{ga} - 0,05126)}$, ex qua ſi valores loco u et $\sqrt{u}$ in momento nunc inuento ſubſtituantur, prodibit hoc momentum $= \frac{Mgaav}{V} (0,89565. \frac{ff}{ga} + 0,05158 \sqrt{(1,31942. \frac{ff}{ga} - 0,05126)})$. Quae formulae, ſi ff fuerit multo maius quam ga ob terminum $0,05126$ valde paruum multo fieri poſſunt ſimpliciores; fiet nimirum $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1,1545 + 1,14866. \frac{f}{\sqrt{ga}}$. et $\frac{u}{v} = 1,28160 + 2,65225. \frac{f}{\sqrt{ga}} + 1,31942. \frac{ff}{ga}$; hincque porro momentum a vi aquae ortum et motui rotae contrarium erit $= \frac{Mgaav}{V} (0,05925. \frac{f}{\sqrt{ga}} + 0,89565. \frac{ff}{ga})$.

§. 647. Ponamus iam rotam hanc ope eiusmodi ergatae circumagi, vt dum ergata ſemel conuertitur, rota faciat n reuolutiones. Sit longitudo vectium quibus ergata circum agitur $= b$, atque numerus hominum ergatam voluentium ponatur $= \theta$, qui numerus ante erat $6\,\psi$. Celeritas igitur hominum ſe habebit ad celeritatem rotae in extremitate D, quae eſt $= \sqrt{u}$, in ratione compoſita ex ratione $1 : n$ et ratione $b : a$, ex quo celeritas hominum erit $= \frac{b\sqrt{u}}{na}$, et altitudo huic celeritati debita $= \frac{bbu}{nna^2}$. Hinc ſi vis, quam quisque homo quieſcens valeat exerere ponatur $= p$, erit vis qua tanta celeritate progrediens exercere valet $= p(1 - \frac{bbu}{nna^2\alpha})$ denotante α altitudinem vnius pedis

pedis momentum ergo omnium hominum ad ergatam circumagendam erit $= \theta pb(1 - \frac{bbu}{nna^2\alpha})$, quod ad axem rotae translatum fit $= \frac{\theta pb}{n}(1 - \frac{bbu}{nna^2\alpha})$.

§. 648. Quoniam vero ad vtramque nauis partem vnam eiusmodi rotam collocamus, vis aquae tam abſoluta, qua nauis propellitur, quam momentum inde ortum duplicari debebit. Duplum igitur vis illius abſolutae ſupra (644) aequare debuiſſemus ipſi ffv, vel ipſam vim huius ſemiſſi $\frac{1}{2}ffv$, vnde ſcribendo $\frac{ff}{2}$ loco ff, orietur $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1,1545 + \sqrt{(1,31942.\frac{ff}{2ga} - 0,05126)} = 1,1545 + 1,14866.\frac{f}{\sqrt{2ga}}$ quam proxime, et $\frac{u}{v} = 1,2816 + 2,65225.\frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,31942.\frac{ff}{2ga}$. Momentum vero quod vtraque rota ab aqua coniunctim ſuffert erit $= \frac{2Mgaav}{V}(0,05925.\frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565.\frac{ff}{2ga})$, cui aequale eſſe deberet momentum virium ſollicitantium, ſi nulla eſſet frictio ſuperanda.

§. 649. Cum igitur frictio in machina tantopere compoſita ſit admodum notabilis, eo quod tam axis rotae quam axis ergatae frictionem patiantur, momentum impedimentorum augeri debet. Addamus ergo ad momentum illud ab aqua ortum frictionem cuius momentum ad axem rotae relatum, ab vtraque rota ſit $= 2Fa$, atque ſi aggregatum momento virium ſollicitantium aequale ponamus, habebimus hanc aequationem. $2Fa + \frac{2Mgaav}{V}(0,05925.\frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565.\frac{ff}{2ga}) = \frac{\theta pb}{n} - \frac{\theta pb^3 v}{n^3a^2\alpha}(1,2816 + 2,65225.\frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,31942.\frac{ff}{2ga})$ ex qua obtinetur altitudo celeritati nauis debita $v = (\frac{\theta pb}{n} - 2Fa):$ $\frac{2Mgaa}{V}$

$\frac{2Mgaa}{V}(0,05925 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565 \cdot \frac{ff}{2ga}) + \frac{\theta p b^3}{n^3 a^2 \alpha}(1,2816 + 2,65225 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,3194 \cdot \frac{ff}{2ga})$ vnde ipſa nauis celeritas poteſt determinari.

§. 650. Quo haec expreſſio tractabilior reddatur, ponamus $\frac{b}{n} = z$; ſitque breuitatis gratia $\gamma = 0,05925 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ag}} + 0,89565 \cdot \frac{ff}{2ga}$ et $\delta = 1,2816 + 2,65225 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ag}} + 1,3194 \cdot \frac{ff}{2ag}$, erit autem accuratius nullo neglecto termino: $\gamma = 0,44782 \cdot \frac{ff}{ga} + 0,05158 \sqrt{(0,65971 \cdot \frac{ff}{ga} - 0,05126)}$ $\delta = 1,2816 + 0,65971 \cdot \frac{ff}{ga} + 2,309 \sqrt{(0,65971 \cdot \frac{ff}{ga} - 0,05126)}$. Quibus factis ſubſtitutionibus erit altitudo debita celeritati, qua nauis propelletur $v = \frac{\theta p z - 2Fa}{\frac{2Mgaa\gamma}{V} + \frac{\theta z^3 \delta}{aa\alpha}}$. Exprimantur longitudines in pedibus rhenanis, eritque $\frac{M}{V} = 64$; ac ponatur vt hactenus $p = 32$ libr. et $\alpha = 1$ ped. Praeterea ſit momentum $2Fa = 32\,k$, nempe ſit frictio tanta ad quam ſuperandam axi rotae in diſtantia k applicari debeat pondus 32 librarum: eritque $v = \frac{\theta z - k}{4gaa\gamma + \frac{\theta z^3 \delta}{aa}}$

§. 651. Patet hic eiusmodi valorem ipſi z tribui poſſe vt celeritas nauis fiat maxima ceteris paribus, ad quem inueniendum differentiatur formula ipſi v aequalis, eritque $4gaa\gamma\theta - \frac{\theta\theta\delta z^3}{aa} + \frac{3k\theta\delta zz}{aa} = 0$, ſeu $4ga^4\gamma = 2\theta\delta z^3 - 3k\delta zz$. Sit $k = \mu z$, denotabit μ numerum hominum, qui frictionem ergatae ſuperare valeant; ita vt nullus motus ipſi induci queat, niſi numerus hominum θ excedat numerum μ: erit ergo frictione hoc modo in computum ducta $v = \frac{(\theta - \mu)z}{4gaa\gamma + \frac{\theta\delta z^3}{aa}}$ ex qua pro maxima celeri-

tate

tate reperitur $2ga^4\gamma = \theta\delta z^3$; hincque oritur $z = \sqrt[3]{\frac{2ga^4\gamma}{\theta\delta}} = \frac{b}{n}$. Ex hac ergo aequatione reperietur vel longitudo vectium b ergatae infigendarum, si detur ratio inter celeritatem ergatae et rotae; vel si detur longitudo b reperietur numerus $n = \frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{\theta\delta}{2ga\gamma}}$, qui indicat, quoties rota circumagi debeat, dum ergata semel conuertitur.

§. 652. Ex hoc valore ipsius $z = \sqrt[3]{\frac{2ga^4\gamma}{\theta\delta}}$ oritur ergo celeritas nauis maxima, cuius altitudo debita erit $v = \frac{(\theta-\mu)\sqrt[3]{\frac{2ga^4\gamma}{\theta\delta}}}{6gaa\gamma} = \frac{\theta-\mu}{3\sqrt[3]{4g^2a^2\gamma^2\theta\delta}}$. Quoniam fere est $\gamma = 0, 89565. \frac{ff}{2ga}$, erit $4g^2a^2\gamma^2$ quantitas constans nempe $= (0, 89565)^2 f^4$, eo quod ff repraesentat resistentiam nauis absolutam non ab arbitrio nostro pendentem. Vnde intelligitur celeritatem insuper per valorem ipsius δ augeri posse, ipsum minuendo quantum fieri potest. Hoc autem fit augendo valorem ga ita vt celeritas nauis videatur quousque libuerit augeri posse. At vero, primum augeretur frictio, ob machinam ponderosiorem factam, qua celeritati multum decederet. Tum vero, quam primum valor $\frac{ff}{2ga}$ minor fit vnitate, valor pro γ assumtus ob aliquot neglectos terminos non amplius valet, totaque conclusio concidit.

§. 653. Cum igitur tota disquisitio iam a valore $\frac{ff}{ga}$ pendeat, ponamus $\frac{ff}{ga} = m$, erit $v = \frac{\theta-\mu}{3\sqrt[3]{\frac{4\theta f^4}{mm}}}\gamma^2\delta$ et $z = \frac{b}{n} = a\sqrt[3]{\frac{2ff\gamma}{m\theta\delta}}$. Atque loco m successiue ponamus numeros 1, 2, 3, 4, etc. indeque valores conuenientes pro γ et δ inuesti-

inueſtigemus, qui in formulis ſubſtituti efficient vt quantitates z et v per ſolas quantitates θ, μ et f determinentur. Loco m vero numeros vnitate minores non ſubſtituo, quia valor ga ob grauiſſimas cauſas maior ipſo ff accipi non poteſt. Si enim nauis ſit exigua, tum ea tantam machinam, qualem valor ipſius ga ipſum ff ſuperans requireret, ſuſtinere non poſſet, et in nauibus grandioribus, ob ff iam ſatis magnum, valor ipſius ga neceſſario minor capi debet.

§. 654. En igitur ſequentem tabellam:

$m = 1$; $\gamma = 0,48805$; $\delta = 3,74241$
$m = 2$; $\gamma = 0,95372$; $\delta = 5,20125$
$m = 3$; $\gamma = 1,41508$; $\delta = 6,46672$
$m = 4$; $\gamma = 1,87425$; $\delta = 7,63469$
$m = 5$; $\gamma = 2,33205$; $\delta = 8,74102$
$m = 6$; $\gamma = 2,78887$; $\delta = 9,80386$
$m = 7$; $\gamma = 3,24497$; $\delta = 10,83392$
$m = 8$; $\gamma = 3,70048$; $\delta = 11,83797$
$m = 9$; $\gamma = 4,15552$; $\delta = 12,82095$
$m = 10$; $\gamma = 4,61016$; $\delta = 13,78624$

§. 655. Subſtituantur hi valores ſucceſſiue in formulis $\frac{na}{b} = \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff} \cdot \frac{m\delta}{2\gamma}}$ et $v = \frac{(\theta-\mu)}{3} \sqrt[3]{\frac{mm}{4\theta f^4 \gamma^2 \delta}} = \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{mm}{108\gamma^2\delta}}$ ſeu $v = \frac{\theta-\mu}{6\sqrt[3]{\theta f^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2mm}{\gamma^2\delta}}$; prodibitque haec tabula:

m=

$m = \frac{ff}{ga} = 1$	$\frac{na}{b} = 1,56514 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,21819 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 2$	$\frac{na}{b} = 1,76019 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,19856 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 3$	$\frac{na}{b} = 1,89961 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,18600 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 4$	$\frac{na}{b} = 2,01217 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,17677 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 5$	$\frac{na}{b} = 2,10824 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,16950 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 6$	$\frac{na}{b} = 2,19298 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,16352 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 7$	$\frac{na}{b} = 2,26924 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15844 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 8$	$\frac{na}{b} = 2,33898 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15405 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 9$	$\frac{na}{b} = 2,40345 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15019 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 10$	$\frac{na}{b} = 2,46358 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,14675 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$

§. 656. Ex hac tabula intelligitur celeritatem nauis eo fore maiorem, quo minor fuerit valor $\frac{ff}{ga}$, hoc eſt quo maior ſit cum radius rotae a, tum latitudo palarum g. Neque vero valor ipſius v admodum decreſcit, creſcente valore fractionis $\frac{ff}{ga}$; hic enim ſi decuplo maior capiatur, altitudo v nequidem ſui triente diminuitur, ideoque ipſa celeritas vix ſexta ſui parte debilitatur. Ceterum ſi $\frac{ff}{ga}$ vnitate minor capiatur, altitudo v creſcit vsque ad certum terminum, poſt quem iterum decreſcit, quoad fiat $\frac{ff}{ga} = \frac{0,05126}{0,65971}$, quo caſu fit circiter $v = 0,07 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Sin-

autem ponamus $m = \frac{ff}{ga} = \frac{1}{2}$; fit $\gamma = 0,25113$, $\delta = 2,83021$ et $\frac{na}{b} = 1,41239 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$; $v = 0,23494 \cdot \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$ si fiat $m = \frac{ff}{ga} = \frac{1}{10}$ oritur $\gamma = 0,04808$; $\delta = 1,62762$ et $\frac{na}{b} = 1,19175 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$ atque $v = 0,29090 \cdot \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$.

§. 657. Operae igitur vtique pretium esset hoc maximum inuestigare, si inde vsus in praxi expectari posset: sed praeterquam, quod ob auctam rotae molem frictio μ augeatur, hincque valor v diminuatur, conditionem praecipuam nondum in calculum vocauimus, qua supra (643) vidimus necessario esse debere $\frac{O\delta}{OD} > \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, alioquin enim rota non sui parte antica in aquam impingeret. Quoniam igitur sumsimus $O\delta = \frac{1}{2} OD$ debet esse $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} < \frac{1}{2}$ et $\frac{u}{v} > 4$. at est $\frac{u}{v} = \delta$; quamobrem necesse est vt sit $\delta > 4$. Hinc perspicitur casum primum quo $m = \frac{ff}{ga} = 1$ sine detrimento celeritatis adhiberi non posse, quia est $\delta < 4$ ideoque aqua in partem rotae posticam quodammodo irruit, et effectum diminuit. Sequentes vero casus omnes, quia in ipsis est $\delta > 4$, vtiliter ad praxin transferri possunt neque experientia sensibiliter a theoria dissentire deprehendetur.

§. 658. Celerrime ergo nauis propelletur, si ipsi $\frac{ff}{ga}$ eiusmodi tribuatur valor, cui respondeat $\delta = 4$, tum enim tota rota, qua aquae immergitur, aquam percutiet nauemque propellet. Reperitur autem tum $\frac{ff}{ga} = 1,16240$ et $\gamma = 0,55745$, atque, porro $\frac{na}{b} = 1,60963 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$ et $v = 0,21590 \cdot \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Rota ergo primo ita institui debet, vt

sit

ſit $ga = \frac{ff}{1,1624} = \frac{6}{7}ff$ proxime : ſicque tam latitudo palarum g, quam longitudo radiorum a habita reliquarum circumſtantium ratione determinabitur. Deinde ſi detur numerus operariorum θ, definietur commodiſſima ratio $\frac{na}{b}$, ſimulque altitudo debita celeritati nauis v, ex qua ſpatium, quod nauis dato tempore percurret, aſſignari poterit; datur enim altitudo illa v in pedibus rhenanis.

§. 659. Quo praerogatiua huius remigandi modi prae conſueto perſpici queat, ex antecedentibus repetamus, quae de celeritate nauis a 6ψ remigibus propulſae ſunt allata. Inuenimus autem fore altitudinem celeritati debitam $v = \frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2}(\gamma+\delta)^2} = \frac{2\psi}{3ff\sqrt[3]{2}(\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}$ (623, 625) denotante gb amplitudinem remi vnius. In motu ergo remorum ordinario ſemper eſt $v < \frac{2\psi}{3ff\sqrt[3]{2\frac{\psi}{ff}}}$, eoque magis v ab iſto limite diſtabit, quo minor fuerit fractio $\frac{\psi}{ff}$. Ponatur iam numerus remigum $6\psi = \theta$, vt ſit $2\psi = \frac{1}{3}\theta$, fiet $v < \frac{\theta}{9\sqrt[3]{\frac{1}{3}\theta f^4}}$ ſeu in fractionibus decimalibus erit $v < 0,16025 \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. quae quantitas multo minor eſt, ea, quae, ſi remi in rota diſponantur, eſt inuenta, erat enim $v = 0,21590. \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$, ſi omnia ad celerrimum motum naui vtroque modo imprimendum diſponantur.

§. 660. Quoniam celeritas nauis maxima ope rotae propulſa debita eſt altitudini $0,21590. \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$, erit haec altitudo minor quam $0,21590. \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Quare cum altitudo

 debita

debita celeritati nauis ope remorum propulſae ſit minor quam $0,16025 . \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$, a veritate non multum aberrabimus, ſi hos defectus ipſis quantitatibus proportionales ſtatuamus. Quod ſi ergo vtroque caſu idem hominum operantium numerus adhibeatur, erit celeritas nauis ope remorum propulſae ad celeritatem nauis ope rotae propulſae vt $\sqrt{16025}$ ad $\sqrt{21590}$ hoc eſt vt 1 ad 1,16072 ſeu vt 6 : 7 proxime. Sexta igitur parte eadem nauis ab eodem hominum numero ope rotae celerius promoueri poterit, quam ope remorum, conſueto more adhibitorum, quod ſane eſt lucrum minime ſpernendum.

§. 661. Quia idem hominum numerus eandem nauem ope rotae celerius promouere poteſt quam ope remorum, patet ſi celeritas nauis ſit propoſita, pro rota pauciores homines requiri quam pro remis. Sit numerus hominum nauem remis promouentium $= \eta$, ac numerus hominum, qui ope rotarum eandem nauem eadem celeritate propellere valent $= \theta$, erit $0,21590 . \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}} = 0,16025 . \frac{\eta}{\sqrt[3]{\eta f^4}}$ seu $21590 \sqrt[3]{\theta^2} = 16025 \sqrt[3]{\eta^2}$: hincque $\theta : \eta = 16025^{3:2} : 21590^{3:2} = 1 : 1,5638$; erit ergo $\theta : \eta = 2 : 3$ ſeu propius vt $16 : 25$, ſi igitur loco remorum rotae adhibeantur, tum tertia operariorum parte ſuperſederi poterit: ſcilicet ſi nauis remis inſtructa poſtulet 25 remiges, nauis rotis inſtructa tantum 16 hominibus opus habebit, vt aequali celeritate propellatur.

§. 662. Ex tabula autem computata ſimul intelligitur quanta circumſpectione ad rotam aſtruendam opus ſit, vt tantum lucrum obtineatur. Primo enim in machina

ea

ea ipſa proportio inter na et b obſeruari debet, quam inuenimus; a qua ſi nimium recedatur, celeritas nauis ſenſibiliter diminuetur. Deinde vero praecipue ratio inter ff et ga cum ea, quam aſſignauimus, ſatis prope congruere debet: minor enim ſtatui nequit, quin ſimul portio vis aquae ad nauem repellendam impendatur. Quod ſi autem $\frac{ff}{ga}$ maior capiatur, quam 1, 1624 tum celeritas nauis continuo fiet minor, ita vt facta $\frac{ff}{ga} = 6$ celeritas nauis vix ſuperatura ſit celeritatem, quae ipſi a remis imprimi poteſt. Quamobrem ſi quis forte hanc remigandi modum ad praxin deducere velit, probe ad praecepta tradita attendere debet, ne loco lucri detrimentum patiatur.

§. 663. Quamuis autem iſte naues propellendi modus prae ſolito remigandi modo inſigni gaudeat praerogatiua, tamen tantis coniunctus eſt incommodis, ſi ad praxin reſpiciamus, vt haec incommoda lucrum longe ſuperent. Primum enim huiusmodi ergata, quae ope rotae dentatae remos in gyrum diſpoſitos circumagat, in nauibus non nimis magnis non ſolum ſpatium requireret ſatis magnum ſed etiam pondus nauis totum tantopere augeret, vt hinc non exigua retardatio oriatur. Deinde etiamſi ſpatium eſſet idoneum ad eiusmodi machinam collocandam, tamen tot operarii, quod requiruntur, locum non inuenirent vires ſuas machinae applicandi. In triremi ordinaria certe, ad quam propellendam plures quam 100 homines adhiberi debent, ergata tot hominibus circumagenda nullo modo effici poterit. In minoris vero moduli nauigiis de ergata ipſis imponenda nequidem cogitari poteſt.

§. 664. Miſſa itaque ergata de machina ſimpliciori cogi-

cogitare debemus, cuius ope rotae remis instructae circumagi, simulque sufficiens hominum numerus operi admoueri queat. In hunc finem machina videtur commodissima, si axis OO, cui vtrinque extra nauem Rota D*d* est affirmata, intra nauem incuruetur in figuram RS SR: tum enim plures homines in naui sedentes pro nauis latitudine prehendentes partem SS partim trahendo partim trudendo rotas D*d* circumagent hocque nauem propellent. Atque cum hoc modo nulla ergata adhibeatur, fiet $n = 1$, atque b denotabit longitudinem radii RS; existente $OD = Od = a$. Non solum igitur ista machina mole illa ingenti, quam commemorauimus, caret, sed etiam homines sedendo opus administrabunt, neque discursando incommodum afferent; ita vt hinc plus non nascatur incommodi, quam a remigum labore ordinario.

Tab. XIX. fig. 1.

§. 665. Si igitur duabus rotis nauis instruatur, vti hactenus posuimus, ac resistentia nauis aequalis sit resistentiae plani ff, primum esse debet proxime $ga = \frac{6}{7} ff$. Scilicet si vtraque rota ex duodecim remis sit composita atque ad medietatem radiis DK aquae immergatur, rectangulum ex longitudine vnius radii a in latitudinem g debet esse $= \frac{6}{7} ff$. Quoniam vero f proxime profunditatem, ad quam nauis submergitur denotat, radius $OD = a$ duplum ipsius f excedere nequit, ne rota profundius quam ipsa nauis submergatur. Si igitur capiatur $a = 2f$, remanebit pro $g = \frac{3}{7} f$. Deinde si numerus remigum sit $= \theta$ capi debet $\frac{na}{b}$ hoc est $\frac{OD}{RS} = 1,60963 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$, superficie ff in pedibus quadratis expressa. His vero ita instructis celeritas nauis debita erit altitudini $v = 0,21590 . \frac{\theta - l\mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$ ped.

ped. seu nauis vno minuto absoluet spatium $15 \sqrt{1000 v}$ pedum, atque vna hora spatium $13224, 182 \sqrt{\frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}}$ ped.

§. 666. Vt nauis vna hora milliare germanicum seu 23627 pedes absoluat, debet esse $\theta > ff$, et cum frictio μ sit valde parua, ea prae θ negligi poterit, quippe quam operarii superabunt, si singuli tantillum vires magis intendant quam ipsis tribuimus. Neglecto ergo μ erit spatium vna hora percurrendum $= 13224, 182 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$: quare vt vnum milliare conficiatur debet esse $\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}} = \frac{23627000}{13224182}$, vnde fit $\frac{\theta}{ff} = 5, 703$. Si igitur ob frictionem fiat $\theta = 6 ff$, tot operarii nauem vna hora per milliare germanicum promouebunt; ope remorum autem ad idem spatium absoluendum requiruntur remiges $13 ff$, ita vt hoc modo nequidem semisse operariorum opus sit. Ex quo multo maius lucrum existit, quam ante indicauimus, cuius rei ratio est, quod supra in denominatore terminum $\frac{1}{\sqrt{2gb}}$ reiecimus (659.)

§. 667. Quoniam igitur ad nauem vna hora per milliare germanicum propellendam debet esse $\frac{\theta}{ff} = 6$, patet, nisi sit ff valde paruum, omnes operarios non vni axi SS admoueri posse ob defectum spatii. Operariorum numerus enim, qui ad vnum axem vertendum applicari possunt, determinatur latitudine nauis, cuius bini pedes vni homini spatium sedendi concedent. Quia vero manibus in manubrio SS non tantum spatium requirunt, ad vtramque partem axis SS totidem operarii constitui poterunt.

runt. Atque hinc quot pedes contineat latitudo nauis OO, tot operarii vires suas in axe SS conuertendo exerere poterunt. In nauigiis remis propulsis fere solet esse latitudo $= 4f$; vnde si fuerit $\theta = 6ff > 4f$ seu $f > \frac{2}{3}$ ped. tum vnus axis non sufficit tot operariis, quot requiruntur ad nauem per milliare germanicum vna hora promouendam.

§. 668. His igitur casibus oportebit duas pluresue eiusmodi axes vtrinque rotis instructas in naui constitui. In hypothesi scilicet assumta, qua latitudinem nauis $= 4f$ posuimus, numerus eiusmodi machinarum debet esse $\frac{3}{2}f$, longitudine f in pedibus expressa. Quoniam vero calculum hactenus ad duas rotas accommodauimus, si plures adhibeantur, quaedam mutatio in expressionibus inuentis fieri debebit. Sit ergo numerus axium $= \sigma$ seu numerus rotarum $= 2\sigma$, ita vt sit proxime $\sigma = \frac{2}{3}f$, alia mutatio hinc non orietur, nisi vt vbique loco ga scribamus σga. Capi ergo debebit $\frac{ff}{\sigma ga} = 1,1624$ seu proxime $ga = \frac{6}{7}\frac{ff}{\sigma}$. Quodsi igitur fuerit $\sigma = \frac{3}{2}f$ fiet $ga = \frac{4}{7}f$; sumto ergo radio rotae $OD = 2f$. fiet latitudo palarum $g = \frac{2}{7}$ ped. quae distributio satis commode ad praxin deduci poterit.

§. 669. Numerus autem rotarum hoc modo in naui constitutarum neque rationem inter a et b neque celeritatem nauis afficiet: manebit enim $\frac{OD}{RS} = 1,60963.\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$. Cum igitur, si nauis ita adstruatur, vt singulis horis milliare germanicum absoluat, debeat esse $\theta = 6ff$ fiet hoc casu $\frac{OD}{RS} = 1,60963.\sqrt[3]{6} = 2,925$, ideoque $RS:OD = 1:2,925$. Quo autem manubrium SS ab hominibus cum trahendo tum trudendo commodius versari possit radius RS

vnum

vnum pedem ſuperare nequit ſumto ergo RS $=$ 1 ped. fiet OD $=$ 2,925 ped. Determinato autem hoc modo radio OD $= a$, fiet $\frac{ff}{\sigma g} = 3,4$, et latitudo palarum $g = \frac{5ff}{17\sigma}$ ped. Atque ſi $\sigma = \frac{3}{8}f$ erit $g\ \frac{10}{51}f$ ſeu proxime $g = \frac{1}{5}f$. Probe autem notandum eſt axem OO ad eam altitudinem ſuper aquam eſſe conſtituendum, vt ſemiſſis radiorum verticalium OD aquae immergatur.

§. 670. Accommodemus haec ad exemplum triremis ſupra iam tractatum, in qua erat $ff = 16$ ped. ob rationem enim (633) allatam videtur iſte valor commode ipſi ff tribui poſſe, quo certiores de effectu eſſe queamus. Vt igitur iſta nauis tempore vnius horae per vnum milliare germanicum propellatur, opus erit 96 hominum, cum ſolito remigandi modo plures quam 200 requirantur. Ad hoc ergo ſex axes ſeu 12 rotae in naui diſponi debebunt, et quiuis axis a 16 hominibus verſabitur. Si igitur ſit RS $=$ 1 pedis, fiet OD $= a =$ 2,925 ped. et rotae in aqua ad 1,46 ped. immergentur; latitudo vero palarum erit $= \frac{5}{6}.\frac{16}{17}$ ped. ob $\sigma = 6$. hoc eſt proxime $\frac{4}{5}$ ped. Quodſi autem videatur RS tantum ſtatuere $\frac{3}{4}$ ped. fiet OD $= a =$ 2,194 ped. et latitudo palarum $g =$ 1,04 ped.

§. 671. Triremis ergo hoc modo inſtructa a 96 operariis vna hora per milliare germanicum promoueri poterit; neque hic modus tantis difficultatibus obnoxius eſſe videtur, quam primo intuitu apparebat. Lucrum enim plus centum hominum facile compenſat ſumtus, qui ad eiusmodi rotas fabricandas impenduntur, et, ſi quae difficultates praeterea occurrerent: operae pretium erit de iis tollendis diligentius cogitare. Sumtus quidem ad haec ope-

ra ſufficientis roboris efficienda parui momenti eſſe videntur, cum ſi ſemel ſint facti longo tempori ſufficiant: Contra autem centum hominum victus et ſuſtentatio perpetuo duret. Vt taceam numerum hominum operi admouendorum non ab arbitrio noſtro pendere; et quamuis fortaſſe ſatis adſint, tamen plerumque ad opera longe vtiliora adhiberi poſſunt. Denique iſte labor rotas verſandi, quia eſt vniformis, et motus iam impreſſus laborem adiuuat, non tantopere homines defatigabit, quam remorum agitatio.

Cap. VIII.

DE CONSTRVCTIONE NAVIVM REMIS PROPELLENDARVM.

§. 672.

Quoniam in praecedente capite non ſolum vim, quam remiges exercent, ſed etiam celeritatem abſolutam, quae datae naui inducitur, determinauimus: cuncta principia iam habemus expoſita, ex quibus maxime idonea earum nauium, quae remis ad motum ſollicitari ſolent, ſtructura deriuari ac definiri debet. Quanquam enim eiusmodi naues, quoties opportunitas euenit, praeter remos etiam velis vti ſolent; tamen ad hunc finem in conſtructione triremium non admodum attendi conuenit; eo quod vento locus non conceditur, niſi quatenus reliquae circumſtantiae id permittunt. Neque vnquam triremes vela adhibent, ſi aduerſus ventum curſus inſtitui debeat; in hoc vero maximum diſcrimen poſitum eſt inter naues, quae ſolo vento agitantur, et quae remis ſunt inſtructae.

§. 673. Proprietates, quibus naues remis propulſandas praeditas eſſe oportet, vt in ſuo genere perfectiſſimae cenſeri queant, ſunt vel communes, vel propriae. Illae in omni nauium genere, quae mari committuntur, vnde cunque vis propellens petatur, aeque requiruntur; hae vero ad vim propellentem maxime accommodatae eſſe debent, vt inde nauis motum ſatis celerem et tutum conſequatur. Perpetuo autem neceſſe eſt, vt vtriusque generis proprietates coniunctim perpendantur, ne dum vni ſatisfacere conabimur, reliquis quicquam detrahamus, vnde

nauis periclitari queat. Saepenumero enim ſtructurae, quas diuerſae proprietates poſtulant, inter ſe pugnant; hocque caſu maxime eſt cauendum ne vni nimium tribuentes alteri damnum afferamus.

§. 674. Proprietates communes ſupra iam ſatis euoluimus, vbi determinauimus, quemadmodum nauis comparata eſſe debeat, vt aquae commiſſa tam in ſtatu quietis quam motus incolumis perſeueret. Primo ſcilicet cum figurae nauis tum onerationis ratio debet eſſe eiusmodi, vt ſitus erectus ſimul ſit ſitus aequilibrii, quod euenit, ſi in hoc ſtatu ambo grauitatis centra ipſius nauis nimirum et voluminis ſubmerſi in eandem rectam verticalem incidant. Proprietatem hanc quidem nauis iam dum eſt vacua fere habere debet, ne onera nimis inaequaliter ad hunc ſitum obtinendum imponi oporteat; interim tamen etiamſi nauis vacua aliquantum aberret, niſi error ſit admodum magnus, per onerationem compenſari poterit. Ad hoc primum nauem vtrinque ſimiliter fabricari conuenit, ne ratio adſit, cur in vnum latus potius inclinet quam in alterum: deinde quamuis prora puppi diſſimilis conſtituatur, tamen in hac ipſa diſſimilitudine efficiendum eſt, vt ambo illa centra grauitatis in vnam rectam verticalem cadant.

§. 675. Cum igitur poſitio ſectionum nauis tam horizontalium quam verticalium a priori ſit data, inde volumen carinae ſeu partis aquae immerſae cognoſcitur abſcindendo per ſectionem horizontalem inferiora verſus partem, cuius volumen molem aquae capiat ponderi nauis aequalem. Quoniam ergo pondus nauis a ligno et ferro quibus latera clauduntur et contignatione interna oritur, manifeſtum eſt poſitionem amborum centrorum grauitatis requi-

requiſitam obtineri, ſi diuiſa naui per ſectiones verticales transuerſas in plurima ſegmenta, pondus vniuscuiusque ſegmenti proportionale ſit volumini partis eiusdem ſegmenti quae ſub aqua verſatur. Sienim haec regula in fabricandis ſingulis ſegmentis obſeruetur, neceſſe eſt, vt commune centrum grauitatis tam materiae, ex qua ſegmenta ſunt confecta, quam voluminum aquae ſubmerſorum in eodem ſegmento reperiatur.

§. 676 Data magnitudine et figura nauis, copia lignorum et reliquae materiae ad conſtructionem neceſſariae a practico facile aeſtimabitur: vnde pondus nauis vacuae ex hocque volumen carinae congoſcetur. Hinc ad ſingula ſegmenta (quae gallice Gabaris vocantur) conſtruenda regula naſcitur iſta; vt pondus materiae ad quoduis ſegmentum impendendae proportionale ſit volumini eiusdem ſegmenti infra aquae ſuperficiem deſtinato, ſiue regula aurea adhiberi poteſt, qua inferatur, vti ſe habet volumen totius nauis aquae immerſum ad ſimile volumen cuiusque ſegmenti, ita pondus totius nauis ad pondus eiusdem ſegmenti. Quodſi autem aliae conditiones prohibeant, quominus iſta regula in fabricandis ſingulis ſegmentis obſeruetur: tum quantum in prora ab hac regula fuerit receſſum, tantumdem in puppi ad aequalem a centro grauitatis diſtantiam ab eadem regula erit recedendum.

§. 677. Si hanc regulam perpetuo obſeruare liceret, conſeruationi nauium non parum conſuleretur, quae ſaepe numero ob defectum huius regulae damnum patitur. Quod, vt clarius perſpiciatur, concipiatur nauis $aADBb$, cuius conſtructio ab hac regula aberrat, plano transuerſo verticali cD per centrum grauitatis ducto in duas partes aA Tab. XIX. fig. 2.

 Dc,

Dc, et bBDc diuiſa, quarum illa proram haec puppim repraeſentet. Sit prorae aADc centrum grauitatis in P, ipſius autem partis aquae ſubmerſae ADC centrum magnitudinis M cadat propius ad medium cD. Simili modo puppis bBDc centrum grauitatis ſit in Q, eiusque partis ſubmerſae BDC centrum magnitudinis in N propius ſitum ſit ad medium cD: qui caſus locum habet, ſi naues circa extremitates prorae et puppis ponderoſiores redduntur, quam regula memorata requirit.

§. 678. Huius modi ſtatus in plerisque nauibus deprehenditur, propterea quod naues circa proram et puppim fortiſſimas conſtrui oportet, cum tamen his locis volumen aquae ſubmerſum ſit minimum. Sic itaque erunt centra illa quatuor P, Q, M et N diſpoſita in omni fere naui vacua, et niſi maxima onerum pars in medio cD collocetur, idem ſitus manebit in naui onuſta. Iam a grauitate prora deorſum in directione Pp vrgebitur vi ipſius ponderi aequali; et puppis in directione Qq deorſum a vi ipſius ponderi pariter aequali. Porro ob actionem aquae, qua latera nauis vndique premuntur, prora ſurſum ſollicitabitur a pondere aquae, quam volumen ADC capit, hocque in directione Mm per centrum magnitudinis M partis prorae aquae ſubmerſae ducta. Similique modo preſſiones aquae puppim in directione Nn ſurſum pellunt vi ſimilis voluminis aquae.

§. 679. Omnino igitur nauis ſollicitabitur a quatuor viribus, a duabus ſcilicet deorſum Pp, Qq; et a duabus ſurſum Mm et Nn; quae quatuor vires ſeſe in aequilibrio continent. Ab iis ergo, ſi nauis eſſet corpus maxime rigidum omnisque inflexionis expers, nullus prorſus

effectus

effectus ſenſibilis produceretur; at vero manifeſtum eſt, ſi nauis tanto rigore careat, neceſſario nauem incuruatum iri, ita vt eius ſpina circa medium D ſurſum inflectatur. Atque hoc ipſum vitium ab iſta cauſa oriundum in plurimis nauibus annoſis ſaepiſſime obſeruatur, quae ideo ad vlteriores curſus ineptae redduntur. Euitaretur ergo hoc vitium, ſi naues ſecundum regulam datam conſtruerentur, tum enim ambo centra P et M in eandem rectam verticalem inciderent pariter ac centra Q et N, hocque caſu nulla incuruatio eſſet metuenda.

§. 680. Verum, vti iam monuimus, ob alias rationes grauiſſimas naues circa proram ac puppim vehementer fortes et robuſtae conſtrui debent, quia hic amborum laterum extat iunctura, ſimulque hae partes maximis impetibus ſunt expoſitae. Contra vero in his locis amplitudo carinae fit minima, cum non ſolum ſecundum latitudinem ſed etiam ſecundum altitudinem coarctetur. Hanc ob cauſam, cum minime expediat corpus nauis in medio praeter neceſſitatem ligno onerare, iſtud incommodum per onerum impoſitionem tolli debet, iis ad nauis medium admouendis. Atque ſi aliae rationes iſtam onerationem diſſuadeant, in id tamen maxime erit incumbendum, vt diſtantia inter ambo puncta tam in prora P et M quam puppi Q et N quam minima reddatur. Deinde vero architectos in id magis attentos eſſe oportebit, vt ſpinam et contignationem nauis robuſtiorem efficiant, nauique ſufficientem vim incuruationi reſiſtendi concilient.

§. 681. Ex hoc principio ratio praecipua intelligitur, cur praelonga nauium roſtra improbentur, etiamſi alias ad reſiſtentiam minuendam vtiliſſimae videri queant. Namque

quo

quo longius protenditur prora, eo maiore vi ruptioni resistere debet, cum impetuum contra illam factorum momenta augeantur. Hinc eiusmodi rostra perquam robusta, ideoque ponderosa effici oportet; volumine, quo aquae submerguntur valde paruo existente. Nisi igitur simul puppis vel magis producatur, vel oneribus maxime gravetur, nauis situm aequilibrii tenere non poterit. Posterius remidium fere prorsus ad scopum nauium est ineptum, si enim nauis vacua puppim iam onustam requirit, oneratio nauis tota non mediocriter impeditur. Vt vero alia incommoda iam supra exposita taceam, vtrumuis remedium adhibeatur, centra grauitatis P et M itemque Q et N nimium a se inuicem remouentur, ita vt nauis quantumuis circa medium robusta incuruationi resistere nequeat.

§. 682. Haec ratione situs aequilibrii oberuanda sunt in omni nauium genere, siue propulsio fiat remis siue velis: atque simili modo alterum requisitum, quo situs aequilibrii sufficientem stabilitatem habere debet, vtrique nauium classi commune est. Supra quidem iam docuimus, quemadmodum stabilitas obtineatur ac pro instituto augeatur, vt nauis a viribus sollicitantibus non vltra datum terminum inclinetur. Interim tamen hic circa naues remis propellendas ratione virium, quibus sunt expositae, quaedam singulatim sunt monenda. Sicuti enim in nauibus, quae velis promouentur stabilitas ideo praegrandis esse debet, quod momenta virium venti ad nauem inclinandam sint vehementer magna; ita, dum naues remis motae his tantis viribus non sunt subiectae, tam insigni stabilitatis gradu, saluo ipsarum statu, tuto carere possunt. Quoniam enim vis, quam nauis ab agitatione remorum suffert, fere in

in aquae ſuperficie non procul a centri grauitatis libella applicatur, eius momentum ad nauem inclinandam vix attentione eſt dignum.

§. 683. Duplex autem in quaque naui requiritur ſtabilitas, altera reſpectu axis longitudinalis, circa quem nauis ad latera inclinatur, altera reſpectu axis latitudinalis, circa quem modo prora modo puppis deprimitur, et eleuatur. Quod ad priorem ſtabilitatem attinet, remorum vires eam prorſus non afficiunt; ex quo tantum ad vndarum a latere venientium impetus erit attendendum, quibus, niſi latera nauis in ſuperficie aquae vel diuergant vel conuergant, ſuſtinendis exigua vis par eſſe poteſt. Interim tamen non ſolum ob reliquos tempeſtatum inſultus ſtabilitas ad latera notabilis eſſe debet, ſed etiam ob vela, quae in triremibus fere ſecundum longitudinem extendi ſolent. Dum enim velorum ſitus eſt obliquus, tantundem ſtabilitatis reſpectu axis longitudinalis requiritur, quantum in nauibus, ſolis velis propulſis.

§. 684. Ratione axis latitudinalis, ſi ad ſolam vim remorum attendamus, quoque perexigua ſtabilitas requiritur, ſi enim centrum grauitatis nauis in ipſa ſuperficie aquae ſit poſitum, tum vis remorum nullam prorſus inclinationem intendit; ſin autem centrum grauitatis vel ſupra vel infra aquae ſuperficiem cadat, nauis a remis vel in puppi vel in prora deprimetur, perpetuo autem haec vis erit valde parua. Quodſi vero nauis inſuper velis ſit inſtructa, tum ad horum vim ſuſtinendam vtique maior ſtabilitas requiretur, quae aucta nauis longitudine obtinetur. Cum autem celeritas nauis figuram ſatis oblongam poſtulet, eo ipſo ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis multo

maior efficitur, quam vllarum virium ſuſtentatio requirit. Praecipue igitur ad eam vim inclinantem attendi opportebit, quae in curſu nauis a reſiſtentia prorae oritur, quippe quae ſi prora oblique ſuperiora verſus claudatur, eo maior eſt, quo celerius nauis promouetur. Hanc autem poſtea perpendemus, cum ſtructuram nauium remis propulſarum ex profeſſo ſumus inueſtigaturi.

§. 685. Tertia proprietas nauium aquae innatantium conſiſtit in oſcillationum tranquillitate. Celeritas quidem motus oſcillatorii pendet partim a ſtabilitate, partim a momento inertiae nauis reſpectu axis circa quem oſcillationes fiunt, tranquillitas vero maxime tum cum motu oſcillatorio coniungitur, quando centrum grauitatis ſectionis aquae in eandem rectam verticalem incidit, in qua ſita ſunt cum centrum grauitatis totius nauis tum centrum magnitudinis partis ſubmerſae. Ad hunc autem motum oſcillatorium in nauibus, quae remis promouentur, non admodum eſt ſpectandum, cum in continua remorum vibratione vehementer turbetur, neque vnquam ad vniformitatem peruenire queat. Vndarum quidem impulſiones nauem ſuccutiunt, at hinc non eiusmodi oritur motus, cuius moderatio in noſtra eſt poteſtate.

§. 686. Tertium requiſitum ad naues in ſuo genere perfectiſſimas reddendas verſatur in diminutione reſiſtentiae, qua celeritas nauis augetur. Ad hoc nobis hic potiſſimum eſt attendendum, vbi naues remis promouendas tractamus. Cum enim nauis ab eadem vi eo celerius promoueatur, quo minor fuerit reſiſtentia aquae, triremes procul dubio erunt perfectiſſimae, quae a minima vi celerrime promoueri poterunt. Quae perfectio etſi ad omnes naues

pa-

patet, tamen in iis, quae ope remorum propelluntur, maxime requiri solet. Cum enim in nauibus a vento propulsis defectus a nimia resistentia oriundus multiplicatione velorum reparari queat, in triremibus non sine ingentibus sumtibus numerus remigum multiplicatur. Quocirca in hoc praecipue erit elaborandum, vt vel a dato remigium numero naui maxima celeritas induci, vel eadem celeritas a minimo remigum numero obtineri queat.

§. 687. Quo autem nexus, qui inter vim propellentem, resistentia aquae, et nauis celeritatem intercedit, clarius ob oculos ponatur, ponamus vim propellentem aequivalere ponderi P, resistentiam nauis absolutam aequalem esse resistentiae, quam superficies plana ff contra aquam directe mota ea ipsa celeritate, qua nauis progreditur, suffert. Tum vero sit celeritas nauis debita altitudini v. His positis erit vti iam saepius videmus, vis propellens P aequalis ponderi massae aquae, cuius volumen est $= ffv$. Quodsi ergo vis P pariter per volumen aquae aequiponderans exprimatur erit $P = ffv$, hincque nauis celeritas $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{P}}{f}$. Manente ergo eadem vi propellente P, celeritas nauis augebitur minuta resistentia. Atque in qua ratione superficies ff resistentiam absolutam metiens diminuitur, in huius ratione subduplicata celeritas nauis augebitur.

§. 688. Hic littera P denotat vim quae ad nauem propellendam immediate impenditur, eiusque adeo loco vim, quam remiges ad remos agitandos adhibent, substituere non licet: quoniam haec vis nauem eo debilius promouet, quo celerius iam promoueatur, etiamsi remiges eadem opera vtantur. Vidimus autem in praecedente capite

pite, si numerus et vis remigum non mutentur, atque ad maximum effectum producendum accommodentur, fore v non vti $\frac{1}{f^2}$ sed vti $\frac{1}{\sqrt[3]{f^4}}$, ex quo ipsa nauis celeritas $\sqrt{v}$ erit vt $\frac{1}{\sqrt[3]{ff}}$. Celeritates igitur, quae a dato remigum numero naui induci possunt sunt in ratione reciproca subtriplicata superficiei ff, qua resistentia nauis exprimitur. Aucto autem remigum numero, si resistentia maneat eadem, celeritas nauis in ratione subtriplicata tantum augetur. Ex quibus intelligitur aptissimum remedium ad naues accelerandas in diminutione resistentiae esse quaerendum.

§. 689. Quoniam naues remis motae cursum obliquum instituere non coguntur, hic ea tantum resistentia in computum venit, quam nauis in cursu directo patitur. Pendet autem haec resistentia potissimum a figura inferioris prorae partis, quae in aqua versatur, de qua in superiori libro fusius est tractatum. At praeter istam prorae figuram non parum confert ad resistentiam cum augendam tum diminuendam ipsa externae superficiei indoles; quae si fuerit aspera, motum nauis haud mediocriter impedit, contra autem quo magis est polita, quod fit dum pice oblinitur et laeuigatur, eo minus allisio aquae motui reluctatur. Hoc vero casu demum nauis eam sentiet resistentiam, quam calculus ostendit; ita vt, nisi superficies sit perfecte polita, prouti in calculo assumi solet, nauis multo maiorem passura sit resistentiam, quam calculus declarat. Ex quo summa vtilitas huius praecepti circa externam nauis superficiem distincte perspicitur.

§. 690. Figura prorae, quae in calculum resistentiae ingreditur, a nauis sectione verticali transuersa amplissima incipit;

incipit; quam primum enim figura nauis anteriora verſus contrahi incipit, alliſionem aquae ſentit. In hoc igitur negotio primum conſiderari debet ſectio carinae ampliſſima, a qua contractio laterum nauis initium ſumit; ac tum ipſa haec contractio et attenuatio prorae ad cuſpidem vsque, ſit ſectio carinae ampliſſima $= bb$, quae cum a magnitudine nauis, tum a ſcopo cui deſtinatur, pendet; atque manifeſtum eſt, ſi nauis plano verticali hic ſubito clauderetur ſeu eadem amplitudine ad extremitatem vsque produceretur, hanc ipſam ſectionem ampliſſimam bb futuram eſſe eam ſuperficiem, quam ante ad reſiſtentiam abſolutam metiendam adhibuimus, hoc eſt fore $ff = bb$. Hoc autem caſu nauis omnium maximam patietur reſiſtentiam, quae obliquitate quacunque diminuitur.

§. 691. Cum igitur $ff = bb$ indicet maximam reſiſtentiam quam nauis, cuius ſectio ampliſſima eſt $= bb$, ſufferre poteſt, hanc ipſam quam minimam conſtitui conveniet; quo minor enim reddetur maxima reſiſtentia, quae in nauem cadere poteſt, eo magis ea deinceps per obliquam laterum nauis anteriora verſus contractionem diminui poterit, vt nauis reipſa minimam ſentiat reſiſtentiam. Cum autem ex pondere nauis, quod datum aſſumimus, volumen carinae determinetur, manifeſtum eſt eo minorem prodituram eſſe ſectionem nauis ampliſſimam bb, quo longior ſtatuatur nauis. Oportebit itaque longitudinem nauis maxime augeri diminuta eius latitudine: at vero in hac allongatione nauis probe cauendum eſt, ne ob latitudinem nimis diminutam ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis detrimentum patiatur. Ad hoc euitandum neceſſe eſt, vt ſimul profunditas carinae ita diminuatur, vt latitudo

ad eam retineat rationem dupla non minorem, vti in capite de stabilitate nauium ostendimus.

§. 692. Si figuram carinae ponamus parallelepipedum rectangulum, cuius longitudo sit $= a$, profunditas $= c$, et latitudo $= 2c$, vti stabilitas respectu axis longitudinalis requirit, erit volumen carinae seu partis nauis aquae submersae $= 2acc$. Pondus porro nauis vacuae pendet a crassitie fundi et parietum, quam si ponamus $= e$, nauisque tantum super aqua emineat, quantum immergitur, erit quantitas materiae nauis $= 8ace$, cui cum pondus sit proportionale fiet $8ace$ ipsi $2ace$ et hinc profunditas c crassitiei e proportionalis. Determinatur ergo profunditas c, longitudo autem a pro lubitu accipi posse videtur. At cum aucta longitudine momenta virium, quae nauem rumpere conantur, crescant, pro maiori longitudine naues fortiores construi deberent, ex quo earum pondus augeretur. Quae cum ita sint, ratio longitudinis ad latitudinem et profunditatem non vltra datum terminum extendi poterit; qui ab experientia est petendus.

§. 693. Hanc igitur nacti sumus regulam, vt naues, quae remis propelli debent, tam fiant longae, quam earum robur ad conseruationem requisitum admittit. Quodsi autem experientiam consulamus, patebit nauibus sufficiens robur adhuc conciliari posse, si longitudo ad latitudinem teneat rationem sextuplam siue septuplam, ac fortasse hanc rationem ad decuplam vsque, si necessitas exigat, extendere licet. Pendet hoc praecipue a robore ligni quod ad constructionem nauium adhibetur eiusque pondere, quae, cum ad calculum reuocari nequeant, omnino per experientiam determinari debebunt. Quod vero ad profunditatem attinet,

ca

ea ſemiſſem latitudinis ſuperare haud poteſt; quinimo expediret profunditatem adhuc minorem accipi, quo nauis facilius omnibus tempeſtatum impetibus reſiſtere poſſit. Maxime autem haec cautela erit obſeruanda, ſi centrum grauitatis nauis non ſolum ſupra centrum magnitudinis carinae, ſed etiam ſupra aquae ſuperficiem cadat; qua de re ea conſuli debebunt, quae ſupra de ſtabilitate nauium fuſius ſunt tradita.

§. 694. Poſtquam, quantum fieri poteſt, elongata naui eius ſectio ampliſſima bb ad minimum valorem eſt perducta, reſiſtentia vlterius vehementer diminui poteſt, dum latera nauis in prora oblique coeunt, atque in aciem vel cuſpidem conformantur. Videmus enim in ſuperiori libro reſiſtentiam eo reddi minorem, quo acutior efficiatur prora. Triplici vero modo coarctatio prorae anteriora verſus fieri poteſt; primo ſcilicet ſeruata carinae vbique eadem profunditate latitudo continuo magis diminuitur, quoad, latera in aciem verticalem coeant. Secundo latitudo carinae eadem manere poteſt, dum fundus nauis paulatim eleuatur, donec ſuperficiem aquae attingat. Tertia contractio, quae plerumque in nauibus adhibetur, ex vtraque praecedentium eſt compoſita, atque fit tam latitudinem carinae quam eius profunditatem diminuendo, donec in ſuprema aquae ſuperficie tam latitudo quam profunditas carinae ſimul euaneſcat.

§ 695. In qualibet coarctatione infinita varietas locum habere poteſt; primum ſcilicet longitudo prorae inter ſectionem ampliſſimam et extremitatem in ſuperficie aquae magnum diſcrimen affert; quo lentius enim prora clauditur, eo minor fit eius reſiſtentia ceteris paribus. Deinde

inde maxime ſpectanda eſt linea, ſecundum quam tam latera nauis coeunt, quam ſpina ſurſum inflectitur, vtrum ſit recta an curua, hincque innumerabiles diuerſae figurae prorae naſcuntur, vti in primo capite huius libri expoſuimus. Denique ex his omnibus figuris ea inueſtigari poſſet, quae minimam creet reſiſtentiam, ſub datis conditionibus, quemadmodum in praecedente libro plura huius generis problemata extant ſoluta. Quoniam vero in praxi ſumma geometrica accuratio ad effectum deduci non poteſt, ſufficiet praecipuas prorae ſpecies generatim perpendiſſe, et quantum fructum ex ſingulis ſperare liceat, definiuiſſe.

Tab. XIX. fig. 3 §. 696. Species itaque ſimpliciſſimas trium memoratorum generum prorae contemplabimur, quae non niſi lineis rectis contineantur, cum ex his indoles diminutae reſiſtentiae non ſolum facillime perſpiciatur, ſed etiam ſi curvae lineae ingrediantur, ſatis prope aeſtimari queat, praecipue, ſi in ſubſidium vocentur ea, quae in ſuperioris libri capite ſexto integro hac de re fuſius expoſuimus. Sit igitur ſectio ampliſſima $EFfe$ parallelogrammum rectangulum, a qua prora claudatur in rectam verticalem Aa, ita vt figura prorae ſit priſma baſin habens triangularem aef. Sit latitudo carinae maxima $EF = 2b$, profunditas $Cc = c$, erit area ſectionis ampliſſimae carinae $= 2bc$, quam ſupra poſuimus $= hh$. Et cum ff nobis conſtanter denotet planum, quod directe contra aquam motum eandem patitur reſiſtentiam, quam nauis eadem celeritate mota, foret vtique $ff = hh = 2bc$, ſi longitudo prorae AC euaneſceret; tum enim nauis ipſa ſuperficie $EFfe$ in aquam incurreret.

§. 697

§. 697. Ponamus iam longitudinem prorae $AC = a$, erit $CAE = CAF$ angulus, ſub quo aqua vtrinque in latera prorae impingit, hinc erit reſiſtentia vnius ſemiſſis $AEea = AE.Aa. \frac{CE^2}{AE^2} = \frac{AaCE^2}{AE}$, quae cum ſit normalis ad ſuperficiem $AEea$, dabit vim motui nauis directe contrariam $= \frac{Aa \cdot CE^3}{AE^2} = \frac{b^3c}{aa+bb}$; cui cum reſiſtentia ex altera parte orta ſit aequalis, erit reſiſtentia tota $= \frac{2b^3c}{aa+bb}$; ſiue habebitur ſuperficies reſiſtentiam repraeſentans $ff = \frac{2b^3c}{aa+bb}$. Hinc cum ſit $bh = 2bc$ erit $ff = \frac{bb}{aa+bb} \cdot bh$; ex quo reſiſtentia huius prorae erit ad reſiſtentiam ſectionis ampliſſimae, vti bb ad $aa+bb$, hoc eſt vt CE^2 ad AE^2. Quo longior itaque ſtatuitur prora AC eo magis reſiſtentia nauis diminuitur, hocque in ratione duplicata laterum AE, manente ſectione carinae ampliſſima $EFfe$ eadem.

§. 698. Si igitur longitudo AC capiatur aequalis ſemiſſi latitudinis CE, tum reſiſtentia nauis iam fit duplo minor; quam ſi nauis nuda ſuperficie $EFfe$ in aquam irrueret: ſin autem AC capiatur aequalis toti latitudini EF reſiſtentia naſcitur quintuplo minor; decuplo autem minor erit reſiſtentia, ſi ſit $AC = 3\,CE$. Quodſi autem vt fere conſuetudo praecipit, ſtatuatur $AC = 4\,CE = 2\,EF$, fiet reſiſtentia decem et ſeptem vicibus minor. Interim tamen tanta reſiſtentiae diminutio in praxi non eſt expectanda, cum quia latera nauis non poſſunt fieri politiſſima, vti hic aſſumuntur, tum vero propter aquae tenacitatem, quae implicat reſiſtentiae ſpeciem, quae aucta prorae ſuperficie augetur potius, quam diminuitur. Denique ſi prorae nauis eiusmodi tribuatur forma, vti deſcripſimus tum

aqua nullam vim naui inferet ſurſum vrgentem; ideoque a reſiſtentia aquae nauis non inclinabitur circa axem latitudinalem, quod commodum in nauibus remorum ope propellendis maximi momenti videri queat.

§. 699. Cum enim in hoc nauium genere nulla adſit vis reluctans vi aquae proram nauis eleuanti, iſta prorae ſtructura huic ſcopo aptiſſima videtur; neque vllum dubium ſuper eſſet, ſi modo nauis perpetuo ita progrederetur vt baſes AEF et *aef* horizontalem ſitum conſeruarent. Quoniam autem hoc minime ſperari poteſt, commodum memoratum ingenti incommodo coniungitur: ſtatim enim ac nauis tantillum inclinatur, prora vi non contemnenda eleuabitur, cum ante nulla adeſſet, hincque cum vis contranitens nulla adſit, nauis ſubito inclinabitur, atque adeo, dum prora eleuatur, vis illa eleuans augebitur; ex quo cum ſitus nauis obliquus, tum ſuccuſſiones et reciprocationes violentae naſcentur, vnde nauis in mari turbido praeſertim periculo pereundi obnoxia futura eſſet; cuiusmodi incommodum nullo modo ab hoc genere nauium remoueri poteſt.

§. 700. Huiusmodi ergo prorae figura admitti nequit, niſi aqua ſit admodum tranquilla, ita vt nauis et raro et parum de ſitu erecto deturbetur. In mari vero et aqua minus quieta iſta ſpecies adhiberi non poteſt, ſed eiusmodi figura requiritur, quae mutato ſitu non tantam reſiſtentiae alterationem patiatur. Contemplemur itaque ſecundam ſpeciem, in qua prora ſurſum tantum contrahitur. Scilicet exiſtente carinae ſectione ampliſſima EF*fe* parallelogrammo rectangulo, conuergat prora in aciem horizontalem BD, ita vt prora ſit priſma triangulare baſes habens

Tab. XIX. fig. 4.

habens verticales BE*e* et DF*f*. Quodſi iam haec nauis directe ſecundum CA in aqua progrediatur, ſola facies BD*fe* reſiſtentiam patietur; quae adverſus aquam incurrit ſub angulo CA*c*, cuius ſinus eſt $= \frac{Cc}{Ac} = \frac{Ee}{Be}$. Reſiſtentia ergo huius prorae ſe habebit ad reſiſtentiam ſectionis ampliſſimae EF*fe*, quam ponimus $= bb$, vti Ee^2, ad Be^2. Quare ſi planum, quod parem reſiſtentiam patitur, ponatur $= ff$ erit $ff = \frac{Ee^2}{Be^2} bb$.

§. 701. Ponamus vt ante latitudinem nauis EF $= 2b$, ſiue eius ſemiſſem CE $= b$; profunditatem ſectionis ampliſſimae E*e* $= c$, erit $bb = 2bc$. Sit porro prorae longitudo AC $= a$, erit $Be^2 = aa + cc$, hincque reſiſtentia huius prorae erit $= \frac{cc}{aa+cc} \cdot bb$, quae ergo aequalis erit reſiſtentiae prorae primo loco conſideratae, ſi fuerit $c = b$, ſeu ſi profunditas carinae aequetur ſemiſſi ipſius latitudinis. Quae ratio inter latitudinem ac profunditatem, cum fere in omnibus nauibus obſeruetur, ſiue prora contrahatur priori modo ſiue hoc poſteriori, pro eadem longitudine eadem oritur reſiſtentiae diminutio. Videmus autem ſupra profunditatem *c* ſemiſſem latitudinis *b* ſuperare non poſſe, atque adeo ſtabilitati nauium maxime conſuli, ſi profunditas *c* adhuc minor ſtatuatur. His igitur caſibus pro eadem prorae elongatione magis reſiſtentia diminuetur, ſi prora ſurſum contrahatur, quam ſi tantum ſecundum latera coarctetur, in qua contractione prima ſpecies verſabatur.

§. 702. Praecipuum autem diſcrimen, quod inter proram huius ſpeciei ac praecedentis intrecedit, conſiſtit in vi, qua prora ſurſum vrgetur, quae in priori ſpecie erat nulla,

 in

in hac autem ad reſiſtentiam eo maiorem habet rationem, quo longior ſtatuatur prora. Cum enim vis aquae incurrentis in planum BD*fe* ſit vt BD . B*e* . $\frac{Ee^2}{Be^2} = \frac{2bcc}{\sqrt{(aa+cc)}}$, huiusque directio ſit normalis ad planum BD*fe*, ac per eius centrum grauitatis R tranſeat, exiſtente AR $= \frac{1}{2}$ AC. Ex hac vi, praeter reſiſtentiam horizontalem naſcitur vis proram verticaliter eleuans $= \frac{2abcc}{aa+cc}$, in directione RS exiſtente AS $= \frac{1}{2}$ AC $= \frac{1}{2} a$. Quoniam igitur horizontalis vis, qua motus nauis directe impeditur, eſt $= \frac{2bc^3}{aa+cc}$, erit conſtanter vis proram eleuans, ad vim motui nauis reluctantem in ratione $a : c$, ſeu vti longitudo prorae BE ad profunditatem E*e*. Haec autem vis nauem eleuans aequatur ponderi maſſae aqueae, cuius volumen eſt $= \frac{2abccv}{aa+cc}$, exiſtente v altitudine debita celeritati, qua nauis progreditur.

§. 703. Quia vis nauem eleuans $\frac{2abccv}{aa+cc}$ a celeritate nauis: haec vero a vi propellente pendet, ponamus vim nauem propellentem eſſe $=$ P; eritque $\frac{2bc^3v}{aa+cc} =$ P; vnde vis nauem eleuans erit $= \frac{aP}{c}$. Quamobrem vis navem propellens eſt ad vim, qua prora ab aqua ſurſum vrgetur, vti profunditas E*e* ad longitudinem prorae AC. Ab hac ergo vi nauis primo quaſi leuior redditur, ac volumen aquae ſubmerſum diminuitur. Deinde vero, ad quem effectum maxime ſpectari oportet, ab hac vi navis circa axem latitudinalem inclinatur aſcendente prora; huiusque momentum, quo magis augetur prorae longitudo, duplicem ob cauſam creſcit, primo ſcilicet ob anctam ipſam vim eleuantem $\frac{aP}{c}$, tum vero etiam ob eius maiorem remotionem a centro grauitatis nauis.

§. 704.

§. 704. Si duo expoſita prorae genera in vnum coaleſcant, naſcitur genus tertium, quo prora tum ſecundum latitudinem quam profunditatem ſimul coarctatur et in cuſpidem A terminatur: vbi quidem notandum eſt, hic non de tota prora, ſed tantum de eius parte in aqua verſante eſſe ſermonem, ita vt ſuperficies aquae ſupremum terminum AEF prorae conſtituat. Quanquam ad hoc genus innumerabiles ſpecies pertinent, tamen caſum vnicum ſimpliciſſimum hic contemplabimur, quo ſectio ampliſſima eſt triangulum iſoſceles EcF, e quo prora in mucronem A contrahatur, ita vt eius figura ſit pyramis triangularis AEFc. Ponamus longitudinem $AC = a$. Semiſſem latitudinis $CE = CF = b$, et profunditatem $Cc = c$; erit propter aream baſis $EcF = bc$ ſoliditas totius prorae $= \frac{1}{3}abc$. Atque dum haec prora directe in aqua mouetur, reſiſtentiam patientur binae facies laterales AEc et AFc inter ſe ſimiles et aequales, ex quo reſiſtentia vtrinque erit eadem.

§. 705. Haec igitur prora ab alliſione aquae duplicem ſuſtinebit vim, quarum altera eſt horizontalis motuique reſiſtens, altera verticalis. Prior vis aequiualet ponderi maſſae aqueae, cuius volumen eſt $= \frac{b^3c^3v}{aabb + aacc + bbcc}$; vnde nauis tantam patietur reſiſtentiam, quantam pateretur ſuperficies plana $ff = \frac{b^3c^3}{aabb + aacc + bbcc}$, directe et eadem celeritate contra aquam mota. Cum igitur ſit ſectio ampliſſima $hh = bc$, erit $ff = \frac{bbcc}{aabb + aacc + bbcc} \cdot hh$. Quodſi ſumatur vti fere fert conſuetudo, $c = b$, erit $ff = \frac{bb}{2aa + bb} hh$; cum igitur poſito $c = b$ ſit in vtroque praecedente prorae genere $ff = \frac{bb}{aa + bb} hh$, manifeſtum eſt proram ad

ad hoc tertium genus relatam minorem pati resistentiam: et quidem si sit $a = 4b$, erit pro hoc genere tertio $ff = \frac{1}{33}bb$, cum pro vtroque praecedentium sit $ff = \frac{1}{17}bb$, ita vt resistentia praesenti casu fere duplo sit minor quam in praecedentibus.

§. 706. Altera vis nauem sursum sollicitans in libro superiori (630) reperta est valere pondus voluminis aquae $= \frac{ab^3 ccv}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$; huiusque vis directio verticalis RS transit per rectae AC punctum S ita vt sit $AS = \frac{2aa + cc}{3a}$ et $CS = \frac{aa - cc}{3a}$, qua vi nauis cum leuior redditur, tum prora eleuatur puppi magis submersa. Ceterum haec vis nauem sursum vrgens se habet ad resistentiam vti a ad c seu vti AC ad Cc. Quare si P fuerit vis nauem propellens, erit $P = \frac{b^3c^3v}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$, hincque fiet vis nauem in directione RS sursum vrgens $= \frac{aP}{c}$; quae est eadem ratio inter vim propellentem et vim eleuantem quam casu praecedente inuenimus.

§. 707. Ex his trium prorae generum casibus simplissimis, quos hic euoluimus, satis prope colligere poterimus, quomodo pro quauis prorae figura proposita tam resistentia quam vis nauem eleuans sit comparata. Quamvis enim figurae curuilineae, quae cum sectioni amplissimae tum contractioni prorae tribuuntur, calculum maxime varient, ac saepenumero vix superabilem reddant, tamen determinationes inde manantes a coniecturis, quas ex consideratione casuum tractatorum elicere licet, tantopere non abhorrebunt, vt iis in nostro instituto acquiescere nequeamus. Colligemus autem ex tribus casibus allatis regulas quasdam generales, quarum ope vtrumque resisten-

tiae effectum pro quacunque prorae figura propoſita, tam exacte exiſtimare poterimus, quantum ad praxin, ad quam hic ſolum attendimus, ſufficit.

§. 708 In omni igitur prora ante omnia ratio contractionis, qua latera a ſectione ampliſſima ad extremitatem vsque conuergunt nauemque claudunt, ſpectari debet; quae duplex eſt. Vel enim prora vtique eandem ſeruat profunditatem, et ſecundum latitudinem tantum contrahitur, quemadmodum fit in caſu primum tractato, vel prora vbique eandem conſeruat latitudinem, et ſecundum profunditatem tantum contrahitur, quemadmodum fit in caſu ſecundo Hucque referimus omnes caſus, ſiue contractiones iſtae fiant ſecundum lineas rectas, vti aſſumſimus, ſiue ſecundum lineas curuas quascunque. In priori contractione prorae omnes ſectiones horizontales inter ſe ſunt aequales et ſimiles; in poſteriori autem ſectiones verticales ſecundum longitudinem factae aequalitatem inter ſe ſeruant: vtroque vero caſu ſectiones verticales ſecundum latitudinem factae continuo decreſcunt, quoad tandem in extremitate prorae penitus euaneſcant.

§. 709. Si ſectiones horizontales omnes a ſuperficie aquae deſcendendo ſint inter ſe aequales vti fit in ſpecie prima ab alliſione prorae aduerſus aquam nulla omnino naſcitur vis verticalis, qua nauis ſurſum vrgeretur. Sed tota vis ab aqua excepta directionem habebit horizontalem, quae tota ad motum nauis retardandum impenditur. In huiusmodi igitur prorae figura ſectiones verticales ſecundum longitudinem nauis factae a medio AC ad latera recedendo continuo decreſcunt, quoad tandem in extremitatibus E et F euaneſcant. Eo minor autem erit reſiſtentia, quo vehementius iſtae ſectiones decreſcunt; hoc eſt

quo

quo maior fuerit ſectio diametralis A C c a pro eadem nauis latitudine: ex quo intelligitur eo magis reſiſtentiam diminui, quo longior ſtatuatur prora pro eadem ſectione ampliſſima.

§. 710. Si ſectiones verticales ſecundum longitudinem factae omnes ſint inter ſe aequales, ſectiones autem horizontales a ſuperficie aquae deſcendendo continuo decreſcant reſiſtentia aquae propemodum vti in praecedenti caſu eo magis diminuitur, quo maior capiatur prorae longitudo. Verum inſuper ex alliſione aquae reſultat vis verticalis nauem cum ſubleuans, tum circa axem latitudinalem inclinans. Atque vis iſta eo maior euadit, quo magis per elongationem prorae reſiſtentia diminuitur: tenet enim iſta vis ad vim totam, qua nauis propellitur, rationem fere vti longitudo prorae ad ipſius profunditatem, niſi quatenus iſta ratio ab incuruatione prorae variatur. Momentum ergo, quod ex hac vi oritur ad nauem inclinandam erit fere in duplicata ratione longitudinis prorae, quemadmodum ſupra iam innuimus.

§. 711. Omnis igitur prorae figura, quae quidem concipi poteſt, vel ad alterutram formam expoſitam eſt comparata, vel vtraque contractionis ratio ſimul in ea deprehenditur; prorae autem, in quibus alterutra contractio ſola in eſt, hoc laborant incommodo, quod ſubitanea mutatio in effectu ex alliſione aquae nato oriatur, quam primum ſiue directio nauis ſiue fluctuum vel tantillum mutetur. Si enim prora ad primum genus pertinens pauxillum eleuetur, naſcitur vis ab aqua in fundum incurrente ſurſum vrgens, cum ante nulla eiusmodi vis adeſſet; prora autem ad alterum genus relata, ſi parumper a curſu directo

directo declinet, vel fluctus a latere impingant, ſubito naſcetur vis lateralis. Quare cum iſtiusmodi mutationes per ſaltum factae motum nauis vehementer turbent, in iis tollendis opera maxime erit collocanda. Hincque in praxi iſta regula maximi eſt momenti, quae in ſuperficie nauium omnes angulos vetat, et aequabilem curuaturam vbique requirit.

§. 712. In huiusmodi autem prorae figura, angulis ac ſubitaneis incuruationibus carente, vtriusque generis coarctatio ſimul inerit, atque tam ſectiones horizontales a ſuperficie aquae deorſum deſcendendo, quam verticales ſecundum longitudinem nauis factae a medio ad latera recedendo continuo decreſcent. Aqua igitur in huiusmodi proram incurrens duplicem exeret effectum, reſiſtentiam et vim verticalem; ex allatis autem facile colligitur, reſiſtentiam eo magis diminui, quo longius prora producatur; reſiſtentia vero hoc modo diminuta alteram vim ſurſum vrgentem augeri, eamque fere ad vim nauem propellentem ſequi rationem, quam habeat longitudo prorae ad ipſius profunditatem. Vtrumque autem effectum in libro ſuperiore accurate definiuimus, vnde ſi neceſſitas exigat, depromere licebit; ad praeſens vero inſtitutum hae generaliores obſeruationes ſufficient.

§. 713. Cum igitur in nauibus, quae remis propelluntur iure requiri ſoleat, vt vel a data vi celerrime promoueantur, vel data celeritas ipſi a minima vi inducatur, manifeſtum eſt huic requiſito maxime ſatisfieri, ſi prora fiat quam longiſſima. Supra vero iam quaedam incommoda commemorauimus, quibus prorae nimis longae ſint obnoxiae: vidimus enim §. 681. quo longior ſtatu-

atur prora, puppim quoque ſimul produci oportere, tum vero vt nauis ruptioni ſufficienter reſiſtat et proram et puppim ligno nimium onerari ac ponderoſam reddi debere: quo fit vt nauis minorem onerum copiam capiat, eorumque idoneae diſpoſitioni refragetur. Hinc porro profunditas carinae augebitur, ad quam cum latitudo nauis datam tenere debeat rationem, nauis ſimul latior effici deberet; hocque adeo pacto nauis non ſolum elongaretur, ſed auctis ſingulis dimenſionibus, maior omnino nauis reſultaret, ad quam propellendam eo ipſo maior vis requireretur.

§. 714. His igitur rationibus pro data nauis profunditate ſub aqua, a qua eius latitudo iam determinatur, terminus ſeu limes praeſtituitur, quem nauis longitudo ſuperare nequeat. Qui terminus pro variis nauium generibus multum variare poteſt, quippe qui pendet partim ex robore, quod nauis habere debet, partim a figura carinae, partim a ſcopo, cui nauis deſtinatur, quae res ita ſunt comparatae, vt non niſi per experientiam determinari poſſint. Praeter has autem rationes nunc perpendi debet vis illa, qua nauis ab alliſione aquae ſurſum vrgetur, quae vis eo maior euadit, quo longior prora ſtatuitur. In nauibus enim, quae ſolis remis propelluntur, nulla adeſt vis, quae illi actioni aquae reluctetur, eiusque effectum impediat: etenim, quoniam remi in ſuperficie aquae vibrantur, a qua centrum grauitatis non admodum diſtat, a vi remorum vix ſenſibile naſcetur momentum, quo prora deorſum deprimatur, atque actioni illi aquae occurratur.

§. 715. In triremibus ergo omnibusque nauibus, quae remis ad motum incitantur, vi illi verticali aquae proram eleuanti libera relinquitur agendi poteſtas. Effectum ita-

itaque iſta vis exeret duplicem: primo ſcilicet totam nauem reddet leuiorem, tantam partem ab ipſius pondere adimendo, quanto ponderi ipſa illa vis aequatur: qui effectus vtique non eſt eiusmodi, vt naui damnum afferre queat, quin potius frequenter non ſpernendam vtilitatem addit, dum ob minutam carinam ipſam reſiſtentiam diminuit. Neque igitur opus eſt, vt iſtum effectum deſtruere annitamur. At vero alter effectus huius vis conſiſtit in inclinatione nauis circa axem latitudinalem, circa quem nauis, nulla vi externa obluctante, tantum inclinabitur, quantum ſtabilitas nauis reſpectu eiusdem axis permittit; atque omnino neceſſe eſt vt huius effectus ratio habeatur, cum ex nimia inclinatione nauis certum damnum patiatur.

§. 716. Quo igitur angulum cognoſcamus, ad quem vis aquae verticalis nauem de ſitu recto actu inclinabit, momentum iſtius vis reſpectu axis latitudinalis vna cum ſtabilitate reſpectu eiusdem axis contemplari oportet; momentum enim illius vis diuiſum per ſtabilitatem dabit angulum inclinationis ſeu potius ipſius ſinum poſito ſinu toto $= 1$. Namque hunc angulum tam paruum accipio, vt cum ſinu facile confundi poſſit; id quod in omnibus angulis, quos nauis ſine periculo ſuſtinere poteſt, ſine ſenſibili errore aſſumere licet. Quodſi enim angulus inclinationis tantus prodiret, vt enormiter a ſuo ſinu diſcreparet, tum eo ipſo ſtructura nauis tantae inclinationi obnoxia eſſet reiicienda. Quamobrem ſi momentum vis aquae verticalis reſpectu axis latitudinalis ponatur $= Q$, atque ſtabilitas nauis reſpectu eiusdem axis $= F$, dabit $\frac{Q}{F}$ ſinum ſeu ipſum angulum inclinationis, ad quem nauis e ſitu directo inclinabitur.

§. 717. Ad hanc formulam euoluendam ponamus vim qua nauis propellitur $= P$; sit porro longitudo prorae $= a$ eiusque profunditas sub aqua $= c$, erit vti supra vidimus vis aquae verticalis $= \frac{aP}{c}$; quae expressio etsi tantum in casibus simplicissimis ante expositis locum habet, tamen ea in praesenti instituo vti poterimus, quoniam non ipsam hanc vim absolutam, sed tantum quantitatem ipsi proportionalem spectamus; hinc autem tuto assumere licet, quo magis prora elongetur, in eadem ratione vim illam aquae verticalem augeri. Quodsi iam assumamus centrum grauitatis nauis in sectionem amplissimam incidere, erit distantia huius vis a centro grauitatis proxime longitudini prorae a proportionalis, ex quo momentum istius vis ad nauem inclinandam Q erit vti aa P, siue quadrato longitudinis prorae erit proportionale proxime.

§. 718. Si igitur sectio nauis amplissima maneat eademque vis nauem propellens P statuatur, erit pro diuersis prorae longitudinibus momentum vis aquae inclinationem nauis producens in ratione duplicata longitudinis prorae a, proxime: si quidem figura prorae externa, aucta minutaue longitudine eiusdem maneat speciei. Praeterea autem quo ista ratio minus a veritate dissentiat, longitudinem prorae iam satis magnam prae eius profunditate poni oportet. Cum enim in casu §. 706. tractato sit distantia vis aquae verticalis a sectione amplissima $= \frac{a}{3} - \frac{cc}{3a}$, quae in ipsam vim ducta praebet eius momentum existente a longitudine et c profunditate prorae: manifestum est nisi a multum excedat c hanc distantiam longitudini prorae proportionalem censeri omnino non posse. Quoniam igitur hic proras diuersae longitudinis inter se comparare constitui-

tuimus, longitudo breuiſſimae multo maior exiſtat, quam profunditas carinae c, neceſſe eſt.

§. 719. Niſi igitur ſtabilitas nauis reſpectu axis latitudinalis pro aucta prorae longitudine creſcat in eadem ratione duplicata vel maiore; angulus inclinationis circa axem latitudinalem maior euaderet, quo magis elongaretut prora. Quodſi eueniret, duplex incommodum elongationem prorae vitiaret, ac damnoſam redderet; primo enim aucta inclinatio per ſe maxime eſt vitanda. Tum vero, etiam ſi inclinatio maneret eadem, tamen in prora longiori mox fieret periculoſa. Aucta enim longitudine prorae, in eadem ratione ſpatium, quo extremitas nauis vel eleuaretur vel deprimeretur, creſceret; hincque tandem puppis, niſi ſit altiſſima, penitus ſubmergeretur. Quamobrem ne elongatio prorae damnum afferat, neceſſe eſt vt ſtabilitas F in maiore quam duplicata longitudinis prorae ratione creſcat.

§. 720. Inquiramus igitur in rationem illam, in qua ſtabilitas nauis aucta longitudine creſcit. Sit pondus totius nauis $= M$, volumen aquae ſubmerſum $= V$, eleuatio centri grauitatis nauis ſupra centrum magnitudinis carinae $= g$ atque momentum ſectionis aquae reſpectu axis horizontalis ſecundum latitudinem nauis per ipſius ſectionis aquae centrum grauitatis ducti ſit $= K$; his poſitis ſupra vidimus fore ſtabilitatem nauis reſpectu axis latitudinalis $= M(\frac{K}{V} - g)$. Quodſi ergo aſſumamus ambo illa centra grauitatis nauis et magnitudinis carinae in ſe inuicem incidere, vel minime inter ſe diſtare, quae hypotheſis a veritate non multum abhorrebit, quantitas g, reſpectu valoris $\frac{K}{V}$ facile reiici poterit: atque cum ſit M ipſi V propor-

tionale, erit ſtabilitas nauis reſpectu axis latitudinalis vti K, momentum ſectionis aquae.

Tab. XX. fig. 1. §. 721. Conſideremus ergo duas aquae ſectiones AEBF et *a*E*b*F, quae communem habeant latitudinem EF; quae ſimul per centrum grauitatis vtriusque ſectionis aquae C tranſeat, vicemque axis latitudinalis ſuſtineat, cuius reſpectu momentum ſectionis aquae vtriusque eſt inueſtigandum: quem in finem ponamus in vtraque ſectione aquae medietates anteriores AEF, *a*EF ſimiles et aequales poſterioribus BEF, *b*EF. Iam quia momentum ſectionis aquae K inuenitur, ſi ſingula ipſius elementa per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe EF multiplicentur haecque producta omnia in vnam ſummam coniiciantur. Sumamus in ſectione aquae AEBF elementum MNNM, rectis infinite propinquis MM et NN, et axi EF parallelis abſciſſum: cuius cum ſingulae particulae ab axe EF aequaliter diſtent, ex hoc elemento naſcetur totius momenti quaeſiti differentiale $= MM . PQ . CP^2$; ex quo momentum ſectionis aquae AEBF erit $= \int MM . PQ . CP^2$.

§. 722. Sit iam relatio inter ſectionem aquae longiorem *a*E*b*F et breuiorem AEBF ita comparata, vt longior per elongationem ex breuiori naſcatur. Scilicet ductis ordinatis ad axem EF normalibus RM*m*, SN*n*, ſit ratio inter RM : R*m* et SN : S*n* vbique eadem, et aequalis rationi CA : C*a*. Quodſi ergo in ſectione longiore capiatur elementum *mnnm* reſpondens elemento MNNM breuioris, ita vt ſit $mm = MM$ et $nn = NN$, erit $Cp : CP = Ca : CA$; et $pq : PQ = Ca : CA$; ideoque $Cp = \frac{Ca}{CA} . CP$ et $pq = \frac{Ca}{CA} . PQ$. Cum igitur momentum huius ſectionis longioris reſpectu axis EF ob rationes ſimiles

les ſit $= \int mm.pq.Cp^2$ erit hoc momentum $= \frac{Ca^3}{CA^3} \int MM.PQ.CP^2$. Ex hisque erit momentum ſectionis aquae longioris $aEbF$ ad momentum ſectionis breuioris AEBF in ratione Ca^3 ad CA^3; ſcilicet haec momenta erunt in ratione triplicata longitudinum prorae.

§. 723. Cum igitur ſtabilitas nauis F ceteris paribus ſit vt cubus a^3 longitudinis prorae, momentum autem nauem inclinans Q ſit tantum vt quadratum a^2, erit angulus inclinationis nauis $\frac{Q}{F}$ vt $\frac{1}{a}$ hoc eſt reciproce vt longitudo prorae. In nauibus ergo diuerſae longitudinis extremitates prorae ac puppis per aequalia ſpatia ſiue eleuabuntur ſiue deprimentur. Neque igitur ex hoc capite opus eſt, vt in nauibus longioribus prora ac puppis altiores extruantur quam in breuioribus, ſed eadem altitudo pro quauis longitudine tuto retineri poteſt. Cum ergo haec ratio proras quantumuis longas non prohibeat, vtique conueniet in nauibus remis propellendis proram tam longam efficere, quantum rationes ſupra allegatae id permittunt; hocque modo reſiſtentia nauis maxime diminuetur.

§. 724 Per praxin ergo maxima prorae longitudine, quam quidem nauis ſuſtinere queat, determinata contractio prorae antrorſum idonea atque ad praxin accommodata eſt eligenda, quae cum inaequalitatibus ſubitaneis careat tum etiam minimam reſiſtentiam patiatur. Atque in hac indagatione in ſubſidium vocari poſſunt, quae ſuperiori libro de figuris, quae ſub datis conditionibus minimam reſiſtentiam recipiunt, ſunt eruta. Imprimis autem e re erit figuram prorae eiusmodi ſeligere, quae minimam ab aqua recipiat vim verticalem, quo nauis minorem inclinationem ſubeat. Quamuis enim in aqua tranquilla inclinatio

natio

natio ſine vllo periculo eſſe videatur, tamen in aqua fluctibus turbata, dum aqua mox ſeſe prorae ſubducit, mox multo maiori copia irruit, a minima inclinatione vehementes perturbationes in ſtatu nauis erecto proficiſcuntur, quae eo maiores erunt, quo ſenſibilior fuerit inclinatio naturalis in aqua tranquilla orta.

§. 725. Quoniam prora, cuius ſingulae ſectiones horizontales ſunt inter ſe aequales, ab aqua nullam excipit vim verticalem; etſi praxis hanc figuram reſpicit, tamen manifeſtum eſt, vim verticalem eo magis diminutum iri, quo propius prorae figura ad hanc ſpeciem accedat. Cum igitur in iſta ſpecie ſectio ampliſſima ſit rectangulum, conuenit ſectionibus verticalibus vbique deorſum eandem fere latitudinem relinqui, easquae ſatis repente incuruari et cum ſpina coaptari, ita vt fundus nauis non multum a ſuperficie plana diſcrepet. Deinde eundem ſcopum eo magis aſſequemur, ſi ſpina non pedetentim, ſed ſatis ſubito in extremitate prorae demum aſcendat, et ſupra ſuperficiem aquae promineat. His autem regulis non obſtantibus latitudo antrorſum ita ſenſim diminui poteſt, vt reſiſtentiae aquae maxima vis adimatur.

§. 726. Quae igitur hactenus circa conſtructionem nauium remorum ope propellendarum ſunt praecepta, ea praeter regulas generales in conſtructione nauium obſeruandas huc redeunt vt primo maxima longitudo, quam nauis ſuſtinere queat, ipſi tribuatur, ac puppis prorae ratione longitudinis non nimis diſſimilis ſtatuatur, quo axis nauis verticalis per centrum grauitatis ductus ſimul per centrum
Tab. XX. fig. 1. grauitatis ſectionis aquae proxime tranſeat. Tum ſectioni aquae $aEbF$ eiusmodi detur forma, quae antrorſum ſatis lente

lente conuergat, ita vt refiftentia, quam ipfa haec fuperficies in directione Ca mota pateretur, tam fiat parua, quam aequabili curuatura fieri poteft. Huic ergo requifito fatisfiet, fi curuae lineae aE et aF quam minime a chordis rectis aE et aF diftent; hoc enim modo obliquitas aquae incurrentis vbique propemodum erit eadem, atque allifio directa feu ad directam accedens maxime euitatur. Quo magis autem fectio aquae ad refiftentiam minuendam fuerit accommodata, tum ipfa prora tota eo minori refiftentiae erit obnoxia, eo quod fectiones horizontales deorfum captae vix fenfibiliter coarctari debent.

§. 727. Sectio igitur verticalis fecundum longitudinem nauis facta vsque ad extremitates fere A et B eandem profunditatem retinebit, tum vero ex A in a fatis fubito inflectetur vt a fitu verticali tam parum difcrepet, quantum curuedo aequabilis permittit. Denique fectionem amplisfimam fFCEe minime a figura rectangulari differre oportebit; ita vt tantum anguli in E et F obtundantur, atque in aequabilem figuram reducantur. Quodfi autem hoc modo tres fectiones nauis principales fuerint determinatae, tota figura definietur vel ftatuendo omnes fectiones horizontales fectioni aquae affines, vel iftam affinitatem in omnes fectiones verticales fectioni amplisfimae parallelas introducendo. Vtroque modo figura fere eadem refultabit, quae in aqua mota cum refiftentiam minimam patietur, tum vero fimul ab aqua minimam vim verticalem excipiet, quae funt duo requifita nauibus remorum ope propellendis maxime propria.

Fig. 2. Fig. 3.

Cap. IX.

DE VI, QVAM VENTVS IN VELA EXERIT.

§. 728.

Quae hactenus de vi aquae in nauis ſuperficiem incurrentis ſunt expoſita, eadem ad vim venti contra datam ſuperficiem irruentis transferri poſſunt, obſeruata ratione grauitatis ſpecificae inter aquam et aerem. Quemadmodum enim vis aquae in datam ſuperficiem impingentis reducta eſt ad pondus determinati cuiusdam voluminis aquae; ita ſimili modo vis venti reducetur ad pondus paris voluminis aeris. Cum igitur aer ſit fere octingenties leuior quam aqua, eadem determinatio vis, quae ab allapſu aquae proficiſcitur, pro vento valebit, ſi in ratione 800 ad 1 diminuatur: ſiquidem et celeritas et obliquitas incidentiae vtroque caſu fuerit eadem. Aſſumemus ſcilicet vim venti pariter ac aquae, proportionalem primo ſuperficiei in quam incurrit, ſecundo quadrato celeritatis, qua irruit, ac tertio quadrato ſinus anguli incidentiae, quippe quas rationes proxime ad veritatem accedere experientia teſtatur.

§. 729. Has ob rationes facile foret eodem modo, quo vim aquae determinauimus, vim venti, quam in vela exerit, definire ſi modo figura velorum, a qua vis potiſſimum pendet, eſſet cognita. Quoniam vero hanc figuram ipſam ante inueſtigari oportet, quam ad vis cognitionem peruenire liceat, haec tractatio aliquanto plus operis requirit, atque nonnulla principia ſtaticae ſingularia poſtulat, ex quibus figurae corporum flexibilium a viribus qui-

quibuscunque ſollicitatorum determinari queant. Quo autem ad hanc evolutionem via facilius ſternatur, conueniet primum animum a flexibilitate velorum abſtrahere, eaque tanquam perfecte rigida contemplari. Hancobrem viſum eſt primo loco tabulas rigidas in velorum locum ſubſtituere, quae non obſtante vi venti eandem figuram conſeruent. Atque haec tractatio maxime ſimilis erit ei, qua vim aquae in ſuperficiem quamcunque irruentis definiuimus.

§. 730. Tribuamus primum tabulae rigidae vicem veli ſuſtinentis figuram planam, ſitque haec tabula in ſitu quem tenet firmiter alligata, ita vt de ſuo ſitu a vi venti deturbari nequeat. Repraeſentet recta VC directionem venti per centrum grauitatis tabulae C ductam ſitque celeritas venti debita altitudini v ipſa tabula quieſcente. Concipiatur per directionem venti VC ad planum tabulae duci planum normale, VACB, erit ACV angulus incidentiae ſub quo ventus, quaſi fluuius aereus in tabulam impingit. Sit huius anguli ACV ſinus $= m$, coſinus $= n$ poſito ſinu toto, $= 1$. Porro ponatur planum tabulae $= bb$, atque ex ante expoſitis primo conſtat, mediam directionem vis venti eſſe normalem ad planum tabulae, ac per eius centrum grauitatis B tranſire; quae itaque repraeſentetur recta CW ad planum tabulae in eius centro grauitatis C normali. Huius ergo vis directio CW cum directione venti producta CX conſtituit angulum WCX cuius ſinus $= n$. Tab. XX. fig. 4.

§. 731. Ad quantitatem huius vis venti CW definiendam, primum notandum eſt, ſi directio venti ad planum tabulae eſſet normalis, tum vim venti aequivalituram eſſe ponderi cylindri aerei, cuius baſis ſit ſuperficies

 tabu-

tabulae bb, et altitudo aequalis altitudini, celeritati venti debitae v. Ex quo vis venti CW aequalis foret ponderi massae aeris, cuius volumen est $= bbv$. Iam propter obliquitatem ACV ista vis diminui debet in ratione duplicata sinus totius 1 ad sinum anguli ACV qui est $= m$, vnde in proposito casu vis venti CW aequabitur ponderi massae aereae, cuius volumen $m^2 bbv$. Quodsi ergo pondus voluminis aquei V fuerit $= M$, pondus voluminis aerei V erit circiter $= \frac{1}{800} M$. Quo circa vis quam ventus VC in tabulam AB exerit, in directione CW erit $= \frac{m^2 bbv}{800 V} \cdot M$; ita vt haec vis per cognitas virium mensuras possit exhiberi. Censetur quidem ratio grauitatum specificarum inter aquam ad aerem tantum vt 750 ad 1. At cum hic intelligatur aqua dulcis, pro aqua marina assumta ratio 800 ad 1 veritati satis erit consentanea.

§. 732. Quando aduersus plagam venti cursus est instituendus, maxime respiciendum est ad quantitatem anguli WCX; quo maior enim hic angulus existit, eo propius directio vis CW ad plagam venti CV accedit. Nauis autem, sequi debet cursum in directione CW, si vndique eandem resistentiam in motu suo offenderet. Verum ob multo maiorem resistentiam laterum quam prorae, directio cursus multo propius ad CV adduci potest, quam CW. Videmus autem in casu praesente angulum WCX fieri maximum, si euadat rectus, quippe quo casu fit eius sinus $n = 1$; et directio venti VC radet tabulam ACB velum repraesentantem. At quoniam hic fit $m = 0$, manifestum est vim venti simul euanescere. Erit ergo angulus rectus quasi asymtotos anguli WCX, ad quam quantumuis prope accedere, ipsam vero nunquam attingere poterit

poterit. Multo minus autem directio vis CW ad CV propius accedere potest, si figura veli non sit plana, vti mox videbimus.

§ 733. Ista vis venti determinatio autem locum non habet, nisi superficies tabulae fuerit perfecte plana, hoc est quasi politissima. Quodsi enim fuerit scabra et inaequalitatibus inquinata, vti in *m*, manifestum est, tam ipsam vim venti CW quam eius mediam directionem maxime turbatum iri, eo quod in qualibet prominentia ventus sub alio angulo incidit, ex quo eius vis simul ac directio magnopere mutatur. Cuiusmodi igitur effectum habiturus sit ventus in talem superficiem asperam incidens ex sequente casu poterimus colligere. Incidat ventus in directione VC in superficiem quasi fractam ACB, ita vt in duas superficies planas AC et BC ad C angulum inter se constituentes impingat, et ad vtramque diuersam habeat inclinationem. Exhibebunt scilicet A et B in superficie imaginaria, plana AcB duas eminentias, et angulus ad C sinum; ideoque hic casus aptus erit ad vim venti in superficiem asperam irruentis aestimandam etiamsi binas superficies AC et BC planas assumamus, quae figuras quascunque habere possint. Tab. XX. fig. 5.

§. 734. Sit anguli AcV, qui foret angulus incidentiae, si figura esset plana AcB et sinuositate careret, sinus $= m$, cosinus $= n$: linea recta AB $= c$, quae simul latitudinem habeat k, ita vt nunc sit $= ck$ quod ante erat $= bb$. Porro sit AC $= a$; et BC $= b$; sinus anguli CAB $= \alpha$, sinus anguli CBA $= \beta$; illius anguli cosinus $=$ A et huius $=$ B, erit anguli ACB sinus $= \alpha B + \beta A$ et cosinus $= \alpha\beta - AB$, hinc erit per trigonometriam $a : b : c = \beta : \alpha : \alpha B + \beta A$, et $cc = aa + bb - 2ab\,(\alpha\beta - AB)$.

 Iam

Iam ventus in partem AC impingit ſub angulo $VCA = VcA - CAc$, cuius ſinus propterea erit $= mA - n\alpha$. Deinde in ſuperficiem alteram BC ventus irruit ſub angulo $VCB = VcB - ABC$, cuius ſinus eſt $= mB + n\beta$. Quodſi ergo ponantur EM et FN mediae directiones harum virium a vento exceptarum, erunt eae primum ad AC et BC normales, tum vero per harum linearum AC et BC puncta media E et F tranſibunt.

§. 735. Si altitudo debita celeritati venti ponatur $= v$, erit vis $EM = (mA - n\alpha)^2 akv$, atque vis $FN = (mB + n\beta)^2 bkv$, vti ante inuenimus; neglecta ratione, qua ad menſuram abſolutam harum virium inueniendam opus eſt. Erit ergo vis EM ad vim $FN = \square$ ſin. $ACc \cdot AC : \square$ ſin. $BCc \cdot BC = Ac \cdot$ ſin. $ACc : Bc \cdot$ ſin. $BCc = \frac{Ac^2}{AC} : \frac{Bc^2}{BC}$, quoniam eſt ſin. ACc : ſin. $BCc = \frac{Ac}{AC} : \frac{Bc}{BC}$. Producantur vires EM et FN donec rectae AB occurrant in e et f erit $Ae = \frac{a}{2A}$ et $Bf = \frac{b}{2B}$; ſitque harum virium media directio gGW et ipſa vis aequiualens GW; quae effectum venti quaeſitum exhibebit. Quamobrem ex natura aequilibrii primum habetur $\frac{eg \cdot Ac^2}{AC} \cdot \frac{AE}{Ae} = \frac{fg \cdot Bc^2}{BC} \cdot \frac{BF}{Bf}$ ideoque $eg : fg = \frac{B \cdot Bc^2}{BC} : \frac{A \cdot Ac^2}{AC} = B \cdot BC (mB + n\beta)^2 : A \cdot AC (mA - n\alpha)^2$; et cum ſit $BC : AC = b : a = \alpha : \beta$ erit $eg : fg = \alpha B (mB + n\beta)^2 : A\beta (mA - n\alpha)^2$. Ex hac analogia determinatur punctum g, in quo media directio vis venti in rectam AB incidit. Cum ſit $AE = \frac{1}{2} AC$; et $BF = \frac{1}{2} BC$, erit quoque $eg \cdot \frac{Ac^2}{Ae} = fg \cdot \frac{Bc^2}{Bf}$ vnde facilis constructio puncti g reperitur.

§. 736. Quodſi ducatur recta EF, erit ea parallela ipſi AB, ſecetur ea a directione media gGW in puncto

o erit-

o eritque $EO : FO = eg : fg = \frac{Bc^2}{Bf} : \frac{Ac^2}{Ae}$. At ſi directio venti VC ſecet rectam EF in γ erit $Bc : Ac = F\gamma : E\gamma$. Tum vero ſi ex C in EF demittatur perpendiculum Cp erit ob triangula ſimilia $Ae : AE = CE : Ep$, ideoque $Ae = \frac{CE^2}{Ep}$, et propter $Bf : BF = CF : Fp$, erit $Bf = \frac{CF^2}{Fp}$. Ex his itaque ſequitur fore $Eo : Fo = \frac{F\gamma^2 . Fp}{CF^2} : \frac{E\gamma^2 . Ep}{CE^2}$. Poſtea ad angulum FoW definiendam vires CM et FN reſoluendae ſunt in normales ad EF et in ipſam EF incidentes. Sufficiet vero quantitates his viribus proportionales aſſumſiſſe, ex quo cum ſit $EM : FN = \frac{E\gamma^2}{CE} : \frac{F\gamma^2}{CF}$ erit vis normalis ex EM orta $= \frac{E\gamma^2 . Ep}{CE^2}$ et ex FN orta $= \frac{F\gamma^2 . Fp}{CF^2}$. Deinde ex vi EM naſcitur vis in directione $FE = \frac{E\gamma^2 . Cp}{CE^2}$, et ex vi FN naſcitur vis in directione $EF = \frac{E\gamma^2 . Cp}{CF^2}$; quae duae vires inter ſe ſunt contrariae, binae priores vero conſpirant.

§. 737. Si igitur vis aequiualens GW pariter in eiusmodi vires laterales reſoluatur, debebit vis ad EF normalis eſſe $= \frac{E\gamma^2 . Ep}{CE^2} + \frac{F\gamma^2 . Fp}{CF^2}$; altera vero vis in directione oF erit $= \frac{F\gamma^2 . Cp}{CF^2} - \frac{E\gamma^2 . Cp}{CE^2}$, vnde anguli FoW tangens erit $= \frac{CF^2 . E\gamma^2 . Ep + CE^2 . F\gamma^2 . Fp}{CE^2 . F\gamma^2 . Cp - CF^2 . E\gamma^2 . Cp}$. Quo appareat quantum haec directio a directione venti VC deflectat, ducatur GX ipſi VC parallela erit angulus deflexionis $WGX = FoW - F\gamma C$. Cum igitur anguli $F\gamma C$ tangens ſit $= \frac{Cp}{p\gamma}$ prodibit anguli WGX tangens $= \frac{CF^2 . E\gamma^2 (p\gamma . Ep + Cp^2) + CE^2 . F\gamma^2 (p\gamma . Fp - Cp^2)}{CE^2 . F\gamma^3 . Cp + CF^2 . E\gamma^3 . Cp}$, quae expreſſio in plurimas alias formas transmutari poteſt, ope relationis quae inter lineas figurae intercedit. Ceterum ſi latera AC et BC fuerint aequalia, fiet anguli WGX tangens $= \frac{p\gamma(Ep^2 - 2Cp^2 + p\gamma^2)}{Cp(Ep^2 + 3p\gamma^2)}$.

§. 738.

§. 738. Apparet autem hoc casu angulum deflexionis WGX, quo media directio vis venti GW ab ipsa venti directione VC declinat, nunquam tantum fieri posse, quam si tabula ventum excipiens est perfecte plana AB; si enim ventus in directione AC impingit, tum solam partem BC percutiet, quae cum minus sit obliqua ad venti directionem, quam superficies plana AB, directio vis venti quoque propius ad ipsius venti directionem accedet. Quodsi autem angulus VCB maior fiat angulo ACB, tum ventus non solum totam superficiem AC non stringet, sed etiam in partem tantum superficiei BC incidet, quo fiet vt eius effectus non solum fiat multo minor sed etiam non tantopere a directione venti discrepabit, quam si figura tabulae esset perfecte plana. Hinc igitur perspicuum est, inaequalitatem superficiei ventum excipientis magnopere effectum tum ratione quantitatis quam directionis turbare, ita vt calculus supra datus pro
Fig. 4. effectu venti in superficiem planam incurrentis determinando locum habere non possit, nisi ista superficies sit perfecte polita, et omni inaequalitate destituta.

§. 739. Quae hic de figura plana sunt tradita simul declarant in superficie concaua, qualem vela induere solent, effectum venti vehementer differre debere, prouti superficies velorum fuerit magis minusue laeuigata. Quamobrem si vela vento oblique opponantur, vti fit, si cursus aduersus ventum institui debet, ratio superficiei velorum maxime est spectanda; quippe quae, quo minus fuerit polita, eo magis a scopo deflectet. Hinc igitur colligitur, quo memorato incommodo obuiam eamus, maxime expedire, vt superficies velorum interna; quae per-

per ſe ob filamenta contexta eſt inaequabilis, maxime laevigetur et quaſi polita reddatur; quod commodiſſime praeſtabitur, ſi vela pice vel colore craſſiore illinantur. Nautae incommodum hoc animadvertentes vela madefacere ſolent; quo primum quidem impetrant vt vela magis tendantur atque in ſuperficiem planam magis explanentur, tum vero etiam vento omnem tranſitum per poros velorum adimunt. Quantumuis autem hae duae res ad propoſitum facere videantur, tamen equidem effectum a humectatione velorum ortum maxime huic cauſae tribui debere arbitror, quod cauitates inter filamenta interceptae humido repleantur, ſicque ſuperficiem magis laeuem mentiantur.

§. 740. Inuenta vi, quam vela a vento impulſa ſuſtinent definiri poterunt vires, quae ad vela in eodem ſitu continenda requiruntur; ad hoc enim neceſſe eſt, vt vires velum continentes cum media vi venti, quam determinauimus, in aequilibrio conſiſtant, niſi ipſum velum ſit graue, quo caſu in ſtatu aequilibrii ſimul ponderis ipſius veli ratio eſt habenda. Teneat, vti primo poſuimus, veli vicem tabula plana A B grauitatis quidem expers, in quam ventus ſub directione quacunque allidat, tranſibit media directio vis venti CM per ſuperficiei tabulae centrum grauitatis C, eritque ad ipſum planum normalis, quantitatem autem huius vis ita determinauimus cum ex celeritate venti, eiusque obliquitate, tum ex ſuperficie tabulae, vt pondus huic vi aequale aſſignari poſſit. Sit P pondus huic vi aequale, atque vis venti tabulam vrgentis eo eſt perducta, vt tabula in directione CM ſollicitetur vi, quae aequalis ſit ponderi P. Quare ſi haec tabula naui ſit fir- Tab. XXI. fig. 1.

miter affixa vel alligata, ipſa nauis ſollicitabitur in directione CM a vi, quae aequalis eſt ponderi P.

§. 741. Cum autem vela ope funium ſeu cordarum ad malos alligari ſoleant, conueniet vim determinari, quam hae cordae ſuſtinent. Ponamus tabulam AB ope duarum cordarum A*a* et B*b* malo vel naui eſſe alligatam, ita vt cordae ſecundum longitudinem a vi P in directione CM pellente extendantur. Quo igitur vires in directionibus A*a* et B*b* agentes cum vi P in aequilibrio conſiſtant, primum oportet directiones A*a* et B*b* cum directione CM in eodem plano eſſe poſitas. Deinde requiritur, vt directiones A*a* et B*b*, ſi producantur, ſeſe in eodem rectae CM puncto interſecent. Tertio denique aequilibrii ſtatus poſtulat, vt ipſae vires A*a* et B*b* ſint inter ſe in ratione reciproca ſinuum angulorum, quos ipſarum directiones productae cum directione CM conſtituunt; ſimul vero vna harum virium puta A*a* ſe habeat ad vim P, vt ſinus inclinationis alterius directionis B*b* ad CM, ad ſinum anguli, quem ambae directiones *a*A et *b*B inter ſe conſtituunt. Atque ex his conditionibus tam directiones cordarum, quam vires, quibus tenduntur definientur.

§. 742. Cum ergo, ſi tabula AB vicem veli ſuſtinens fuerit plana directio CM ſit ad AB normalis; ſumtis interuallis CA et CB aequalibus, directiones A*a* et B*b* aequaliter inclinatae eſſe debent ad AB; ſimulque ambae cordae A*a* et B*b* aequalibus viribus tendentur. Sit anguli *a*AC ſeu *b*BC ſinus $= \mu$ coſinus $= \nu$; et p denotet vim, qua vtraque corda tendetur. His poſitis erit anguli, quo A*a* vel B*b* ad CM inclinatur, ſinus $= -\nu$: et coſinus $= \mu$; vnde anguli, quo directiones *a*A et *b*B

ad

ad ſe mutuo inclinantur, ſinus erit $= -2\mu\nu$. Hinc conditio tertia iſtam praebebit analogiam $p : P = -\nu : -2\mu\nu = 1 : 2\mu$; erit ergo $p = \frac{P}{2\mu}$. Quamobrem erit ſinus anguli aAB ſeu bBA ad ſinum totum, vti ſemiſſis vis P ad vim p, qua corda Aa vel Bb tenditur. Vnde perſpicuum eſt, cordas a minima vi tendi, ſi earum directio fuerit perpendicularis ad planitiem veli AB, ſiquidem velum concipiatur grauitatis expers.

§. 743. Maneant directiones cordarum Aa et Bb ad planitiem veli normales, atque adeo parallelae directioni vis a vento exceptae CM, ſint autem interualla CA et CB inaequalia. Ex natura vectis conſtat, ad aequilibrium conſtituendum ſummam virium Aa et Bb aequalem eſſe debere vi P; tum vero vires Aa et Bb reciproce proportionales eſſe oportere diſtantiis AC et BC. Quodſi ergo vis Aa ponatur $= p$; vis B$b = q$ erit primo $p + q = P$ tum vero $p . AC = q . BC$, ideoque ob $p . AC = P . BC - p . BC$ erit $p = \frac{P . BC}{AB}$ et $q = \frac{P . AC}{AB}$. Velum igitur planum a vento inflatum a duabus viribus, quarum directiones ſint normales ad planum veli, atque cum directione media vis venti CM in eodem plano ſitae, in aequilibrio contineri poteſt. Scilicet recta AB per puncta A et B quibus cordae velo ſunt alligatae per centrum grauitatis ſuperficiei veli tranſire debet. Fig. 2.

§. 744. Habeat velum planum figuram triangularem ABD, erit directio vis venti media normalis ad hoc planum in ipſius centro grauitatis C; ſitque vis venti $= P$. Alligatum iam ſit velum hoc in tribus angulis A, B, D, ita vt cordae ad planum trianguli ſint normales; atque oporteat vim determinare, quam vnaquaeque corda patitur. Fig. 3.

tur. Sit vis cordae in A alligatae $= p$, vis cordae B $= q$ et vis cordae D $= r$. Quaeratur vis aequiualens binis viribus q et r, quae erit $= q + r$ atque in rectae puncto E applicata erit, ita vt sit BE : DE $= r : q$. Quare haec vis $q + r$ in E applicata vna cum vi p in aequilibrio tenere debet vim venti P: ex quo recta AE per centrum grauitatis C transeat necesse est. Quoniam vero AE per centrum grauitatis trianguli transit, erit BE $=$ DE, vnde erit $r = q$. Tum vero esse debet haec vis in E applicata $q + r$ ad vim in A, nempe p, vti AC ad CE hoc est vt 2 ad 1; atque insuper habetur $p + q + r = P$. Cum ergo sit $q = r$, et $2p = q + r$ fiet $p = q = r = \frac{1}{3}P$; vires igitur cordarum in singulis angulis applicatarum erunt inter se aequales, et vnaquaeque aequabitur trienti vis aequilibratae P.

Fig. 4. §. 745. Ponamus iam velum planum habere figuram quadrilateram ABDE, atque cordis quatuor in singulis angulis A, B, D, et E normaliter ad planum applicatis in aequilibrio contineri debere. Sit vis quam corda A sustinet $= p$; vis cordae B $= q$; vis cordae in D $= r$, et vis cordae in E $= s$; vis autem venti a velo exceptae sit $=$ P, quae pariter erit normalis ad planum veli; atque per eius centrum grauitatis C transibit. Ad vires igitur p, q, r et s determinandas primum oportet centri grauitatis C positionem definire. Ducantur diagonales AD et BE se mutuo in O decussantes: tum vtraque bisecetur in H et I: capiantur porro $Hh = \frac{1}{3}$HO et $Ii = \frac{1}{3}$IO; ac ex h ducatur diagonali BE parallela hC similique modo ex i diagonali AD parallela iC; erit harum linea

nearum ductarum intersectio C centrum grauitatis quadrilateri, quod quaerebatur.

§. 746. Conferantur iam inter se binae vires sibi diagonaliter oppositae nempe p, r et q, s: ac primo quaeratur vis binis p et r simul sumtis aequiualens, quae erit $= p + r$, et applicanda erit in puncto n, ita vt sit $p.An = r.Dn$: vnde fiet $An = \frac{r.AD}{p+r}$ et $Dn = \frac{p.AD}{p+r}$. Simili modo vis binis q et s aequiualens erit $= q + s$, atque applicanda in puncto m, vt sit $Bm = \frac{s.BE}{q+s}$ et $Em = \frac{q\,BE}{q+s}$. Quoniam itaque velum ab his duabus viribus $p + c$ et $q + s$ in n et m applicatis in aequilibrio teneri debet, recta mn per punctum C transibit; vnde erit $mi : Oh = mO : On$; tum vero erit $p + q + r + s = P$ atque $p + r : q + s = mC : nC = mi : Oi$; seu $p + r = \frac{mi.P}{mO}$ et $q + s = \frac{Oi.P}{mO}$. Ex his aequationibus tandem elicientur tres sequentes: I. $\frac{1}{2}(r - p)AD + (r + p)OH = \frac{2}{3}P.OH$ II. $\frac{1}{2}(s - q)BE + (s + q)OI = \frac{2}{3}P.OI$ atque III. $\frac{1}{2}(s - q) BE + \frac{1}{3}(s + q)OI : \frac{2}{3}(s + q)OI = \frac{2}{3}(r + p)OH : \frac{1}{2}(r - p) AD + \frac{1}{3}(r + p)\,OH$, vel $p + r + q + s = P$.

§. 747. Per has tres aequationes quatuor vires non omnes determinantur: vnde patet quaestionem hanc esse indeterminatam, vnamque cordae tensionem pro lubitu assumi posse, ex qua deinceps reliquae definiantur. Commodissime solutionem generalem autem adornabimus, si sumta vi quacunque noua u ponamus $r + p = \frac{1}{2}P + u$ et $s + q = \frac{1}{2}P - u$, atque binae priores aequationes dabunt $r - p = (\frac{1}{3}P - 2u)\frac{OH}{AD}$ et $s - q = (\frac{1}{3}P + 2u)\frac{OI}{BE}$. Hinc assumta pro lubitu vi u quatuor vires cordas tendentes ita determinabuntur, vt sit $p = \frac{1}{2}P.\frac{Ah}{AD} + u.\frac{DO}{AD}$; $q = \frac{1}{2}P.\frac{Bi}{BE}$

 $-u$

$-u.\frac{EO}{BE}, r = \frac{1}{2}P.\frac{Db}{AD} + u.\frac{AO}{AD}; s = \frac{1}{2}P.\frac{Ei}{BE} - u.\frac{BO}{BE}$. Hinc intelligitur, ſi velum in pluribus quam 4 angulis alligetur, determinationem virium, quibus ſingulae cordae tenduntur, eo magis fore indeterminatam.

Fig. 5. §. 748. Si velum non ſit planum, ſed vel ex aliquot ſuperficiebus planis compoſitum, vel etiam incuruatum, atque id in duobus punctis A et B alligetur, fieri poteſt, vt media directio vis venti CM in rectae AB punctum quodcunque C incidat et ad eam ſub angulo quocunque ACM inclinetur. Sint igitur primo directiones cordarum Aa et Bb in eodem plano cum CM ac poſita vi a vento excepta $= P$, ſit vis cordam Aa tendens $= p$, et vis cordam Bb tendens $= q$. Porro quia directiones aA et bB productae in eodem puncto rectae CM concurrere debent, ſit anguli AMB ſinus $= \alpha$, anguli ACM ſinus $= \sigma$ et coſinus $= \eta$: eritque $p : P = \text{ſin. } CMB : \alpha$; et $q : P = \text{ſin. } AMC : \alpha$ ergo $p = \frac{\text{ſin. } CMB}{\alpha}$ et $q = \frac{P \cdot \text{ſin. } AMC}{\alpha}$. Cum autem ſit $\alpha\,(\text{ſin. } AMB) : \text{ſin. } CMB = AB \,.\, CM : BC \,.\, AM = AB \text{ ſin. } CAM : BC \,.\, \sigma$ et $\alpha\,(\text{ſin. } AMB) : \text{ſin. } AMC = AB \,.\, CM : AC \,.\, BM = AB \,.\, \text{ſin. } CBM : AC \,.\, \sigma$ erit $p = \frac{\sigma P \cdot BC}{AB \cdot \text{ſin} \cdot CAM}$ et $q = \frac{\sigma P \cdot AC}{AB \cdot \text{ſin} \cdot CBM}$. Anguli autem CAM et CBM ita inter ſe erunt affecti vt ſit $\frac{AC \cdot \text{tang } CAM}{\sigma + \eta \text{ tang} \cdot CAM} = \frac{BC \cdot \text{tang} \cdot CBM}{\sigma - \eta \text{ tang} \cdot CBM}$ ſeu $\frac{\sigma \text{ cot} \cdot CAM}{AC} + \frac{\eta}{AC} = \frac{\sigma \text{ cot} \cdot CBM}{BC} - \frac{\eta}{BC}$ vel $AB.\text{ cot. } ACM = AC \text{ cot. } CBM - BC \,.\, \text{cot. } CAM$.

§. 749. Ratio huius vltimae aequationis, quae relationem continet inter angulos CAM et CBM, ad id vt rectae aA et bB productae ſe mutuo in ipſa recta CM interſecent, facile hoc modo perſpicietur. Ex M in AB demittatur perpendiculum MP quod inſtar ſinus totius conſideretur;

ſideretur; eritque CP $=$ cot. BCM $=-$ cot. ACM $=-\frac{\eta}{\sigma}$. Tum vero habebitur BP $=$ cot. CBM, et AP$=$cot. CAM: qui valores ſi loco cotangentium in vltima aequatione ſubſtituantur, prodibit $-$ AB . CP $=$ AC . BP $-$ BC . AP $=-$ AC . CP $-$ BC . CP. Hinc ergo fiet AC (BP$+$CP) $=$ BC (AP$-$CP) ſeu AC . BC $=$ BC . AC quae eſt aequatio identica. Sumtis ergo ad hanc normam angulis aAB et bBA ipſae vires, quibus cordae tendentur, ex ſuperioribus aequationibus definientur.

§. 750. His de velorum planorum vi, quam a vento excipiunt, expoſitis, pergamus ad vela incuruata, quae figuram habeant quamcunquae immutabilem, ita vt eandem figuram retineant, quantumuis ventus ea ſollicitet; cuiusmodi forent vela, ſi ex metallo, aliaue materia rigida conficerentur. Sit AMB eiusmodi velum cuius figura data ſit per aequationem inter abſciſſam AP $= x$ et applicatam PM $= y$. Irruat in hoc velum ventus celeritate debita altitudini v in directione VQM, quae cum axe AB conſtituat angulum VQN, cuius ſinus ſit $= m$ coſinus $= n$. Ducatur applicata proxima pm, vt ſit Pp $= dx$; $mn = dy$ et elementum curuae N$m = \surd(dx^2 + dy^2) = ds$; in quod ventus impinget ſub angulo VMm, vel VMA $=$ NmM $-$ PMQ, cuius ſinus propterea erit $= \frac{mdx - ndy}{ds}$. Vis igitur, quam elementum Mm a vento ſuſtinet erit vt $\frac{v(mdx - ndy)^2}{ds}$, cuius menſura abſoluta, ſi latitudo veli in hoc loco ponatur $= u$, et voluminis aquei V pondus ſit $=$ M, erit pondus $\frac{1}{800} \frac{M}{V} \cdot \frac{uv(mdx - ndy)^2}{ds}$, ponamus autem breuitatis gratia α pro quantitate conſtante $\frac{1}{800} \frac{M}{V}$, ita, vt vis quam elementam Mm latitudinem habens u ſuſtinet ſit $= \frac{\alpha uv(mdx - ndy)^2}{ds}$. Tab. XXII. fig. 1.

§. 751.

§. 751. Vis huius directio autem est normalis ad velum in M, quare si ducatur normalis KMN, vt sit PN $= \frac{ydy}{dx}$, velum vrgebitur in directione NM, vel si vis referatur ad axem AB in directione TN, vi $= \frac{\alpha uv(mdx-ndy)^2}{ds}$. Resoluatur haec vis in duas laterales RN et SN, quarum illa ad AB sit normalis, haec in ipsam AB incidat, erit ob triangula TNR et mMn similia, vis NR $= \frac{\alpha uvdx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et vis NS $= \frac{\alpha uvdy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$. Summa ergo omnium virium elementarium N S erit $= \alpha v \int \frac{udy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et summa omnium RN $= \alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$. At momentum vis R N respectu puncti A est $\frac{\alpha uv(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}$, vnde summa omnium momentorum $= \alpha v \int \frac{v(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}$, quae diuisa per $\alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ dabit punctum C in axe AB, per quod media directio vis venti CW transibit, erit scilicet AC $= \frac{\int \frac{u(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}}{\int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}}$. Atque vis tota venti reducetur ad duas vires C E et C F, quarum illa est C E $= \alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et CF $= \alpha v \int \frac{udy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ ex quarum compositione oritur vis CG vi venti, quam velum AMB sustinet, aequiualens.

§. 752. Quodsi ad angulum attendamus, quo media directio vis venti CW ab ipsa directione venti V Q declinat, facile colligemus, eum angulo recto fore eo minorem, quo magis figura veli A M B fuerit incuruata siquidem ventus totam internam veli superficiem feriat. Si enim ventus directe in velum impingat, tum quidem media directio C M ab ipsa venti directione V Q non discrepabit

bit, ex quo intelligitur discrepantiam cum obliquitate anguli AQV crescere. At vero haec obliquitas vltra certum terminum crescere non potest, quin portio veli quaedam prorsus non a vento impellatur, atque adeo inutilis euadat. Sin autem ventus maxima obliquitate, quam memorata conditio permittit, in velum illabatur, tum portionem quidem aliquam veli vehementer oblique stringet, hincque directio vis venti fere ad angulum rectum discedet a directione venti, simul vero ventus ob curuaturam veli in reliquam portionem magis directe incurret, vnde directio vis venti multo magis ad directionem venti reducetur, propterea quod vis venti directe impingentis multo maior est, quam vbi oblique venit. Ex quibus efficitur, vela plana esse aptissima non solum ad maximam vim venti excipiendam, sed etiam ad cursum aduersus ventum instituendum.

§. 753. Quanquam haec per se satis sunt plana, tamen eo magis illustrabuntur, si vim venti, quam in vela flexibila exerit, determinabimus, quo in negotio imprimis necesse est, vt curuatura, quam ventus velo inducit, definiatur, hac enim cognita per solutionem praecedentis problematis, si curuatura inuenta loco figurae AMB substituatur, vis venti eiusque media directio cognoscetur. Quae operatio primo intuitu admodum molesta videtur, cum curua veli prodeat transcendens: at vero huius curuae inuentio ipsa simul monstrabit vim venti in velum exercitam, eiusque mediam directionem; ita vt substitutione non sit opus. Cum enim curuae etiam simplicissimae in calculo superiori substitutae ad aequationes maxime intricatas deducant, ea curua, quae a natura for-

matur, dum ventus velum perfecte flexile inflat, ad simplicissimum casum perducit; etiamsi ipsa sit transcendens. Eiusmodi scilicet commoda natura semper suppeditat, vt quo strictius eam sequamur solutiones quidem subinde intricatas attamen ita comparatas obtineamus, vt quaestio commodissime satisfaciant.

Fig. 2. §. 754. Sit igitur filum perfecte flexile BMA, quod loco veli considero, in B fixum, in A autem retineatur sufficienti vi AG, ita vt a vento VM inflatum et in figuram BMA incuruatum, in hoc statu perseueret. Ad hanc curuam BMA, quam filo ventus inducit inueniendam ex A duatur ad venti directionem recta normalis AP, quae instar axis consideretur, in quo ponatur abscissa $AP = x$, respondens applicata $PM = y$; et longitudo fili $AM = s$. Quoniam iam filum perfecte flexile ponitur, necesse est, vt omnes vires, quae filum in M inflectere conantur, se mutuo destruant, nisi enim hoc eueniret, filum actu in M magis minusue inflecteretur, ideoque status, quem iam permanentem pono, turbaretur. Quia hic tantum ad flexibilitatem, quam filum in puncto M habet, attendo, in reliquis locis id tanquam rigidum contemplor; eritque pars BM omnino immobilis, pars AM vero circa M quasi polum rotari posset, si vis hunc effectum intendens adesset. Patet autem a vi AG si ea sola adesset, filum vtique circa A motum iri; ab impulsionibus venti autem in partem AM factis filum in partem contrariam replicaretur, quamobrem necesse est, vt hi duo effectus se mutuo destruant.

§. 755. Vires autem, quibus corpus quodcunque circa polum seu axem fixum conuertitur, definiuntur per

momen-

momenta, quae ex viribus respectu illius poli seu axis fixi nascuntur. Sic ad momentum ex vi AG, quae sit $= G$, cognoscendum, resoluatur haec vis in duas laterales AE et AF, axi AP cum cogruentes tum normales, ac sit vis $AE = E$ et vis $AF = F$; ita vt sit $G = \sqrt{(E^2 + F^2)}$. Hoc facto ex vi $AE = E$ nascitur momentum filum AM circa M dextrorsum rotans $= Ey$; at ex vi $AF = F$, oritur momentum sinistrorsum rotans $= Fx$, ita vt momentum ex vi G ortum et simistrorsum vrgens sit $= Fx - Ey$. Tantum ergo esse debebit momentum, quo filum circa M a vento dextrorsum sollicitatur: ad quod inueniendum capiatur quaecunque particula fili $Yy = d\omega$, et ordinatae ipsi respondentes ponantur $AX = \xi$, $XY = \phi$ et ponatur breuitatis gratia vis venti elementum Yy vrgens $= pd\omega$; quae cum sit normalis puta YZ, resoluatur in laterales YR et YS coordinatis parallelas, erit vis $YR = pd\phi$ at $YS = pd\xi$.

§. 756. Iam a vi $YR = pd\phi$ oritur momentum dextrorsum vrgens $= pd\phi(y - \phi)$, et a vi $YS = pd\xi$ momentum pariter dextrorsum tendens $= pd\xi(x - \xi)$. Illorum igitur momentorum omnium summa erit $= y\int pd\phi - \int p\phi d\phi$, si post integrationem ita peractam, vt integrale euanescat posito ξ et $\phi = 0$, ponatur $\xi = x$ et $\phi = y$; eadem ergo momentorum summa erit $= y\int pdy - \int pydy = \int dy \int pdy$, si pds denotet vim venti, quam elementum curuae Mm patitur. Simili modo summa alterorum momentorum ab A ad M vsque erit $= x\int pd\xi - \int p\xi d\xi$, si post integrationem debito modo peractam ponatur $\xi = x$: ex quo eadem momentorum summa erit $= x\int pdx - \int pxdx = \int dx \int pdx$. A vento ergo filum

lum AM dextrorſum circa M vrgebitur momento virium $=\int dy\int p\,dy + \int dx\int p\,dx$, cui aequale eſſe debet momentum $Fx-Ey$, quo idem filum ſiniſtrorſum pellitur. Hinc itaque obtinebitur iſta aequatio $Fx-Ey=\int dy\int p\,dy + \int dx\int p\,dx$ ſeu $F\,dx - E\,dy = dy\int p\,dy + dx\int p\,dx$, qua natura curuae continetur.

§. 757. Quoniam $p\,ds$ denotat vim, qua elementum $Mm = ds$ a vento normaliter vrgetur, erit $p\,ds = \frac{\alpha v dx^2}{ds}$, ſi quidem v denotet altitudinem celeritati venti debitam, et α eſt quantitas conſtans ſupra (§. 750) deſcripta. Quo autem haec ad menſuras finitas reducantur, neceſſe eſt filo latitudinem tribuere ſeu quaſi infinita eiusmodi fila ſibi parallela et contigua concipere, quo ipſo figura veli quadrangularis rectangularis reſultat, cuius longitudo cum ſit AMB, ponatur latitudo $= c$ eritque $pds = \frac{\alpha v dx^2}{ds}$, et nunc α eſt $\frac{c}{400}\cdot\frac{M}{V}$, vbi M deſignat pondus maſſae aqueae, cuius volumen eſt V. Cum igitur ſit $p = \frac{\alpha v dx^2}{ds^2}$, erit $\int p\,dx = \alpha v\int\frac{dx^3}{ds^2}$ et $\int p\,dy = \alpha v\int\frac{dx^2 dy}{ds^2}$, quia celeritas venti $\sqrt{v}$ eſt conſtans. Subſtituantur hi valores in aequatione ſupra inuenta, ac prodibit pro curua quaeſita haec aequatio $\frac{Fx-Ey}{\alpha v} = \int dy\int\frac{dx^2 dy}{ds^2} + \int dx\int\frac{dx^3}{ds^2}$: quae autem ter differentiari deberet, antequam a ſignis integralibus penitus liberetur.

§. 758. Expediet autem aequationem generalem ad formam ſimpliciorem, et a ſignis integralibus liberam perducere. Cum igitur ſit $F\,dx - E\,dy = dy\int p\,dy + dx\int p\,dx$, erit ſumto dx conſtante $-E\,ddy = ddy\int p\,dy + p\,ds^2$, et $-E = \int p\,dy + \frac{p\,ds^2}{ddy}$; quae denuo differentiata dat $0 = 3p\,dy + \frac{dp\,ds^2}{ddy} - \frac{p\,ds^2 d^3y}{ddy^2}$, ob $ds\,dds = dy\,ddy$. Hinc ergo erit $\frac{dp}{p} = \frac{d^3y}{ddy} - \frac{3dy\,ddy}{ds^2} = \frac{d^3y}{ddy} - \frac{3dds}{ds}$ quae integrata dat $p = \frac{C\,dx\,ddy}{ds^3}$.

$\frac{Cdxddy}{ds^3}$. Quocirca erit $\int p\,dx = C\int\frac{dx^2ddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Cdy}{ds} + M$; et $\int p\,dy = C\int\frac{dxdyddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-Cdx}{ds} + N$. Quibus valoribus in prima aequatione substitutis erit $F\,dx - E\,dy = \frac{-Cdxdy}{ds} + N\,dy + \frac{Cdxdy}{ds} + M\,dx$, vnde habetur $M = F$ et $N = -E$. Sumta ergo constante C, quae est arbitraria negatiua fiet $p = -\frac{Cdxddy}{ds^3}$; et $\int p\,dx = F - \frac{Cdy}{ds}$, atque $\int p\,dy = \frac{Cdx}{ds} - E$. Cum igitur puncto M in A translato tam $\int p\,dx$ quam $\int p\,dy$ euanescant, erit in A $\frac{dy}{ds} = \frac{F}{C}$ et $\frac{dx}{ds} = \frac{E}{C}$; vnde fit $C = G = \surd(EE+FF)$.

§. 759. Cum iam nostro casu sit $p = \frac{\alpha v dx^2}{ds^2}$; habebimus pro curua AMB hanc aequationem $\alpha v\,dx\,ds = -G\,ddy$, quae integrata dat $\alpha v s\,dx = -G\,dy + C\,dx$; vbi ad constantem C determinandam notasse oportet, facto $s = \alpha$, fieri $\frac{dy}{dx} = \frac{F}{E}$, vnde erit $\frac{dy}{dx} = \frac{C}{G} = \frac{F}{E}$; ideoque $C = \frac{FG}{E}$. Consequenter ista emerget aequatio $\alpha v s\,dx = \frac{G}{E}(F\,dx - E\,dy)$. Quo autem aequatio inter coordinatas, eliminato arcu s, obtineatur, resumatur aequatio $\alpha v\,dx\,ds = -G\,ddy$, quae per $\frac{dy}{ds}$ multiplicata fit $\alpha v\,dx\,dy = -\frac{Gdyddy}{\surd(dx^2+dy^2)}$, cuius integrale est $\alpha v y\,dx = C\,dx - G\,ds$; et translato M in A, quia fit $\frac{dx}{ds} = \frac{E}{G}$, erit $\frac{G}{C} = \frac{E}{G}$ et $C = \frac{G^2}{E}$; ideoque $\alpha v y\,dx = \frac{G^2dx}{E} - G\,ds$. Ergo $EG\,ds = G^2dx - \alpha v E y\,dx$; et $EG\,dy = dx\,\surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)$ siue $dx = \frac{EGdy}{\surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}$ et $ds = \frac{dy(G^2 - \alpha v E y)}{\surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2y + \alpha^2v^2E^2y^2)}$

§. 760. Hinc primum patet directionem vis G velum retinentis cum tangente curuae in A congruere; translato enim M in A fit $dx:ds = AE:AG$. Deinde intelligi-

telligitur curuam AM vbique concauitatatem axi AP obvertere: ex aequatione generali enim $p = \frac{-Gdxddy}{ds^3}$, sequitur ddy vbique habere valorem negatiuum, quod est signum concauitatis. Hancobrem curua alicubi habebit tangentem axi AP parallelam, quod eueniet, vbi fit $dy = 0$, seu $ds = dx$. Cum igitur sit $EGds = G^2dx - \alpha v Eydx$ facto $ds = dx$ fiet $y = \frac{G^2 - EG}{\alpha v E}$; haec est ergo applicata maxima in curuatura veli AMB; et curua vltra hunc locum iterum ad axem AP accedet, donec ipsi occurrat. Denique ex aequationibus inuentis assignari potest longitudo arcus $AM = s$, per applicatam $PM = y$; erit enim per vltimam aequationem integratam $s = \frac{FG - \surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}{\alpha v E}$ et radius osculi curuae in M, qui est $= -\frac{ds^3}{dxddy}$, fiet $= \frac{G}{p} = \frac{Gds^2}{\alpha v dx^2} = \frac{(G^2 - \alpha v E y)^2}{E^2 G}$.

Fig. 3. §. 761. Ponamus iam AMHB esse curuam veli a vento in directione VDH incurrente formatam, et quoniam positis $AP = x$; $PM = y$, et $AM = s$, est $dx = \frac{EGdy}{\surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}$ et $ds = \frac{dy(G^2 - \alpha v E y)}{\surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}$, ducatur ordinata maxima DH, quae nunc instar axis consideretur; ad quam ex M ducto perpendiculo MQ, ponatur $HQ = t$ et $MQ = z$; erit ob $HD = \frac{G^2 - EG}{\alpha v E}$; $PM = y = \frac{G^2 - EG}{\alpha v E} - t$; et $dx = -dz$; vnde fit $dy = -dt$ et $\surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2) = E\surd(2\alpha v Gt + \alpha^2 v^2 tt)$. Quare erit $dz = \frac{Gdt}{\surd(2\alpha v Gt + \alpha^2 v^2 tt)}$. Ponatur $\frac{G}{\alpha v} = a$, eritque $dz = \frac{adt}{\surd(2at + tt)}$; et quantitas a erit radius osculi curuae in puncto H, quod est quasi vertex curuae. Nam quia ob signum radicale eidem valori t respondet applicata z tam affirmatiua quam negatiua, erit axis HD simul curuae diameter orthogonalis.

§. 762.

§. 762. Ex data ergo curuatura veli AHB, quae inter coordinatas $HQ = t$ et $QM = z$ ista aequatione exprimitur $dz = \frac{adt}{\sqrt{(2at + tt)}}$, innotescit vis, quae ad velum in dato loco A retinendum requiritur. Erit namque haec vis $G = \alpha a v$, ideoque constans: vnde ad velum in quocunque loco retinendum eadem requiritur vis, cuius directio cum tangente curuae in eo loco congruere debet. Scilicet si veli latitudo ponatur $= c$; atque massae aqueae, cuius volumen sit $= V$, pondus sit $= M$, quia est $\alpha = \frac{c}{800}\frac{M}{V}$; erit vis ad velum in quolibet loco detinendum requisita $= \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$, seu ista vis aequabitur ponderi massae aereae cuius volumen est $= acv$; erit ergo hoc volumen parallelepipedon rectangulum, cuius tres dimensiones sunt, radius osculi curuaturae veli in vertice H; latitudo veli c, et altitudo debita celeritati venti v. Haec eadem vis autem simul praebet tensionem veli in singulis locis, qua superficies veli diruptioni resistit, quae ergo erit in duplicata ratione celeritatis venti, si velum eandem curvaturam conseruet.

§. 763. Quoniam est $dz = \frac{adt}{\sqrt{(2at + tt)}}$ erit integrando $z = a l \frac{a + t + \sqrt{(2at + tt)}}{a}$. Quodsi ergo ponatur $HD = f$ et $AD = b$ erit $b = a l \frac{a + f + \sqrt{(2af + ff)}}{a}$; et si in A ducatur tangens AK axi occurrens in K, erit anguli AKH tangens $= \frac{a}{\sqrt{(2af + ff)}}$; ideoque sinus $= \frac{a}{a + f}$; et cosinus $= \frac{\sqrt{(2af + ff)}}{a + f}$. Si igitur in axe capiatur $HI = a$ erit $DI = a + f$; ideoque habebitur $AK : AD = DI : HI$. Posito porro arcu $HM = s$, erit $ds = \frac{dt(a + t)}{\sqrt{(2at + tt)}}$; atque ipse arcus $HM = s = \sqrt{(2at + tt)}$; vnde erit arcus $AH = \sqrt{(2af + ff)}$. Denique radius osculi in M erit $= \frac{ds^3}{-dtddz}$

$=$

$= \frac{(c+t)^2}{a}$; vnde in puncto A erit radius osculi $= \frac{(a+f)^2}{a} = \frac{DI^2}{HI}$; quae ſunt praecipue curuae velariae proprietates.

§. 764. Conſideremus nunc velum AHB quod vento directe ita exponatur, vt directio venti VH ſit ad rectam AB normalis; quae recta AB per veli extremitates A et B, quibus eſt fixum, tranſeat. Sit diſtantia extremitatum $AB = 2b$ et longitudo veli ſeu curua AHB $= 2g$, quae duae res in praxi ſolent eſſe datae; vento ergo in directione VH incurrente velum in curuam ante deſcriptam incuruabitur, eritque eius vertex in H exiſtente HD diametro curuae. Ponatur radius oſculi in H, $= a$; et interuallum $HD = f$; habebimus ad has quantitates a et f determinandas iſtas duas aequationes $b = a\, l \frac{a+f+\sqrt{(2af+ff)}}{a}$ et $g = \sqrt{(2af+ff)}$; vnde erit $f = \sqrt{(aa+gg)} - a$. et $b = a\, l \frac{g+\sqrt{(aa+gg)}}{a}$, ex qua aequatione valor ipſius a erui debet. Quod quo facilius praeſtari poſſit expediet logarithmum per ſeriem exprimere, eritque $b = g - \frac{1 \cdot g^3}{2 \cdot 3 a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot g^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 a^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot g^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 a^6} +$ etc. vnde ſi cognitus eſſet valor ipſius a, reperiri poſſet facile valor ipſius b.

§. 765. Ex hac aequatione primum apparet ſi fuerit $b = g$ ſeu diſtantia AB ipſi veli longitudini AHB aequalis, fore $a = \infty$, quod quidem per ſe eſt manifeſtum, quia hoc caſu velum in lineam rectam erit extenſum, cuius radius curuedinis vbique eſt infinitus. Quodſi ergo b nonmulto fuerit minor quam g, qui caſus ſolet eſſe frequentiſſimus, erit proxime $b = g - \frac{g^3}{6aa}$, ideoque $\frac{g^3}{6aa} = g - b$, vnde prodit $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{6(g-b)}}$; hicque erit valor ipſius a, ſi velum vehementer extendatur, vt longitudo AHB non multum ſuperet rectam AB. Sin autem accurratius

rem definire velimus, ſumatur $b = g - \frac{g^3}{6aa} + \frac{3g^5}{40a^4}$, ſeu $0 = (g-b)a^4 - \frac{g^3aa}{6} + \frac{3}{40}g^5$; et ponatur $a^2 = \frac{g^3}{6(g-b)} + k$, et orietur $0 = \frac{g^6}{36(g-b)} + \frac{g^3k}{3} - \frac{g^6}{36(g-b)} - \frac{g^3k}{6} + \frac{3}{40}g^5$ ſeu $0 = k + \frac{9}{20}gg$; vnde erit $aa = \frac{g^3}{6(g-k)} - \frac{9gg}{20}$ atque $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{6(g-b)}} - \frac{9}{40}\sqrt{6g(g-b)}$, qui valor pro praxi ordinaria ſatis tuto ſemper vſurpari poterit.

§. 766. Quodſi ergo velum AH vento ita directe opponatur, vt directio venti VH ad rectam AB ſit normalis, ex datis $AB = 2b$ et longitudine veli $AHB = 2g$ definietur radius oſculi in vertice curuae A, quem poſuimus $= a$, hincque ſinus veli $DH = f = \sqrt{(aa+gg)} - a$. His cognitis ſi ducantur in A et B tangentes curvae AK et BK, erit anguli AKD ſeu BKD tangens $= \frac{a}{\sqrt{(2af+ff)}} = \frac{a}{g}$; et vires, quae requiruntur ad velum in hoc ſtatu ſuo continendum, in directionibus Aa et Bb agentes erunt $= \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$, cum his igitur binis viribus in aequilibrio erit vis venti a velo excepta. Sit haec vis $= P$, erit ex natura aequilibrii $\frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$; $P =$ ſin. AKD : ſin. $AKB = 1 : 2$ coſ. AKD, hoc eſt vt $1 : \frac{2g}{\sqrt{(aa+gg)}}$. Erit ergo vis venti $P = \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V} \frac{2g}{\sqrt{(aa+gg)}}$. Cum autem ſit $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{6(g-b)}} - \frac{9}{40}\sqrt{6g(g-b)}$, erit $\frac{a}{\sqrt{(aa+gg)}} = 1 - \frac{3(g-b)}{g}$ erit $P = \frac{cv(3b-2g)}{400} \frac{M}{V}$.

§. 767. Manentibus ergo celeritate venti et latitudine veli c iisdem, vis venti in velum exerta erit vt $3b - 2g$. Sit primum $b = g$, quo caſu velum in planum extenditur et ob a infinitum vires requiruntur infinitae magnae ad velum in ſtatu hoc continendum; interim tamen vis a vento excepta erit vt g, qua nauis propelletur. Sit

 iam

iam $b = \frac{n-1}{n} g$, fiet vis venti vt $\frac{n-3}{n} g$; quae ergo erit ad vim eiusdem veli plani vt $n - 3$ ad n. Quamobrem si $n = 6$, hoc est si fuerit longitudo AB ad longitudinem veli AHB vt 5 ad 6, tum vis a vento orta duplo erit minor, quam si velum esset in planum extensum; minores valores pro n assumere non licet quia approximatio instituta hoc non permittit. Si velum planum longitudinis $AB = 2b$ concipiatur, foret eius vis a vento accepta vt b hoc est vt $\frac{n-1}{n} g$. Quare vires, quas ventus idem exerit I in velum AHB, II in velum planum AB, et III in velum AHB in planum expansum, erunt vt I, $n - 3$; II $n - 1$; III, n: sicque duplici modo vis venti in velum incurvatum diminuitur.

§. 768. Per obseruationes autem praeter interuallum AB et longitudinem veli AHB commode innotescit sinuamen veli seu distantia $HD = f$; qua cognita sine valore radii osculi a vis venti in velum exercita definiri potest. Cum enim sit $g = \sqrt{(2af + ff)}$, fiet $a = \frac{gg - ff}{2f}$ et $\sqrt{(aa + gg)} = \frac{gg + ff}{2f}$. Quare cum vis a vento excepta sit $P = \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{2g}{\sqrt{(aa + gg)}}$ fiet factis substitutionibus $P = \frac{2gcvM}{800V} \cdot \frac{gg - ff}{gg + ff}$, vbi est g semissis longitudinis veli AHB. Hinc sequitur fore vim venti in velum AHB, si esset in planum expansum, ad vim venti in idem velum incurvatum AHB vti est 1 ad $\frac{gg - ff}{gg + ff}$ seu vt $gg + ff$ ad $gg - ff$. Si igitur esset sinuamen HD pars decima totius veli longitudinis AHB, ita vt sit $f = \frac{1}{5} g$, erit vis huius veli in planum expansi ad vim eiusdem incuruati vt 1 ad $\frac{24}{26}$, seu vt 13 ad 12, ita vt per hanc incuruationem pars decima tertia vis pereat.

§. 769. Multo difficilior autem eſt quaeſtio, ſi recta A B extremitates A et B veli iungens cum directione venti VH obliquum faciat angulum BFH; atque longitudo veli AHB data ſit: tum enim primo axis ſeu diameter curuae velariae et ipſa curuae, quam velum induet, poſitio determinari debet, qua cognita praeter quantitatem vis, quam ventus in velum exerit, eius directio erit definienda, quae aliquantum a venti directione VH diſcrepabit. Manifeſtum quidem eſt, ſi velum eſſet planum, hoc eſt, ſi longitudo AHB non excederet interuallum A B, tum directionem vis venti normalem futuram eſſe ad rectam AB; incuruatio autem non ſolum hanc venti vim diminuet, ſed etiam directionem eius propius ad venti directionem VH adducet. Atque ob hanc rationem laxitas velorum plurimum curſui adverſus ventum inſtituendo obeſt, quippe ad quem curſum requiritur, vt directio vis a vento exceptae plurimum diſcrepet ab ipſa venti directione, plus autem, quam ad angulum rectum diſcrepare nequit. Tab. XXII. fig. 4.

§. 770. Sit igitur interuallum $AB = b$, et longitudo veli $AHB = g$, ita vt ſit $g > b$; ponatur anguli BFH quem directio venti cum poſitione rectae AB facit, ſinus $= m$ coſinus $= n$, quae ſunt cognita. Tum ex incognitis ſit VH axis curuae, quam velum induit, a eius radius oſculi in vertice H, atque ad hunc axem ex punctis A et B demiſſis perpendiculis AD et BE, ponatur $HD = t$; $AD = u$; et $HE = x$; $BF = y$; erit ex natura curuae $u = \int \frac{adt}{\sqrt{(at + tt)}}$ et $y = \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax + xx)}}$; atque arcus $AH = \sqrt{(2at + tt)}$ et arcus $BH = \sqrt{(2ax + xx)}$. Tum vero erit $BE + AD = mb$ et $HD - HE = nb$, ex

ex quibus resultabunt tres sequentes aequationes $u + y = mb$; $t - x = nb$ et $g = \sqrt{(2at + tt)} + \sqrt{(2ax + xx)}$ ita vt habeantur quinque aequationes, ex quibus has quinque incognitas t, u, x, y, et a definiri oportebit, quod opus nisi subsidium adsit, esset maxime laboriosum et prolixum.

§. 771. Quoniam autem in praxi longitudo veli g non multum excedere solet interuallum AB, velum non admodum incuruabitur, eritque id circo radius curuedinis a quantitas praegrandis, ita vt futurum sit proxime $\sqrt{(2at + tt)} = \sqrt{2at} + \frac{tt}{2\sqrt{2at}}$; $\frac{a}{\sqrt{(2at + tt)}} = \frac{a}{\sqrt{2at}} - \frac{t}{4\sqrt{2at}}$; et $\sqrt{(2ax + xx)} = \sqrt{2ax} + \frac{xx}{2\sqrt{2ax}}$; $\frac{a}{\sqrt{(2ax + xx)}} = \frac{a}{\sqrt{2ax}} - \frac{x}{4\sqrt{2ax}}$. Vnde erit $u = \sqrt{2at} - \frac{tt}{6\sqrt{2at}}$ et $y = \sqrt{2ax} - \frac{xx}{6\sqrt{2ax}}$. Ex his definitis fit $\sqrt{2at} + \sqrt{2ax} - \frac{tt}{6\sqrt{2at}} - \frac{xx}{6\sqrt{2ax}} = mb$; $t - x = nb$; et $g = \sqrt{2at} + \sqrt{2ax} + \frac{tt}{2\sqrt{2at}} + \frac{xx}{2\sqrt{2ax}}$. Ergo $g - mb = \frac{2tt}{3\sqrt{2at}} + \frac{2xx}{3\sqrt{2ax}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{3(g - mb)}{2t\sqrt{t} + 2x\sqrt{x}}$; ideoque $\sqrt{2a} = \frac{2t\sqrt{t} + 2x\sqrt{x}}{3(g - mb)}$. Substituatur hic valor pro a inuentus in altera aequatione, prodibitque $g = \frac{2tt + 2xx + 2t\sqrt{tx} + 2x\sqrt{tx}}{3(g - mb)} + \frac{3}{4}(g - mb)$; ideoque erit $(t^{1:2} + x^{1:2})(t^{3:2} + x^{3:2}) = \frac{3(g + 3mb)(g - mb)}{8}$.

§. 772. Ad has aequationes resoluendas pono $\sqrt{t} + \sqrt{x} = q$, $\sqrt{t} - \sqrt{x} = r$; erit $\sqrt{t} = \frac{q + r}{2}$, $\sqrt{x} = \frac{q - r}{2}$; et $t - x = qr$; atque $t^{3:2} + x^{3:2} = \frac{q^3 + 3qrr}{4}$, vnde erit $\sqrt{2a} = \frac{q(qq + 3rr)}{6(g - mb)}$ et reliquae aequationes fient $qr = nb$ et $\frac{qq(qq + 3rr)}{4} = \frac{3(g + 3mb)(g - mb)}{8}$ seu $qq(qq + 3rr) = \frac{3}{2}(g + 3mb)(g - mb)$, per priorem vero est $qqrr = nnbb$, ergo illa per hanc diuisa $\frac{qq + 3rr}{rr} = \frac{3(g + 3mb)(g - mb)}{2nnbb}$; vnde est $\frac{qq}{rr} = \frac{3(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}{2nnbb}$, et $\frac{q}{r} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}}{nb}$ vnde denique fit $q = \sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg + 2mgb - 3mmbb - 2nnbb)}$

et

et $r = \frac{nh}{\sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg + 2mgh - 3mmhh - 2nnhh)}}$. Ex his fit

$$\sqrt{t} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}(gg + 2mgh - 3mmhh - 2nnhh)} + nh}{2\sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg + 2mgh - 3mmhh - 2nnhh)}}$$ atque

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}(gg + 2mgh - 3mmhh - 2nnhh)} - nh}{2\sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg + 2mgh - 3mmhh - 2nnhh)}}.$$

§. 773. Cum deinde ſit $\sqrt{2a} = \frac{q(qq+rr)}{6(g-mh)}$; erit $\sqrt{2a} = \frac{g+3mh}{4q} = \frac{g+3mh}{4\sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg+2mgh-3mmhh-2nnhh)}}$; atque $a = \frac{(g+3mh)^2}{16\sqrt{6(gg+2mgh-3mmhh-2nnhh)}}$; vnde cognoſcetur vis, qua velum in A et B ſecundum tangentes trahi debet, quo in aequilibrio retineatur, erit ſcilicet vtraque vis $= \frac{acv}{800}\frac{M}{V}$. Ducantur ergo ex A et B tangentes AK et BL, quae ſe mutuo ſecent in O, et quia vires ambae ſunt aequales, media directio vis venti GO angulum AOB biſecabit; erit autem angulus AOB = AKH + BLH; ideoque AOG = ½ AKH + ½ BLH, et angulus OGL = ½ BLH − ½ AKH. Quodſi autem vis ipſa venti ponatur = P fiet P: $\frac{acv}{800}\cdot\frac{M}{V}$ = ſin. AOB: ſin. ½ AOB = 2 coſ. ½ (AKH + BLH): 1. ideoque erit vis $P = \frac{acv\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(AKH+BLH)}{400}\cdot\frac{M}{V}$.

§. 774. Eſt vero anguli AKH coſinus $= \frac{\sqrt{(2at+tt)}}{a+t} = \frac{\sqrt{2at}}{a} - \frac{3tt}{2a\sqrt{2at}}$, et anguli BLH coſinus $= \frac{\sqrt{(2ax+xx)}}{a+x} = \frac{\sqrt{2ax}}{a} - \frac{3xx}{2a\sqrt{2ax}}$; vnde erit ſin. ½ AKH $= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2at}}{2a} + \frac{3tt}{4a\sqrt{2at}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{at}}{2a}}$; et coſ. ½ AKH $= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{at}}{2a}}$; ſimilique mo-

 do

do ſin. $\frac{1}{2}$BLH $= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{ax}}{2a}}$, et coſ. $\frac{1}{2}$BLH $= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{ax}}{2a}}$. Ex his fit coſ. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) $= \frac{x}{\sqrt{2ax}} + \frac{t}{\sqrt{2at}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}(\sqrt{t} + \sqrt{x}) = \frac{q}{\sqrt{2a}} = \frac{6(g-mb)}{qq+3rr}$ et a coſ. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) $= \frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \frac{q\sqrt{2a}}{2} = \frac{qq(qq+rr)}{12(g-mb)}$; et eſt $qq(qq+3rr) = \frac{3}{2}(g+3mb)(g-mb)$ ergo a coſ. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) $= \frac{1}{8}(g+3mb)$; vnde prodit vis a vento excepta $P = \frac{cv(g+3mb)}{3200} \cdot \frac{M}{V}$; hacque vi velum a vento in directione GO propelletur.

§. 775. Haec expreſſio tantum prope eſt vera, et quoniam ſinus et coſinus angulorum $\frac{1}{2}$ AKH et $\frac{1}{2}$ BLH tantum ad duos terminos expreſſimus neglectis ſequentibus omnibus, dum in praecedentibus vlterius proceſſimus, nimium concluſio a veritate aberrabit. Quocirca eosdem ſinus et coſinus accuratius exhiberi conueniet; extractione radicis autem vlterius producta reperietur:

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2}\text{AKH} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{\sqrt{at}}{2a} - \frac{t}{4a\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{t}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7tt}{32aa\sqrt{2}}$$
$$\text{coſ. } \tfrac{1}{2}\text{AKH} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{\sqrt{at}}{2a} - \frac{t}{4a\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{t}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7tt}{32aa\sqrt{2}}$$
$$\text{ſin } \tfrac{1}{2}\text{BLH} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{\sqrt{ax}}{2a} - \frac{x}{4a\sqrt{2}} + \frac{x\sqrt{x}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7xx}{32aa\sqrt{2}}$$
$$\text{coſ. } \tfrac{1}{2}\text{BLH} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \frac{\sqrt{ax}}{2a} - \frac{x}{4a\sqrt{2}} - \frac{x\sqrt{x}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7xx}{32aa\sqrt{2}}.$$

Ex quibus debito modo combinatis colligitur: coſ. $\frac{1}{2}$(BLH − AKH) $= 1 - \frac{(\sqrt{t}-\sqrt{x})^2}{4a} + \frac{(\sqrt{t}-\sqrt{x})^2(7t+6\sqrt{tx}+7x)}{32aa}$ et coſ. $\frac{1}{2}$(BLH + AKH) $= \frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{t}-x\sqrt{x}}{2a\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{x}-x\sqrt{t}}{4a\sqrt{2a}}$.

§. 776. Reſumamus ſuperiores ſubſtitutiones $\sqrt{t} + \sqrt{x} = q$ et $\sqrt{t} - \sqrt{x} = r$, vnde eſt $\sqrt{t} = \frac{q+r}{2}$ et $\sqrt{x} = \frac{q-r}{2}$; et fiet $7t + 6\sqrt{tx} + 7x = 5qq + 2rr$. Quibus ſubſtitutis prodibit coſ. $\frac{1}{2}$(BLH − AKH) = coſ. OGL $= 1 - \frac{rr}{4a} + \frac{rr(5qq+2rr)}{32aa}$. At ex ſuperioribus eſt $q = \frac{g+3mb}{4\sqrt{2a}}$ et $r = \frac{4nb\sqrt{2a}}{g+3mb}$ et $a = \frac{(g+3mb)^2}{16\sqrt{6}(gg+2mgb-3mmbb-4nnbb)}$.

Atque

Atque ex his obtinebitur cof. OGL $= 1 - \frac{8nnhh}{(g+3mh)^2} + \frac{240\, nnhh(g-mh)}{(g+3mh)^3} - \frac{416\, n^4 h^4}{(g+3mh)^4}$. Ad vim ipfam venti P autem inueniendam erit: a cof. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) $= \frac{q\sqrt{2a}}{2} - \frac{q(2t-\sqrt{tx}+2x)}{4\sqrt{2a}} = \frac{q\sqrt{2a}}{2} - \frac{q(qq+rr)}{8\sqrt{2a}}$ ideoque oritur a cof. $\frac{1}{2}$AOB $= \frac{g+3mh}{8} - \frac{3}{4}(g-mh) = \frac{9mh-5g}{8}$. Ex quo inuenitur vis velum in directione GO vrgens $=$ P $= \frac{cv(9mh-5g)}{3200} \cdot \frac{M}{V}$; quae multo propius ad veritatem accedit.

§. 777. Interim tamen patet, hanc approximationem vfurpari non poffe, fi vel h multo minor fit quam g, vel etiam angulus BFH fenfibiliter a recto difcrepet. Quamobrem relicta approximatione praecedente, quae ex hypothefi quod a fit quantitas vehementer magna; quippe quae fatis exigua imo nulla effe poteft, fi obliquitas anguli BFH fit permagna, et ifte angulus penitus euanefcat, etiamfi h non multo minor fit quam g. Refumamus igitur fine vlla approximatione fuperiores aequationes, quae erant: $g = \sqrt{(2at+tt)} + \sqrt{(2ax+xx)}$; $nh = t-x$; et applicatis u et y per logarithmos integratis fiet $e^{\frac{mh}{a}} aa = (a+t+\sqrt{(2at+tt)})(a+x+\sqrt{(2ax+xx)})$, denotante e numerum, cuius logarithmus $= 1$. Quodfi iam ponatur $t+x=p$, ob $t-x=nh$, prima aequatio reducta dabit $p = -2a + g\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnhh}+1)}$.

§. 778. Cum igitur fit $t = \frac{p+nh}{2}$ et $x = \frac{p-nh}{2}$ erit $t = -a + \frac{nh}{2} + \frac{g}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnhh}+1)}$ atque $x = -a - \frac{nh}{2} + \frac{g}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnhh}+1)}$. Tum vero erit $\sqrt{(2at+tt)} = \frac{g}{2} + \frac{nh}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnhh}+1)}$ et $\sqrt{(2ax+xx} = \frac{g}{2} - \frac{nh}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnhh}+1)}$. Qui valores fi in tertia aequatione

fubfti-

ſubſtituantur, extracta radice quadrata erit $\frac{2a}{\surd(gg-nnbb)}$ $e^{\frac{mb}{2a}} = 1 + \surd\left(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1\right)$, ex qua aequatione valorem ipſius a erui oportet. Ad hoc ponatur breuitatis ergo $\surd(gg-nnbb) = b$; et fiet $2ae^{\frac{mb}{2a}} = b + \surd(4aa+bb)$ ſeu $\frac{mb}{2a} = l\frac{b+\surd(4aa+bb)}{2a}$, logarithmo autem in ſeriem conuerſo fiet $\frac{mb}{2a} = \frac{b}{2a} - \frac{1\, b^3}{2\cdot 3\cdot 8 a^3} + \frac{1\cdot 3\, b^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 32 a^5}$ — etc. ſeu $mb = b - \frac{b^3}{6\cdot 4aa} + \frac{3}{40}\frac{b^5}{16a^4} - \frac{5\, b^7}{112\cdot 64 a^6} +$ etc.

§. 779. Haec ſeries, ſi b non multo minor fuerit quam g, ſemper vehementer conuergit, nam angulus BFH propemodum fuerit rectus, erit radius oſculi a vehementer magnus. Sin autem angulus BFH fiat vehementer paruus, tum ob n proxime $= 1$, fiet b quantitas minima; vnde et hoc caſu ſeries valde conuergit, etiamſi a non ſit quantitas tantopere magna. Ob has ergo rationes erit proxime $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b}$. Ponatur autem $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b} + r$ erit $\frac{b^4}{16a^4} = \frac{36(b-mb)^2}{bb}$, et $r = \frac{81(b-mb)^2}{5bb}$; vnde fiet propius $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b} + \frac{81(b-mb)^2}{5bb}$, hincque $2a = \frac{b\surd b}{\surd 6(b-mb)} - \frac{9\surd 6b(b-mb)}{40}$, quo valore tanquam ſatis accurato tuto vti licebit.

§. 780. Cognito itaque valore ipſius a, erit: ſin. $\frac{1}{2}$ AKH $= \surd\frac{a+t-\surd(2at+tt)}{2(a+t)} = \surd\frac{(g-nb)(\surd(4aa+bb)-b)}{2nbb+2g\surd(4aa+bb)}$, coſ. $\frac{1}{2}$ AKH $= \surd\frac{a+t+\surd(2at+tt)}{2(a+t)} = \surd\frac{(g+nb)(\surd(4aa+bb)+b)}{2nbb+2g\surd(4aa+bb)}$, ſin. $\frac{1}{2}$ BLH $= \surd\frac{a+x-\surd(2ax+xx)}{2(a+x)} = \surd\frac{(g+nb)(\surd(4aa+bb)-b)}{-2nbb+2g\surd(4aa+bb)}$, coſ. $\frac{1}{2}$ BLH $= \surd\frac{a+x+\surd(2ax+xx)}{2(a+x)} = \surd\frac{(g-nb)(\surd(4aa+bb)+b)}{-2nbb+2g\surd(4aa+bb)}$. Ex his pro horum angulorum ſumma ac differentia reperitur coſ. $\frac{1}{2}$ AKH. coſ. $\frac{1}{2}$ BLH $= \frac{b(\surd(4aa+bb)+b)}{2\surd(b^4+4aagg)}$, atque ſin. $\frac{1}{2}$ AKH. ſin. $\frac{1}{2}$ BLH $=$

b(√

$\frac{b(\sqrt{(4aa+bb)}-b)}{2\sqrt{(b^4+4aagg)}}$; vnde erit cos. $\frac{1}{2}$ (AKH + BLH) = cos. $\frac{1}{2}$ AOB = $\frac{bb}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$ et cos. $\frac{1}{2}$ (BLH - AKH) = cos. OGK = $\frac{b\sqrt{(4aa+bb)}}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$.

§. 781. Cum igitur recta OG sit directio media vis venti, quam velum AHB sustinet, ea cognoscetur ex angulo OGK, quem haec directio vis venti cum vera venti directione VH facit, cuius anguli cum sit cosinus = $\frac{b\sqrt{(4aa+bb)}}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$ erit eiusdem sinus = $\frac{2nab}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$, et tangens = $\frac{2nab}{b\sqrt{(4aa+bb)}}$. Fit autem substituto valore ipsius a ante inuento: cos. OGK = $\sqrt{\frac{116bb-192mbb+81mmbb}{116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb}}$ sin: OGK = $\frac{nb\sqrt{5}}{\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb)}}$; ergo tang. OGK = $\frac{nb\sqrt{5}}{\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb)}}$. Hinc primo patet si sit $n=0$ et $m=1$, seu si directio venti VH ad AB sit normalis, fore angulum OGK = 0; at si angulus VFA fere euanescat, vt sit proxime $n=1$ et $m=0$ erit tang. OGK = $\frac{b\sqrt{5}}{\sqrt{110(gg-bb)}}$; qui ergo angulus fit rectus si $b=g$, hoc est si velum in planum extendatur.

§. 782. Cum deinde posita vis venti in velum exertae quantitate = P, sit P = $\frac{cv}{400}\cdot\frac{M}{V}\cdot a$ cos. $\frac{1}{2}$ (AKH + BLH), erit a cos. $\frac{1}{2}$ (AKH + BLH) = $\frac{abb}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$ = $\frac{bb}{2nb}$ sin. OGH = $\frac{bb\sqrt{5}}{2\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb)}}$: atque his substitutis fiet P = $\frac{bbcv}{800nb}\cdot\frac{M}{V}$ sin. OGH, vel etiam P = $\frac{bbcvM\sqrt{5}}{800V\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb)}}$ existente $bb=gg-nnbb$. Si ponatur $m=1$ et $n=0$, quo casu fit recta AB normalis ad directionem venti, erit $b=g$; fitque P = $\frac{ggcvM\sqrt{5}}{800V\sqrt{(116gg-192gb+81bb)}}$, et si insuper fiat $b=g$, erit P = $\frac{gcvM}{800V}$; quae est ea ipsa expressio, quam supra pro vi venti in velum planum normaliter impingentis inuenimus.

§. 783. Quoniam b ad g proxime accedit ponamus $b = g - u$ eritque u quantitas valde parua. Hinc fit $bb = mmgg + 2nngu - nnuu$ et $b = mg + \frac{nnu}{m} - \frac{nnuu}{2m^3 g}$; quibus substitutis prodit $\sqrt{(116bb - 192mbb + 81mmbb + 5nnbb)} = \sqrt{(5gg + 30gu - 15uu + \frac{96uu}{mm})}$. Ergo habebitur $P = \frac{Mcv(mmgg + 2nngu - nnuu)}{800V\sqrt{(gg + 6gu - 3uu + \frac{96uu}{5mm})}}$. Cum vero sit $(gg + 6gu - 3uu + \frac{96uu}{5mm})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{g} - \frac{3u}{gg} + \frac{15uu}{g^3} - \frac{48uu}{5mmg^3}$ erit $P = \frac{Mcv}{800V}(mmg - 3mmu + 2nnu + \frac{uu}{5g}(27mm - 83nn))$ et sin. $OGH = n(1 - \frac{4u}{g} + \frac{18uu}{gg} - \frac{48uu}{5mmgg}$ Quae formulae pro quouis casu satis expedite tam mediam directionem quam ipsam quantitatem vis venti in velum impensae praebebunt.

§. 784. At praeter angulum OGH, quem directio vis venti cum ipsa venti directione facit, ad verum mediae directionis OG situm definiendum nosse oportet punctum C, in quo media directio vis venti OG rectam AB secat. Est autem ob angulum AOB bifariam sectum, AC : BC = AO : BO = sin. ABO : sin. BAO; qui anguli ex iam cognitis ita definiuntur, vt sit sin ABO = sin. (BFH + BLH) et sin. BAO = sin. (BFH − AKH); ad quos exprimendos est sin. BFH $= m$; et cos. BFH $= n$ sin. BLH $= \frac{2ab}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$; cos. BLH $= \frac{bg - nb\sqrt{(4aa + bb)}}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$ sin. AKH $= \frac{2ab}{nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$; cos. AKH $= \frac{bg + nb\sqrt{(4aa + bb)}}{nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$. Ex quibus per angulorum compositionem impetrabimus sin. ABO = sin. (BFH + BLH) $= \frac{mbg + 2nab - mnb\sqrt{(4aa + bb)}}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$ sin. BAO = sin. (BFH − AKH) $= \frac{mbg - 2nab + mnb\sqrt{(4aa + bb)}}{nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$.

§. 785.

§. 785. His ſinuum expreſſionibus ad communem denominatorem redactis, reperietur ratio AC : BC $=$ $2nnabbh - 4mnaagh + b(mbb + 2nag) \sqrt{}(4aa + bb) : 2nnabbh + 4mnaagh + b(mbb - 2nag) \sqrt{}(4aa + bb)$; quae commodius per factores ita exhibetur AC : BC $= 2nah(nbb - 2mag) + b(mbb + 2nag) \sqrt{}(4aa + bb) : 2nah(nbb + 2mag) + b(mbb - 2nag) \sqrt{}(4aa + bb)$, vnde ſit AB : AC − BC $=$ $2nnabbh + mb^3 \sqrt{}(4aa + bb) : - 4mnaagh + 2nabg \sqrt{}(4aa + bb)$. Cum ergo ſit AB $= h$ fiet AC − BC $= \frac{2nagh(b\sqrt{(4aa+bb)} - 2mah)}{bb(mb\sqrt{(4aa+bb)} + 2nnah)} = \frac{2nagh(4maagg + mb^4 - 2abh\sqrt{(4aa+bb)})}{bb(4aabb - 4nnaagg + mmb^4)}$. At eſt $\frac{\sqrt{(4aa+bb)}}{2a} = \sqrt{}\left(1 + \frac{6(b-mh)}{b} + \frac{81(b-mh)^2}{5bb}\right) = 1 + \frac{3(b-mh)}{b} + \frac{18(b-mh)^2}{5bb}$ ergo AC − BC $=$

$$\frac{4nagh(b-mh)\left(2 + \frac{9(b-mh)}{5b}\right)}{bb\left(mb + nnh + 3m(b-mh) + \frac{18m(b-mh)^2}{5b}\right)} =$$

$2ng\left(\frac{1}{3} - \left(\frac{4m}{3b} + \frac{3}{20b}\right)(b-mh)\right) \sqrt{} \frac{6(b-mh)}{b}$. Punctum ergo C ſemper quam minime a rectae AB puncto medio diſtabit.

§. 786. Sit vt ante poſuimus $h = g - u$, atque u quantitas reſpectu g vehementer parua, erit $b^2 = mmgg + 2nngu$, neglectis terminis, in quibus u plures vna habet dimenſiones, et $b = mg + \frac{nnu}{m}$; vnde erit $b - mh = mu + \frac{nnu}{m} = \frac{u}{m}$, et $\sqrt{} \frac{b-mh}{b} = \sqrt{} \frac{u}{mmg}$; ideoque $2a = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{6(b-mh)}} = \frac{mmg\sqrt{g}}{\sqrt{6u}}$ proxime. Hinc autem fiet AC − BC $= \frac{2ng}{3m} \sqrt{} \frac{6u}{g} = \frac{2n}{m} \sqrt{} \frac{2}{3} gu$. Quoniam porro ipſi a proportionalis eſt vis, quae requiritur ad velum in ſtatu ſuo conſeruandum, erit vis, quam funes velo in punctis A et B alligati ſuſtinent, vt $\frac{mm}{\sqrt{u}}$, hoc eſt directe vt quadratum

ſinus anguli VFA, quem directio venti cum recta AB conſtituit et reciproce vt radix quadrata ex u. Vnde conſtat velum non niſi vi infinita in ſuperficiem planam extendi poſſe; et hanc ob cauſam fieri nequit, vt vela vento inflata non incuruentur.

§. 787. In his, quae hactenus ſunt tradita, vela inſtar ſingulorum filorum, quae omnis latitudinis ſint expertia, conſiderauimus: quanquam enim infinita eiusmodi filorum ſibi parallelorum multitudo velum conſtituere videtur, tamen ſingula fila velum conſtituentia non eodem modo a vento afficiuntur, ac ſi eſſent ſolitaria; atque ſic, quae de curuatura filorum a vento impulſorum eruimus, non omni rigore ad vela transferri poſſunt. Primo enim, ſi filum ſolitarium vento exponitur, particulae aeris, poſtquam impegerunt, liberrime ad latera defluere, ſicque effectum inſequentium turbare non poſſunt; id quod in velo latitudine praedito fieri non poteſt. Aer igitur in vela iam impulſus quodammodo ſtagnabit, donec ad latera defluat; ſicque particulae aeris ſequentes non immediate in ſuperficiem veli impingere poterunt, ſed aerem ſtagnantem comprimemt atque ad latera depellent. Hocque adeo caſu vela non per impulſionem, ſed per ſolam preſſionem aeris magis condenſati maximam partem ſollicitantur, quae vis non easdem ſequetur leges, quas ante vi venti tribuimus.

§. 788. Haec conſideratio ſola efficit vt effectum venti in vela incurrentis definire non valeamus, quoniam is pendebit a quantitate voluminis aeris in veli cauitate quaſi ſtagnantis et tum ad oras veli prorumpentis, atque a condenſatione, quam iſte aer a vento inſequente patitur;

quae

quae res ex iam cognitis principiis ad calculum adhuc revocari non possunt. Filamenta autem, quibus velum constat, longe aliam induent curuaturam, quia iam vis, qua singulae particulae vrgentur, non est vt quadratum sinus obliquitatis, sub qua ad venti directionem sunt positae, sed haec vis, quia compressione aeris adiacentis oritur, vbique fere erit eadem, neque ab obliquitate pendebit. Tum vero non solum fila secundum veli longitudinem disposita incuruabuntur, sed etiam quae secundum latitudinem sunt extensa, quo fit vt in superficiem vndique concauam efformetur. Hoc modo incuruatio filorum latitudinalium perturbabit incuruationem filorum longitudinalium, ita vt determinatio figurae totius veli sit maxime ardua, viresque analyseos longe superet.

§. 789. Superficies autem plana in concauam, qualem vela inflata exhibent, transmutari non potest, nisi ea vel in margine plicas edat, vel fila, ex quibus est composita, extensionem admittant. Quod ad vtrumque incommodum attinet, vela solent robusto filo laxiore cingi, vt dum eius interior pars extenditur, tota superficies in planam abeat, quo remedio nimia velorum cauitas quae alioquin a vento induceretur, diminuitur et maximam partem tollitur. Illa autem filamentorum indoles, qua non solum inflecti sed etiam in maiorem longitudinem extendi se patiuntur, efficit vt velis a vento longe alia figura inducatur, quam fieret, si filamenta omnis extensionis essent expertia. Ob hanc causam etiam determinatio vis a vento exertae aliam sequetur legem, ita vt, quae hactenus de hac re sunt tradita non nisi vero prope, idque sensu satis laxo transferri queant. Cum autem

in hoc negotio practico determinatio non nimis longe a vero aberrans sufficere possit, etiam his subtilioribus inuestigationibus, per se vires calculi superantibus, supersedemus, ad alia progressuri, quae calculum non respuant.

§. 790. Imprimis autem grauitatis ratio erit habenda quae hactenus est praetermissa; qua fit vt velorum figura a vento orta non solum multum immutetur, sed etiam vis venti se alio modo exerat. Quod discrimen cla-
Tab. XXIII. fig. 1. rissime se manifestabit, si loco veli tabulam OA consideremus, quae circa axem horizontalem O instar penduli sit mobilis, in quam ventus secundum directionem VC, ad quam axis O sit normalis, impingat. Si enim haec tabula esset grauitatis expers, tum ventus eam mox in situm horizontalem circa O deduceret, ita vt nulla amplius vis venti sollicitans extaret. Sin autem grauitas adsit, per eam tabula situm quendam obliquum OA retinebit, ventumque, quasi in A esset alligata, excipiet; vnde nauis ad motum vrgeatur; cuiusmodi sollicitatio abesset, si tabula pondere careret. Hocque idem discrimen locum habebit, si tabula non fuerit rigida, sed instar fili perfecte flexilis, hoc enim casu grauitas pariter impediet, quo minus ea in situm horizontalem extendatur, sed curuam formabit conuexam versus venti plagam, in quam ventus vim nauem propellentem exercebit.

§. 791. Inquiramus igitur primum in effectum, quem ventus in tabulam rigidam exerceat, sitque superficies tabulae $= bb$; cuius centrum grauitatis existat in puncto C, vbi simul situm sit centrum grauitatis tabulae, ponatur autem tabulae pondus $=$ P. Tum vero sit celeritas venti debita altitudini v, cum qua in directione VC in tabu-

tabulam irruat. Iam ponatur anguli BOA, in quo tabula a vento et grauitate simul sollicitata persistet, sinus $= x$, et cosinus $= \sqrt{(1 - xx)} = y$, erit media directio venti CM normalis ad tabulae superficiem; vis autem, qua ventus tabulam in hac directione vrgebit erit vt $v\,bb.\,(\text{sin. VCO})^2 = v\,bbyy$. Scilicet si massae aquae, cuius volumen $=$ V pondus sit $=$ M; aequabitur ista venti vis ponderi $= \frac{M}{800\,V}\,.\,v\,bbyy$. Praeterea vero tabula a grauitate vrgetur vi $=$ P in directione verticali CP, quae duae vires, vt se mutuo in aequilibrio teneant necesse est, vt earum momenta respectu axis O sint aequalia. Erit ergo $\frac{M}{800\,V}\,.\,v\,bbyy.\,OC = P.\,OC.\,\text{sin. PCA} = Px.\,OC$, ideoque $\frac{M}{800\,V}\,.\,v\,bbyy = Px$. Ex qua aequatione angulus BOA determinabitur.

§. 792. Quoniam pes cubicus aquae circiter pondus habet 64 libr; si fierit V vnus pes cubicus, erit M $=$ 64 libr, et $\frac{800V}{M} = \frac{2}{25}$ libr. Quare si superficies bb in pedibus quadratis, altitudo vero v celeritati venti debita in pedibus, simulque pondus tabulae P in libris exprimatur, habebitur ista aequatio ad mensuras notas reuocata $\frac{2vbb}{25}\,yy = Px$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{2vbb}{25} = \alpha$, et ob $yy = 1 - xx$ habebitur $\alpha - \alpha xx = Px$, ideoque $xx = \frac{-Px + \alpha}{\alpha}$, vnde fit $x = \frac{-P \pm \sqrt{(PP + 4\alpha\alpha)}}{2\alpha}$. Duplicem haec solutio praebet valorem pro x seu sinu anguli BOA; at cum alter valor negatiuus fiat vnitate, qua sinus totus indicatur, maior, erit iste angulus imaginarius. Quare habebitur anguli BOA sinus $x = \frac{\sqrt{(PP + 4\alpha\alpha)} - P}{2\alpha} = \sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha}$, vnde, cum α et P quantitates homogeneas pondera

scili-

ſcilicet denotent, angulus BOA definiri poterit. Vt ſi fuerit $P : \alpha = 3 : 2$ erit $x = \frac{1}{2}$ et angulus BOA fiet 30°.

§. 793. Quo autem pateat, quantam vim ipſa nauis, in qua eiusmodi tabula fuerit ſuſpenſa, ſuſtineat, videndum eſt, quanta vis requiratur ad tabulam in ſitu hoc, in quem a vento redigitur, conſeruandam. Scilicet ſi tabula in O ope funis ad malum fuerit alligata, inueſtigandum eſt, quanta vi et in quanam directione hic funis vrgeatur. Ad hoc reſoluatur vis grauitatis P in binas laterales, alteram in directione CA, alteram in directione ad hanc normali, atque perſpicuum hanc poſteriorem a vi venti CM omnino deſtrui. Reſtat ergo prior vis ex reſolutione grauitatis orta, cuius directio eſt CA, quae erit $= Py$: haec itaque vis a fune debet ſuſtineri; ex quo perſpicitur funem in directione tabulae Oa extendi vi $= Py$; ex cuius reſolutoine in Ob et $O\alpha$ ſequitur nauem in O propulſum iri vi $= Pxy$. Cum vero ſit $x = \sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha}$ erit $yy = \frac{P}{\alpha}\ (\sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha})$ ideoque nauis propelletur vi $= P(\sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha})^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{P}{\alpha}}$.

§. 794. Hinc patet a poſteriori, hoc eſt ex angulo BOA ad quem tabula a vento inclinatur, cognoſci poſſe vim, qua nauis propelletur. Cum enim haec vis ſit $= Pxy$, atque $2xy$ praebeat ſinum dupli anguli AOB, erit haec vis ad dimidium pondus tabulae, vti ſinus dupli anguli AOB ad ſinum totum. Haec ergo vis erit ceteris paribus maxima, ſi angulus AOB fuerit ſemirectus, hocque caſu vis nauem propellens aequabitur ſemiſſi ponderis tabulae. Erit ergo $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, hincque $\frac{vbb\sqrt{2}}{25} = P$. Quamobrem ſi tabulae tam pondus quam ſuperficies fuerint data, de-

determinari poterit certa venti celeritas, qua nauis vehementissime propelletur, quae resultabit ex aequatione $v = \frac{25 P}{bb\sqrt{2}}$; quae cum P detur in libris et bb in pedibus quadratis ostendit eum ventum maximum producere effectum qui vno minuto secundo percurrat spatium $= \sqrt{1104, 854 \frac{P}{bb}} = 33, 2393 \sqrt{\frac{P}{bb}}$ pedum. Quodsi autem celeritas venti sit data atque ventus vno minuto secundo n pedes conficiat, quo tabula maximam vim excipiat debet esse $\frac{P}{bb} = \frac{nn}{1104, 854} = \frac{905097 \cdot nn}{1000000000}$.

§. 795. Huiusmodi igitur tabula commode adhiberi poterit ad venti celeritatem absolutam explorandam. Cognitis enim pondere tabulae P in libris, quam eius superficie bb in pedibus quadratis, obseruetur angulus BOA, ad quem tabula inclinatur, cuius sinus sit $= x$ et cosinus $= y$; posito sinu toto $= 1$ hinc statim eruitur altitudo venti celeritati debita $v = \frac{25 P x}{2 bbyy}$; atque ideo ventus vno minuto secundo conficiet spatium $27, 9508 \sqrt{\frac{x}{yy} \cdot \frac{P}{bb}}$ pedum. Quo autem anguli declinationum BOA a ventis maxime consuetis neque nimis fiant magni neque nimis parui, fiat circiter $\frac{P}{bb} = 1$; quo facto celeritas venti ex obseruato angulo BOA ita cognoscetur. Fiat vt radix quadrata ex cosinu anguli BOA ad radicem quadratam ex tangente anguli BOA ita numerus $27, 9508 \sqrt{\frac{P}{bb}}$ ad quartum, qui numerus designabit numerum pedum, quem ventus vno minuto secundo absoluit, quae operatio per logarithmos facillime expedietur.

§. 796. Anemometron hoc in suo genere perfectissimum praedicare haud dubito, cum non solum vtrum alius ventus alio sit fortior, ostendat, sed etiam quantum spatium datus ventus vno minuto secundo percurrat, in-

dicet. Constructioni eius practicae hic non admodum immorari conuenit, cum artifex intelligens facile perspiciat, quomodo eius perfectio augeri queat. Hic tantum annotasse sufficiat, hoc anemometrum cum solitis tritonibus, quibus plaga venti indicari solet, ita combinari posse, vt tabula OA perpetuo directe vento opponatur; hocque pacto eodem instrumento tam plagam venti, quam ipsam eius celeritatem cognoscere licebit. Praeterea expediet tabulae OA figuram oblongam potius tribuere, quam curtatam, quo pro eadem superficie interuallum OA longius reddatur, sicque quantitas anguli BOA facilius dignosci queat, quod ope arcus circularis in gradus diuisi et in B fixi satis commode fiet, tum vero si in vno huius arcus latere gradus notantur, in altero latere numerus pedum quos ventus hanc inclinationem producens, vno minuto sec. percurrit, congrue adscribetur.

§. 797. Imprimis autem hic notandum est, centrum grauitatis ipsius tabulae et centrum grauitatis superficiei eius in idem punctum incidere debere, id quod, si tabula ex materia homogenea conficiatur et vbique eadem praedita sit crassitie quam minima, sponte vsu venit. Quodsi autem centrum grauitatis tabulae discrepet a centro
Tab XXIII. fig. 2. grauitatis superficiei ipsius alius prorsus orietur effectus ac diuersus ab eo, quem modo determinauimus. Sit igitur primo, vt ante posuimus, pondus tabulae OA $= P$, eius superficies $= bb$, celeritas venti in directione VC impingentis sit debita altitudini v, et anguli BOA, ad quem tabula a vento declinatur, sit sinus $= x$ cosinus $= y$. Deinde vero sit C centrum grauitatis superficiei tabulae et eius ab axe O distantia OC $= a$; centrum grauitatis autem

autem soliditatis tabulae sit in G, eiusque ab axe O distantia OG $= b$. His positis videamus, quantum et inaequalitas interuallorum a et b determinationes ante inventas sit perturbatura.

§. 798. Ex vi venti CM $= \frac{M}{800\gamma} \cdot vbbyy$ nascitur ad tabulam circa O conuertendam momentum $\frac{M}{800\gamma} \cdot avbbyy$, cui aequale esse debet momentum ex vi grauitatis ortum, quod est $= Pbx$, vnde habetur ista aequatio $\frac{M}{800\gamma} avbbyy = Pbx$, vel si pondus P in libris et magnitudines in pedibus exprimantur haec $\frac{2avbb}{25b} yy = Px$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{2avbb}{25b} = \alpha$, habebitur vt ante $\alpha yy = Px$, hincque $x = V(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha}) - \frac{P}{2\alpha}$. Resoluatur vis grauitatis P in laterales GQ et GA inter se normales, erit vis GQ $= Px$ et vis GA $= Py$; hinc ad tabulam in O continendam requiritur primum vis Op in directione AO, $= Py$, tum vero insuper vis normalis $Oq =$ vi CM $-$ vi GQ $= \frac{2vbb}{25} yy - Px = \frac{\alpha b}{a} yy - Px$; a quibus viribus nauis propelletur vi $= Pxy + \frac{\alpha b}{a} y^3 - Pxy = \frac{b}{a} Pxy$. Erit ergo vt ante vis propellens ceteris paribus vt sinus dupli anguli AOB, at cum hac ratione insuper coniungi debet ratio $\frac{OG}{OC}$.

§ 799. Sit nunc tabula, quam hactenus rigidam posuimus, perfecte flexilis, seu sit filum graue BMYA in B suspensum, ventum in directione horizontali VY excipiens, cuius celeritas debita sit altitudini v, in A autem filum hoc firmiter sit alligatum; seu sollicitetur duabus viribus AE $=$ E et AF $=$ F quae sint tantae, vt filum BMA in hoc statu incuruato, qui ipsi cum a vento tum a grauitate inducitur, continere valeant, quarum virium altera Tab. XXIII. fig. 3.

 tera

tera AE ſit verticalis, altera AF horizontalis, quibus ſimul ſumtis aequiualebit vis AG per diagonalem parallelogrammi EF indicata. Sumatur recta verticalis AP pro axe, ac ponatur abſciſſa $AP = x$, applicata $PM = y$; atque longitudo curuae $AM = s$. Tribuatur huic filo latitudo $= c$, vt velum repraeſentet, ſitque tota longitudo $AMB = a$, ideoque ſuperficies $= ac$; totius autem veli pondus ſit $= P$; vnde cum velum vniformiter craſſum vbique ponatur; erit ponduſculum cuiuslibet elementi $Mm = ds$, ad pondus P vti eſt ds ad a; conſequenter elementi ds ponduſculum erit $= \frac{Pds}{a}$.

§. 800. Quoniam velum ponitur perfecte flexile, vt in ſtatu permanente verſetur, neceſſe eſt, vt virium ſollicitantium momenta, quae ad filum flectendum tendunt, vbique ſe deſtruant. Vidimus autem ſupra (757) ſummam momentorum omnium a vento ortorum, quibus filum circa M dextrorſum vrgeatur eſſe $= \int dx \int p dx + \int dy \int p dy$, exiſtente $p = \frac{cv}{800} \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{dx^2}{ds^2}$; ponatur breuitatis gratia $\frac{cv}{800} \cdot \frac{M}{V} = \alpha$, vt ſit $p = \frac{\alpha dx^2}{ds^2}$; eritque a vi venti momentum dextrorſum inflectere conans $= \alpha \int dx \int \frac{dx^3}{ds^2} + \alpha \int dy \int \frac{dx^2 dy}{ds^2}$. A viribus autem E et F oritur momentum filum circa M ſiniſtrorſum inflectere annitens $= Fx - Ey$; vnde niſi grauitas adeſſet, haec duo momenta inter ſe aequalia eſſe oporteret. Sicque prodiit ſupra illa aequatio, qua natura curuae, quae velo grauitatis experti a vento imprimitur, determinabatur. Haec autem curua vehementer ab actione grauitatis, vnde pariter momentum filum dextrorſum inflectere conans, naſcitur.

§. 801. Ad hoc momentum a grauitate oriundum debito modo definiendum ſumatur quoduis fili elementum intermedium Yy pro quo ſit $AX = \xi$; $XY = \phi$; et $Yy = d\omega$; erit vt ante vidimus ponduſculum elementi $Yy = \frac{Pd\omega}{a}$, quo verticaliter deorſum ſecundum directionem YR ſollicitatur; hinc filum circa M dextrorſum vrgebitur momento $= \frac{Pd\omega}{a}(y - \phi)$. Omnium ergo horum momentorum ſumma erit $= \frac{P}{a}(y\int d\omega - \int \phi\, d\omega)$ quae quidem a grauitate portionis AY oritur. Integrum ergo momentum a toto filo AM ortum prodibit, ſi punctum Y in M transferatur, quo fit $\omega = s$; et $\phi = y$. Hinc erit momentum totum a grauitate ortum, et filum dextrorſum circa M flectere conans $= \frac{P}{a}(y\int ds - \int y\, ds) = \frac{P}{a}\int s\, dy$. Quae vis ſi ſola adeſſet, ſeu ventus flare ceſſaret, filo induceret curuam catenariam, quae a velaria aliter non differt, niſi quod illius axis ſit verticalis huius vero horizontalis.

§. 802. His igitur momentis rite collectis pro curua AMB iſta conficietur aequatio $\alpha\int dx\int\frac{dx^3}{ds^2} + \alpha\int dy\int\frac{dx^2 dy}{ds^2} + \frac{P}{a}\int s\, dy = Fx - Ey$. Ad quam commodius tractandam ponatur breuitatis gratia $\frac{\alpha dx^2}{ds^2} = p$, vt ſit $\int dx\int p\, dx + \int dy\int p\, dy + \frac{P}{a}\int s\, dy = Fx - Ey$. Differentietur haec aequatio, et habebitur: $dx\int p\, dx + dy\int p\, dy + \frac{Psdy}{a} = Fdx - Edy$, quae poſito dx conſtante denuo differentiata dat: $p\, dx^2 + p\, dy^2 + ddy\int p\, dy + \frac{Psddy}{a} + \frac{Pdsdy}{a} = -Eddy$; ſiue ſi per ddy diuidatur $\frac{pds^2}{ddy} + \int p\, dy + \frac{Ps}{a} + \frac{Pdsdy}{addy} + E = 0$. Differentietur tertio prodibitque ob $dsdds = dyddy$ haec aequatio $2p\, dy - \frac{pds^2 d^3y}{ddy^2} + \frac{ds^2 dp}{ddy} + p\, dy + \frac{2Pds}{a}$

$\frac{2Pds}{a} + \frac{Pdy^2}{ads} - \frac{Pdsdyd^3y}{adAy^2} = 0$; quae per $\frac{ddy}{ds^2}$ multiplicata dat $dp + \frac{3pdyddy}{ds^2} - \frac{pd^3y}{ddy} + \frac{2Pddy}{ads} + \frac{Pdy^2ddy}{ads^3} - \frac{Pdyd^3y}{adsddy} = 0$.

§. 803. Aequatio haec respectu ad p habito ergo integrabilis reddetur, si multiplicetur per $\frac{ds^3}{ddy}$ eritque $\frac{pds^3}{ddy} + \frac{P}{a}\int(2ds^2 + dy^2 - \frac{ds^2dyd^3y}{ddy^2}) = Cdx$. At signi summatorii integrale exhiberi potest, quo facto erit $\frac{pds^3}{ddy} + \frac{Pds^2dy}{addy} + \frac{Pxdx}{a} = Cdx$ vnde $pds^2 + \frac{Pdyds}{a} + \frac{Pxdxddy}{ads} = \frac{Cdxddy}{ds}$. Cum autem sit $pds^2 = \alpha dx^2$ erit $\alpha dx^2 + \frac{Pdyds}{a} + \frac{Pxdxddy}{ads} = \frac{Cdxddy}{ds}$. Ponamus $dy = qdx$ erit $ds = dx\sqrt{(1+qq)}$ et $ddy = dqdx$; quibus substitutis fit $\alpha dx + \frac{Pqdx\sqrt{(1+qq)}}{a} + \frac{Pxdq}{a\sqrt{(1+qq)}} = \frac{Cdq}{\sqrt{(1+qq)}}$, quae per $\alpha + \frac{Pq\sqrt{(1+qq)}}{a}$ diuisa dat $dx + \frac{Pxdq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}} = \frac{Cadq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}}$ vnde fit $\frac{dx}{Ca-Px} = \frac{dq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}}$, ex qua aequatione cum variabiles x et q sint a se inuicem separatae, determinari poterit valor ipsius x per q; hincque etiam y et s dabitur per q propter $dy = qdx$ et $ds = dx\sqrt{(1+qq)}$.

§. 804. Erit ergo $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{-Pdq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}}$. Ponatur $\sqrt{(1+qq)} = q+r$, erit $r = \sqrt{(1+qq)} - q$ et $q = \frac{1-rr}{2C}$ porroque $\sqrt{(1+qq)} = \frac{1+rr}{2r}$ et $dq = \frac{-dr(1+rr)}{2rr}$, ex quibus substitutionibus fit $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{4Prdr}{P+4\alpha arr-Pr^4} = \frac{-4P^2rdr}{P^2r^4-4\alpha aPrr-PP}$. Cum autem sit $P^2r^4 - 4\alpha aPrr - PP = (Prr - 2\alpha a + \sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)})(Prr - 2\alpha a - \sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)})$, erit $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{2Qrdr}{Prr-2\alpha a+\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}} - \frac{2Qrdr}{Prr-2\alpha a-\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}$, fitque $Q = \frac{PP}{\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}$. Qua propter per logarithmos integrando prodibit $l\frac{Ca-Px}{Da} = \frac{P}{\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}\, l\frac{Prr-2\alpha a+\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}{Prr-2\alpha a-\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}$, vnde ad numeros regrediendo fit $Ca - Px = Da$

$(\frac{Prr}{Prr}$

$\left(\frac{Prr - 2\alpha a + \sqrt{(P^2 + 4\alpha^2 a^2)}}{Prr - 2\alpha a - \sqrt{(P^2 + 4\alpha^2 a^2)}}\right) P : \sqrt{P^2 + 4\alpha^2 a^2})$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{P}{\sqrt{(P^2 + 4\alpha^2 a^2)}} = m$ et $\frac{2\alpha a}{\sqrt{(P^2 + 4\alpha^2 a^2)}} = n$ erit $m^2 + n^2 = 1$, et m et n conſiderari poterunt tanquam ſinus et coſinus anguli cuiusdam determinati, eritque $Ca - Px = Da \left(\frac{mrr - n + 1}{mrr - n - 1}\right)^m$.

§. 805. Ex hac aequatione porro fit $\frac{mrr - n + 1}{mrr - n - 1} = \left(\frac{Ca - Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}}$ et $rr = \frac{(n+1)\left(\frac{Ca - Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} - n + 1}{m\left(\left(\frac{Ca - Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)}$, dabitur ergo r per x, et cum ſit $q = \frac{1 - rr}{2r}$, reperietur q per x; quo cognito oritur $y = \int q\,dx$ et $s = \int dx \sqrt{(1 + qq)} = y + \int r\,dx$; ſicque adeo curua quaeſita conſtrui poterit. Ad conſtantes vero C et D determinandas ex aequationum (802) prima et ſecunda conſtat factis x et $y = 0$, fore $\frac{F}{E} = \frac{dy}{dx} = q$; ex tertia autem facto $x = y = a$, fit $p\,ds^2 + \frac{P\,ds\,dy}{a} = -E\,ddy$, et ex (803) eſt in eadem hypotheſi $p\,ds^2 + \frac{P\,ds\,dy}{a} = \frac{C\,dx\,ddy}{ds}$; vnde fit $C = \frac{-E\,ds}{dx} = -E\sqrt{(1 + qq)}$. Cum autem ſit $q = \frac{F}{E}$, ſi vim totam A G $= \sqrt{(E^2 + F^2)}$ ponamus $= G$ erit $\sqrt{(1 + qq)} = \frac{G}{E}$; ideoque $C = -G$. Deinde ob $r = \sqrt{(1 + qq)} - q$, facto $x = 0$ erit $r = \frac{G - F}{E}$ ex aequatione autem vltima ob $C = -G$, fit $\frac{mrr - n + 1}{mrr - n - 1} = \left(\frac{-G}{D}\right)^{\frac{1}{m}}$ ideoque $\frac{-G}{D} = \left(\frac{m(G-F)^2 + (1-n)E^2}{m(G-F)^2 - (1+n)E^2}\right)^m$, ac propterea $D = -G \left(\frac{m(G-F)^2 - (1+n)E^2}{m(G-F)^2 + (1-n)E^2}\right)^m$.

§. 806.

§. 806. His definitis constantibus C et D aequationem pro curua ingredientibus, fiet $\frac{Ca-Px}{Da} = \frac{Ga+Px}{Ga}\left(\frac{m(G-F)^2+(1-n)E^2}{m(G-F)^2-(1+n)E^2}\right)^m$, ideoque $\left(\frac{Ca-Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{m(G-F)^2+(1-n)E^2}{m(G-F)^2-(1+n)E^2}\left(\frac{Ga+Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$ pro quo valore determinato si scribamus X erit $rr = \frac{n(X-1)+X+1}{m(X-1)}$, et $r = \frac{\surd(mn(X-1)^2+m(X^2-1))}{m(X-1)}$, vnde fit $q = \frac{1-rr}{2r} = \frac{(m-n)(X-1)-X-1}{2\surd(mn(X-1)^2+m(X^2-1))}$; et $\surd(1+qq) = \frac{1+rr}{2r} = \frac{(m+n)(X-1)+X+1}{2\surd(mn(X-1)^2+m(X^2-1))}$. Fiet ergo $q = \frac{dy}{dx} = 0$ seu tangens curuae verticalis, vbi fit $(m-n)(X-1) = X+1$ seu $(m-n-1)X = m-n+1$; ideoque $X = \frac{m-n+1}{m-n-1}$. Hoc ergo casu valor ipsius x innotescet ex hac aequatione $1 + \frac{Px}{Ga} = \left(\frac{m(G-F)^2-(1+n)E^2}{m(G-F)^2+(1-n)E^2}\right)^m \left(\frac{m-n+1}{m-n-1}\right)^m$. Tangens curuae autem fit horizontalis si vel sit $X = 1$ vel $X = \frac{n-1}{n+1}$.

§. 807. Quoniam puncto M in A translato fit $\frac{dy}{dx} = \frac{F}{E}$, perspicuum est directionem vis AG esse tangentem curuae in A. Hinc cognita ratione E : F in quouis curuae puncto M inclinatio tangentis ad horizontem potest inueniri, eo quod $\frac{dy}{dx} = q$ per abscissam x determinatur. Ponamus autem vim velum in A retinentem euanescere, ita vt sit $G = 0$; qui casus locum habebit si velum in B instar penduli suspendatur, ventusque in id incurrat. Erit ergo ob P quantitatem finitam $\frac{Ga+Px}{Ga}$ quantitas infinita, hincque $X = \infty$; vnde prodibit $q = \frac{dy}{dx} = \frac{m-n-1}{2\surd m(n+1)} =$ quantitati constanti. Ex quo intelligitur velum in planum extendi atque a vento instar tabulae rigidae a situ verticali declinari. Quod quidem ex supra allatis facile perspicitur cum si tabula sit vbique vniformiter crassa, in statu inclinato vis venti cum grauitate ita

in

in aequilibrio consistat, vt inde nulla oriatur vis, quae tabulam, etiamsi flexilis esset, inflectere conaretur.

§. 808. Quando autem vis filum in A retinens G non est nulla, tangens curuae alicubi erit verticalis, nisi grauitas sit nulla, in hoc ergo loco capiatur punctum A, eritque vis $F = 0$ et $E = G$; ideoque $X = \frac{m-n+1}{m-n-1}\left(\frac{Ga+Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{m-n+1}{m-n-1}\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$; quae quantitas idcirco ob m et n vnitate minores, erit negatiua; applicatae autem PM et pm pariter ob situm contrarium erunt negatiuae. Hinc Tab XXIII. fig. 4.

$$\text{igitur fit } rr = \frac{(n+1)(m-n+1)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} - (1-n)(1+n-m)}{m(m-n+1)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + m(1+n-m)}$$

$$= \frac{(1+m+n)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + 1-m-n}{(1+m-n)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + 1-m+n} \text{ ob } 1-nn = mm.$$

Sit breuitatis gratia $S = \left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$ erit $rr = \frac{(1+m+n)S+1-m-n}{(1+m-n)S+1-m+n}$ et $r = \frac{\sqrt{(2m(1+m)SS+4nnS-2m(1-m))}}{(1+m-n)S+1-m+n}$ hincque $q = \frac{1-rr}{2r} = \frac{n-nS}{\sqrt{(2m(1+m)SS+4nnS-2m(1-m))}}$, qui valor ob $S > 1$ negatiuus luculenter indicat $\frac{dy}{dx}$, hincque ipsam applicatam y esse negatiuam. Meminisse autem oportet esse $\frac{m}{n} = \frac{P}{2\alpha a}$, et $\alpha = \frac{cv}{800} \cdot \frac{M}{V}$.

§. 809. Cum sit $r = \sqrt{(1+qq)} - q = \frac{ds-dy}{dx} = \sqrt{\frac{ds-dy}{ds+dy}}$ erit curuae tangens horizontalis, vbi est $r = 0$, vel etiam $n = \infty$. Hoc ergo euenit si capiatur $S = \frac{m+n-1}{m+n+1}$ vel $S = \frac{m-n-1}{m-n+1}$ vtroque enim casu fit $q = \infty$; est vero alter ipsius S valor affirmatiuus alter negatiuus;

 qui

qui posterior, cum potestati positiuae $(1+\frac{Px}{Ga})^{\frac{1}{m}}$ aequari nequeat, est imaginarius. Erit ergo $\frac{m+n-1}{m+n+1}=(1+\frac{Px}{Ga})^{\frac{1}{m}}$ et $\frac{Px}{Ga}=(\frac{m+n-1}{m+n+1})^m-1$, ideoque $x=\frac{Ga}{P}(\frac{m+n-1}{m+n+1})^m-\frac{Ga}{P}$ qui valor est negatiuus; habebit ergo curua BAb in ramo inferiore Ab tantum puta in b tangentem horizontalem, a quo loco curua rursus assendit. Ramus autem superior AB in infinitum assendit, facto enim $x=\infty$, fit quoque $S=\infty$, ideoque $q=\frac{dy}{dx}=\frac{-n}{\sqrt{2m(1+m)}}=-\sqrt{\frac{1-m}{2m}}$; tum scilicet tangens cum horizontali VA faciet angulum cuius tangens $=\sqrt{\frac{2m}{1-m}}$; ideoque sinus $=\sqrt{\frac{2m}{1+m}}$ et cosinus $=\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}$.

Tab. XXIII. fig. 5. §. 810. Si ventus desuper in directione verticali PA in velum MAm incideret, tum ipsi, si grauitate careret, eandem imprimeret curuam, quam sola grauitas demto vento produceret, id quod congruentia inter curuas catenariam et velariam docet. Quodsi ergo tum grauitas quam ventus iste desuper veniens simul agant, dubium est nullum, quin velo eadem curuatura inducatur, quam ab vtraque vi seorsim reciperet. Ad hunc ergo casum calculum accommodemus, quo clarius eius consensus cum veritate perspiciatur. Sit igitur axe AP per curuae punctum imum A sumto, quo casu fit $E=0$ et $F=G$, abscissa $AP=x$, $PM=y$ et arcus $AM=s$, reliquae vero litterae a, P, et α easdem retineant significationes, quas supra habebant; quibus positis manifestum est, calculum in (802) datum huc transferri, si modo ponatur $p=\frac{\alpha dy^2}{ds^2}$ loco $\frac{\alpha dx^2}{ds^2}$, quippe quo pacto directio venti ad angulum rectum mutatur.

§. 811.

§. 811. Cum igitur ob $C = -G$ peruentum ſit ad hanc aequationem $pds^2 + \frac{Pdyds}{a} + \frac{Pxdxddy}{ads} + \frac{Gdxddy}{ds} = 0$, erit $\alpha ady^2 + Pdyds + \frac{Pxdxddy + Gadxddy}{ds} = 0$. Ponatur $dy = qdx$, ſitque $\sqrt{(1 + qq)} = q + r$ ſeu $q = \frac{1 - rr}{2r}$, fiet facta ſubſtitutione $\frac{dx}{Ga + Px} = \frac{4rdr}{(1 - rr)(P + \alpha a + (P - \alpha a)rr)}$, cuius integrale eſt $\frac{1}{P} l \frac{Ga + Px}{Da} = \frac{1}{P} l \frac{P + \alpha a + (P - \alpha a)rr}{1 - rr}$, fit autem, cum poſito $x = 0$ fieri debeat $r = 0$, conſtans $D = \frac{G}{P + \alpha a}$; quare erit $\frac{Ga + Px}{Ga} = \frac{P + \alpha a + (P - \alpha a)rr}{(P + \alpha a)(1 - rr)}$ hincque $rr = \frac{(P + \alpha a)x}{2Ga + (P + \alpha a)x}$. Tum vero prodit $q = \frac{dy}{dx} = \frac{Ga}{\sqrt{(2Ga(P + \alpha a)x + (P + \alpha a)^2 xx)}}$. Scribatur breuitatis ergo b pro $\frac{Ga}{P + \alpha a}$, erit $dy = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx + xx)}}$ quae aequatio manifeſto eſt pro curua catenaria; quemadmodum id quidem recte ex congruentia curuae velariae cum catenaria coniectauimus.

Cap. X.
DE MALORVM CONSTITVTIONE.

§. 812.

Si nauis velorum ope, in quae ventus incurrat, propelli debeat, nauem ita instrui oportet, vt vela firmiter expandi, sicque vento exponi atque pro lubitu dirigi queant. Quem in finem mali in nauibus constitui debent, qui cum supra nauem ad insignem altitudinem assurgant, loca praebent idonea, quibus vela alligentur, atque extendantur. Vim igitur quam ventus in vela exerit, quoniam cum malis sunt connexa, immediate mali sustinebunt, hocque modo nauis perinde promouebitur, ac si vis aequalis malis esset applicata. Quo circa necesse est, vt mali in naui firmissime collocentur, et cum naui, quasi vnum corpus omnis flexionis expers constituant, vt ipsa nauis eandem vim sentiat, qua mali sollicitantur. Cum igitur primum mali in spina nauis ceu parte fortissima sunt collocati, tum ope funium satis robustorum tam vtrinque ad latera nauis, quam proram ac puppim versus alligantur, vt in nullam plagam inclinari queant, quin simul funes ad oppositam plagam extensi rumpantur. Quodsi ergo funes sint satis fortes, mali firmiter in statu suo perseuerabunt, atque ad nauem propellendam erunt accommodati.

§. 813. Quo maiorem autem vim mali sustinent, eo non solum firmius funium robustorum ope alligati atque ad nauem affirmati esse debent, sed etiam ipsi mali satis fortes esse, atque adeo ex valido arboris trunco confici debent, vt ne ipsi a viribus sollicitantibus flectantur, vel adeo disrumpantur. Quamobrem in maioribus nauibus; cum singuli arborum trunci satis virium non habeant; plures sibi inuicem

inuicem ſecundum longitudinem inſeruntur, vt hoc modo mali multo maioris altitudinis, quam erant arbores, obtineantur; quin etiam ſubinde craſſities malorum duabus pluribusue arboribus coniungendis augeri ſolet. Sic in maximis nauibus mali ex ternis arboribus ſibi inuicem ſuperimpoſitis conſtant, quae arbores propterea fortiſſime inter ſe coniungi debent, vt iunctura cuiusue generis impetibus ſuſtinendis par ſit. Summa ergo cura erit adhibenda, vt mali, tam ſatis habeant roboris ipſi, quam vt ope funium firmiſſime alligentur, hocque modo quaſi cum naui vnum corpus rigidum conſtituant, adſtruantur.

§. 814. Quamuis autem ex theoria vtilia praecepta deriuari poſſent ope funium malos quam firmiſſime alligandi, tamen cum hoc argumentum, per experientiam ſatis inueſtigatum videatur, id praetermitto; atque tanquam poſtulatum hic aſſumo naues iam ita malis eſſe inſtructas, vt vires ſollicitantes malos neque inflectere, neque adeo ſubuertere valeant. Ad malos igitur vela antennarum ope alligantur atque in datam plagam extenduntur, vt ventum ſiue directe ſiue ſub data obliquitate excipiant. Velis autem quantum fieri poteſt extenſis, vt a vento quamminime incuruentur innoteſcet tam media directio quam magnitudo vis, quam ventus in ſingula vela exerit; quae vis cum a malis ſuſtineatur, ipſa nauis ab eadem vi et ſecundum eandem directionem ad motum ſollicitabitur. Quotcunque igitur fuerint vela, vires quas ſingula ſuſtinent, in vnam ſummam colligi, atque adeo vna vel duae vel ad ſummum tres vires omnibus aequiualentes exhiberi poterunt, quibus nauis ſollicitetur; hocque mo-

do ſollicitatio nauis a velorum conſideratione reuocabitur atque ad vires abſolutas reducetur.

§. 815. Collocentur autem mali in medio nauis, ſeu in plano verticali nauem ſecundum longitudinem in duas partes ſimiles et aequales diuidente; hancobrem ſi vela vtrinque circa malum quemque aequaliter eſſent extenſa, media directio vis venti in vela exertae per medium cuiusque mali tranſiret. Euenit autem plerumque in minoribus et ſaepe numero etiam in maioribus nauibus, vt vela ad vnam tantum mali partem extendantur, vti figura citata indicat; quo caſu media directio vis venti non per malum MN, ſed per centrum grauitatis g, veli $acdb$ tranſibit; ad cuius ſuperficiem erit normalis, ſi quidem fuerit maxime extenſum. Vtroque autem caſu, ſiue vela vtrinque aequaliter extendantur, ſiue ad vnam tantum partem, plerumque ſitum verticalem tenere ſolent, ita vt media directio vis venti fiat horizontalis; ſic igitur quotcunque velis nauis fuerit inſtructa, vis totalis, qua vrgebitur, habebit directionem horizontalem; quae eſt maxime idonea ad nauem propellendam. Atque ob hanc cauſam non conuenit vela ad horizontem inclinari; quia tali ſitu inclinato et minor vis a vento, quippe cuius directio eſt horizontalis, exciperetur, et minor vis ad nauem propellandam reſultaret, niſi ingens commodum inde proficiſcatur.

Tab. XXIV. fig. 1.

§. 816. His notatis, quo facilius doctrinam de malis pertractare, et quicquid ex idonea malorum conſtitutione ad perfectionem nauigationis redundat, perſcrutari queamus, conueniet ſeorſim vtrumque curſum nauis tam directum quam obliquum euoluere. In curſu enim obliquo praeter

formam

formam nauis malorum poſitio plurimum confert, vt nauis maxime aduerſus ventum procedere queat; qui curſus, cum in nauibus vento propulſis praecipue intendatur, eo magis erit elaborandum, vt per idoneam malorum collocationem aptior reddatur ad curſum aduerſus venti plagam tum propius tum etiam celerius inſtituendum. Atque in hoc curſu imprimis gubernationem ſpectari oportet, quae per malorum poſitionem vel adiuuari vel impediri poteſt. In curſu autem directo efficiendum erit, vt nauis a dato vento quam celerrime promoueatur, idque ſine ſecuritatis detrimento; in vtroque enim curſu maxime eſt cauendum, ne a viribus, quas ventus in vela exerit, nauis nimium inclinetur. Quibus requiſitis quemadmodum maxime ſatisfieri poſſit, ex tractatione bipartita, qua primum curſum directum tum obliquum ſumus contemplaturi, commodiſſime cognoſcere poterimus.

§. 817. Ad curſum directum inſtituendum neceſſe eſt, vt directio vis ſollicitantis a puppi proram verſus tendat atque nauis axi longitudinali ſit parallela. Quare vel ſingulae velorum vires hanc directionem habere debebunt, vel ſaltem omnium media directio ita comparata eſſe debet, vt ſit axi nauis parallela. Quodſi ergo ſingula vela fuerint in planum extenſa, quia tum media directio vis venti ad ea eſt normalis, planities velorum ad axem nauis longitudinalem in curſu directo debet eſſe normalis; vel quantum alia ab hoc ſitu differant, tantundem alia in oppoſitum diſcrepare debent. Cum igitur in curſu directo tota vis nauem propellens directionem habeat axi nauis longitudinali parallelam, praeter ipſam huius vis quantitatem, contemplari oportet eius momenta

in

in axes nauis latitudinalem et verticalem per centrum grauitatis ductos; in axem enim longitudlnalem eius momentum erit nullum, quia directio vis huic axi est parallela. Atque ex his momentis patebit, quantum nauis cum antrorsum inclinetur tum in gyrum agatur circa axem verticalem.

§. 818. Sit igitur vis tota a vento velorum ope excepta $= P$, cuius directio sit horizontalis atque axi nauis longitudinali parallela, huius ergo vis primus ac praecipuus effectus in nauis promotione secundum hanc eandem directionem consumetur. In huius effectus productione tantum quantitas vis P spectatur, et perinde est in quonam loco sit applicata, dummodo eius directio sit axi nauis longitudinali parallela. Cum igitur nauis cursum directum ab hac vi nanciscatur; considerari oportet resistentiam prorae, quae aequalis sit resistentiae plani ff, quod pari velocitate directe contra aquam impingat. Ponatur celeritas quam nauis ab hac vi P accipit debita altitudini v, et aequabitur vis resistentiae ponderi massae aqueae, cuius volumen $= ffv$. Vnde si nauis totius pondus sit $= M$ et volumen aquae immersum $= V$, erit vis resistentiae $= \frac{Mffv}{V}$, cui cum vis propellens P sit aequalis, habebitur haec aequatio $P = \frac{Mffv}{V}$; ex qua patet celeritatem nauis acquisitam tenere rationem subduplicatam vis propellentis P.

§. 819. Ex vi igitur propellente P et resistentia nauis absoluta ff inuenitur altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{PV}{Mff}$; ideoque ipsa celeritas. Indidem vero ex nauis celeritate et vi propellente P reperietur resistentia absoluta $ff = \frac{PV}{Mv}$; quae quidem omnia iam satis sunt manifesta. Videamus

mus igitur quomodo ex venti celeritate et directione vna cum velorum ſuperficie ipſa vis P exprimatur, quo facilius motus nauis datis velis inſtructae a dato vento oriundus determinari queat. Sit ergo BA axis nauis longitudinalis, Tab. XXIV. fig. 2. ad quem ſuperficies velorum, quam in planum extenſam aſſumo, ſit normalis; et repraeſentet recta EF velorum ſuperficies, quae ſit $= gg$. Tum vero ventus flet in directione VC celeritate debita altitudini k; atque anguli VCE, ſub quo ventus in vela incurrit, ſit ſinus $= m$ et coſinus $= n$; grauitas vero ſpecifica aeris ſit ad grauitatem ſpecificam aquae vt 1 ad i; erit quaſi $i = 800$.

§. 820. His iam poſitis, ſi nauis cum velis quieſceret foret vis venti in vela exerta aequalis ponderi maſſae aereae, cuius volumen $= mmggk$, hincque aequalis ponderi maſſae aqueae, cuius volumen $= \frac{mmggk}{i}$, ex quo vis venti foret $= \frac{Mmmggk}{iV} = P$: At quoniam nauis non quieſcit, ſed ſecundum directionem BA progreditur celeritate debita altitudini v, hoc motu ſeſe impetui venti quodammodo ſubducit, minoremque vim excipit, quam ſi quieſceret. Ad hanc vim determinandam capiatur in axe BA portio CN, quae ſit ad CV vt celeritas nauis ad celeritatem venti, nempe $CV : CN = \sqrt{k} : \sqrt{v}$: tum compleatur parallelogrammum $VCNv$ et diagonalis Cv repraeſentabit tum directionem tum celeritatem venti, quem vela in hoc motu conſtituta actu ſentient. Erit ergo vis venti in vela nauis motae exerta $P = \frac{M(\sin vCE)^2 gg.Cv^2.k}{iV.CV^2}$; angulus enim in ſuperiori caſu VCE abit in vCE; et cum ante altitudo venti celeritati debita eſſet $= k$ erit nunc $= \frac{Cv^2\, k}{CV^2}$.

§. 821. Cum autem in triangulo CVv ſit ang. CVv coſinus = ſin. $VCE = m$ erit $Cv^2 = CV^2 + Vv^2 - 2 CV.Vvm$ et ſin. $vCE = -$ coſ. $VvC = \frac{CV^2 - Vv^2 - Cv^2}{2Vv.Cv} = \frac{m\ CV - Vv}{Cv}$ ideoque hoc valore loco ſin vCE ſubſtituto prodibit $P = \frac{M(mCV - Vv)^2 ggk}{iV.CV^2}$. At ob $Vv = CN$ erit $CV:Vv = \sqrt{k}:\sqrt{v}$; ideoque $P = \frac{Mgg(m\sqrt{k} - \sqrt{v})^2}{iV}$; vnde patet vim a vento exceptam P continuo fore minorem, quo celerius nauis progrediatur, atque adeo euaneſceret, ſi nauis tanta celeritate progrederetur, vt eſſet $\sqrt{v} = m\sqrt{k}$, hoc eſt ſi celeritas nauis eſſet ad celeritatem venti, vt ſinus anguli VCE ad ſinum totum. Euaneſcente autem nauis celeritate $\sqrt{v}$ fit vti ſupra iam oſtendimus $P = \frac{Mmmggk}{iV}$. Sic igitur, cum nauis iam quamcunque nacta fuerit celeritatem, vis dati venti in vela determinabitur.

§. 822. Cum igitur pro nauis celeritate habeamus aequationem $P = \frac{Mffv}{V}$ erit nunc $ffv = \frac{1}{i} gg(m\sqrt{k} - \sqrt{v})^2$ hincque $f\sqrt{iv} = mg\sqrt{k} - g\sqrt{v}$; et $\sqrt{v} = \frac{mg\sqrt{k}}{g + f\sqrt{i}}$, vbi erit proxime $\sqrt{i} = 28$. Si igitur ad obliquitatem directionis venti ſolum reſpiciamus, quia m eſt coſinus anguli VCB, quem directio venti cum directione nauis conſtituit, erit ceteris paribus celeritas nauis vt coſinus anguli, quem venti directio cum directione nauis comprehendit. Sin autem celeritatem venti tantum ſpectemus, erit celeritas nauis $\sqrt{v}$ celeritati venti $\sqrt{k}$ proportionalis. Quare ſi ſuperficies velorum gg et reſiſtentia nauis abſoluta ff ſeu figura prorae maneant eadem; erit celeritas nauis in ratione compoſita coſinus anguli VCB et celeritatis venti $\sqrt{k}$. Maximam ergo celeritatem nauis ab vento aeque celeri acquiret, ſi a puppi ſpiret; nullam vero habebit celeritatem,

tem, ſi directio venti ad directionem curſus fuerit normalis.

§. 823. Maneat nunc celeritas venti eiusque directio inuariata, et manifeſtum eſt ſi ſuperficies velorum gg in infinitum augeatur, nauem tamen maiorem celeritatem adipiſci non poſſe quam $= m\sqrt{k}$. Sin autem eſſet $g = f\sqrt{i} = 28f$ ideoque $gg = 784ff$, quae quidem velorum ſuperficies eſſet vehementer magna, tamen nauis dimidiam tantum venti celeritatem acciperet, ſi quidem ventus directe in vela irrueret, vt eſſet $m = 1$. Poſito autem $m = 1$ ſit $\sqrt{v} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{k}$ erit $\alpha g = g + 28f$, ideoque $g = \frac{28f}{\alpha - 1}$ et tota velorum ſuperficies $gg = \frac{784ff}{(\alpha-1)^2}$. Ad datam igitur celeritatis venti partem naui imprimendam, oportet vt ſuperficies velorum gg ad reſiſtentiam abſolutam ff datam teneat rationem: quare quo minor fuerit reſiſtentia abſoluta, eo minori opus erit copia velorum, vt nauis eandam aſſequatur celeritatem: aucta autem reſiſtentia, velorum ſuperficies in eadem ratione augeri debebit.

§. 824. Quo haec clarius illuſtrentur, conſideremus nauem ad profunditatem 20 pedum aquae immerſam, erit eius latitudo circiter 50 pedum, et ſectio transuerſa ampliſſima 800 ped. quadratorum. Quare ſi ponamus reſiſtentiam abſolutam ob allongationem prorae octies fieri minorem, erit $ff = 100$, et $f = 10$. Velis autem, quae ad vnum malum extenduntur, tribuamus latitudinem 80 ped. et altitudinem parem 80 ped. vt eſſet $gg = 1600$ ped. quadr. Qnamuis enim altitudo pro hac latitudine multo maior eſſe ſoleat, tamen latitudo velorum continuo diminuitur, vt tota ſuperficies vix ſit ſuperatura 1600 ped. quadr. Erit ergo $g = 40$. Quodſi nunc ventus di-

recte in vela impingat, erit $\sqrt{v} = \frac{40\sqrt{k}}{40+280} = \frac{1}{8}\sqrt{k}$; seu hoc casu nauis acquiret octauam partem celeritatis venti. Hinc vt haec nauis singulis horis vnum milliare germanicum conficiat, qua celeritate singulis minutis secundis 6 pedes absoluuntur, requiritur ventus, qui singulis secundis 48 ped. percurrat.

§. 825 Quae autem hic de diminutione effectus venti a motu nauis orta exponuntur, celeritatem venti absolutam spectant, non eam, quae in ipsa naui sentitur, scilicet si in loco extra nauem fixo obseruetur venti celeritas $= \sqrt{k}$, et anguli, quem directio venti cum nauis directione constituit, cosinus sit $= m$, tum erit vti vidimus $\sqrt{v} = \frac{mg\sqrt{k}}{g+f\sqrt{i}}$. At qui in naui versantur neque veram venti celeritatem neque eius directionem sentiunt, atque ipsa vexilla nauis, iam illam alteratam venti directionem monstrant, quae a motu nauis proficiscitur. Quare si $\sqrt{k}$ denotet venti celeritatem, quae in naui percipitur, et m sit sinus anguli, sub quo ventus hic apparens in vela impingit, erit vtique $\sqrt{v} = \frac{mg\sqrt{k}}{f\sqrt{i}}$. Eritque adeo celeritas nauis vt celeritas venti et sinus m coniunctim et vt radix quadrata ex superficie velorum per resistentiam absolutam ff diuisa. Haec ergo regula simplicior adhiberi debebit; si motus nauis ex vento, qualis in naui apparet, definiri debeat.

Tab. XXIV. fig. 3. §. 826. Hinc expeditum nanciscimur modum veram cuiusque venti celeritatem explorandi, ac spatium assignandi, quod quisque ventus dato tempore absoluit. Veniat enim ventus in directione VC et sit eius celeritas, quae quaeritur, $= \sqrt{k}$. Construatur machina EFG vexillo, circa axem C liberrime mobili instructa, cuiusmodi ad

venti

venti directionem explorandam fieri solent; haecque machina si in situ C quiesceret, ope indicis CG, cum vexillo mobilis indicaret veram venti directionem VG. Nunc autem haec machina secundum directionem AB ad ventum normali promoueatur data velocitate, qui motus ope instrumenti tractorii ad lubitum facile producetur. Sit haec celeritas machinae cognita $= \sqrt{v}$, qua vno minuto secundo spatium datum $= a$ absoluatur; atque vexillum durante hoc motu posteriora versus declinabit situmque CM tenebit. Quare si durante motu index vexillo annexus sistatur, eius situs CM innotescet, hincque angulus GCM. Quo cognito erit celeritas venti $\sqrt{k}$ ad celeritatem machinae $\sqrt{v}$ vt CN : MN = sin. tot. ad tang. GCM, erit ergo $\sqrt{k} = \frac{\sqrt{v}}{\text{tang.}\,GCM}$: ventus vno minuto secundo absoluet spatium $= \frac{a}{\text{tang.}\,GCM}$.

§. 827. Supra quidem iam modum exposuimus venti celeritatem explorandi, ope tabulae circa axem horizontalem mobili, cuius inclinatio a situ verticali celeritatem venti indicabat. Quoniam vero hic modus supra traditus pendet a theoria resistentiae, atque isto nititur principio, quod impetus fluidi contra obstaculum planum irruentis sit in duplicata ratione celeritatis fluidi et sinus anguli incidentiae; propter hanc causam dubius videri potest. Hic autem posterior modus nulla eiusmodi hypothesi, quae in dubium vocari queat, nititur, et hanc obrem veram celeritatem venti ita monstrabit vt extra omne dubium collocetur. Quamobrem per hunc ipsum modum hic traditum, ille qui supra est propositus commode explorari, atque ex consensu vel dissensu ipsa hypothesis, cui prior est superstructus, vel confirmari vel euerti poterit, quo

ipſo theoria impetus fluidorum magnopere perficietur.

§. 828. Si igitur ventus fuerit borealis, ſeu a borea auſtrum verſus progrediatur, atque nauis ab occaſu in ortum moueatur, his qui in naui ſunt ventus non borealis ſed verſus ortum declinans apparebit. Contra vero ſi nauis ab ortu in occaſum currat, ventus idem occaſum verſus declinare videbitur. Quodſi ergo ſpirante aquilone duae naues ſibi occurrant, quarum altera in ortum, altera in occaſum curſum dirigat ſuum, quamuis ambae ab eodem vento impellantur, tamen putabunt ventum in eadem regione diuerſum extare: atque altera alterius ventum ſibi potius optabit quam ſuum. Quae nauis enim verſus ortum progreditur, ventum mallet ab aquilone occaſum verſus declinantem, quali alteram nauem propelli exiſtimat: ſicque viciſſim haec altera nauis ſibi ventum, quo priorem vrgeri videt, expetet. Eo maius autem hoc diſcrimen apparebit, quo celerius vtraque promouetur.

§. 829. In naue igitur mota neque vera venti celeritas neque eius vera directio percipitur, et hancobrem ipſum nauis motum ex venti tam celeritate quam directione apparente definiri conueniet. Cum autem hoc pacto motus venti relatiuus ſentiatur, qualis eſt reſpectu nauis, manifeſtum eſt ab hoc motu relatiuo eundem in naui oriri debere effectum atque in naue quieſcente a vento, cuius motus abſolutus cum iſto relatiuo conſentiat. Quamobrem ſi celeritas venti in naui aeſtimata ſit debita altitudini k, atque ſinus anguli, ſub quo ventus in vela incidere obſeruatur, ſit $= m$, erit celeritas nauis abſoluta $\sqrt{v} = \frac{mg\sqrt{k}}{f\sqrt{i}}$; ceteris ergo paribus erit celeritas nauis vt ſinus m anguli, quem directio venti cum planitie velorum

facere

facere obſeruatur, ſeu vt coſinus anguli, quem directio venti apparens cum ipſius nauis longitudine conſtituit. Haec vero regula tantum locum habet, ſi omnia vela ad vnum malum fuerint extenſa et iuxta ſe poſita, neque vnum impediat, quominus ventus in reliqua incurrat; quod euenit, ſi vela per plures malos ſint extenſa. Hunc ergo caſum ſeorſim euolui oportet.

§. 830. Inſtructa ſit nauis duobus velis EF et ef, aequalibus inter ſe, atque ad axem nauis AB normaliter extenſis, ſit autem vtriusque veli figura parallelogrammum rectangulum, cuius latitudo $EF = ef = g$, et vtriusque altitudo $= a$; ſitque porro diſtantia horum velorum $Cc = c$, et reſiſtentia nauis abſoluta ponatur $= ff$. Venti autem celeritas vera ſit debita altitudini k. Veniat primum ventus directe a puppi in directione BC, atque manifeſtum eſt, velum poſterius EF ventum ita eſſe excepturum, vt in anterius ef nulla venti portio incurrat; nauisque igitur perinde promouebitur, ac ſi ſolum velum poſterius EF eſſet extenſum, cuius ſuperficies eſt $= ag$. Si igitur celeritas nauis ab hoc vento acquiſita ponatur debita altitudini v, erit venti celeritas, qua in velum EF irruit $= \sqrt{k} - \sqrt{v}$, vnde fiet $ffv = \frac{1}{i} ag (\sqrt{k} - \sqrt{v})^2$ et $f\sqrt{v} = \frac{\sqrt{agk}}{\sqrt{i}} - \frac{\sqrt{agv}}{\sqrt{i}}$. Quamobrem erit celeritas venti $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{agk}}{\sqrt{ag} + f\sqrt{i}}$, vbi valor ipſius $\sqrt{i}$ eſt circiter $= 28$. Fig. 4.

§ 831. Quam primum autem ventus a directione BC deflectit, praeter velum poſterius EF quoque aliquam portionem veli anterioris ſtringet; quae portio eo maior erit, quo maior primum fuerit angulus BCV, tum vero etiam quo celerius nauis progrediatur. Si enim directio venti vera ſit VC, quae cum axe nauis AB faciat angulum

gulum VCB, cuius ſinus $= n$, et coſinus $= m$; tum primo inſtanti quo nauis etiam nunc quieſcit, anterioris veli portio ek a vento ſtringetur, vt ſit anguli Eke ſinus $= m$, coſinus $= n$, ideoque $\frac{ek}{Ee} = \frac{n}{m}$, ſeu $ek = \frac{nc}{m}$. Statim vero ac nauis aliquam acquirit celeritatem directio venti relatiua mutatur, eiusque obliquitas augetur, ita vt ventus in directione vC in vela impingere cenſendus ſit. Hinc igitur ob maiorem angulum vCB cui angulus Eke eſt aequalis, maior pars ek veli anterioris ſtringetur; ideoque ob duplicem rationem impetus venti obliqui erit maior, ſi nauis duobus velis ſit inſtructa.

§. 832. Ad verum igitur venti obliqui effectum determinandum, ſumta CN, quae ſit ad VC vt celeritas nauis Vv ad celeritatem venti veram Vk, compleatur parallelogrammum $CVvN$, et diagonalis vC repraeſentabit cum directionem venti relatiuam, tum eius celeritatem. Sit anguli BCv ſinus $= \nu$; et coſinus $= \mu$; et ducta uEk ipſi vC parallela, erit ek portio veli anterioris a vento percurſa, ideoque habebitur $ek = \frac{\nu c}{\mu}$: ex quo tota velorum ſuperficies, quae impetum venti ſentiet erit $= a(g + \frac{\nu c}{\mu})$. Cum igitur anguli incidentiae vCE ſinus ſit $= \mu$, et altitudo celeritati debita $= \frac{Cv^2 . k}{CV^2}$, erit vis venti in vela exerta $= \frac{Cv^2 . k}{CV^2} \mu \mu a (g + \frac{\nu c}{\mu})$, quae aequalis eſt reſiſtentiae nauis $iffv$ denotante $i : 1$ rationem grauitatis ſpecificae aquae ad aerem. Vel ſi ponatur $CV = Vk$, et $CN = Vv$, quia in parallelogrammo $CVvN$ ratio tantum laterum ſpectatur erit $iffv = Cv^2 . \mu \mu a (g + \frac{\nu c}{\mu})$; vbi valores lineae Cv et ſinuum μ, ν, in quantitatibus cognitis k, v, m et n exprimi debent.

§. 833.

§. 833. Sit $Cv = \sqrt{z}$, et quia in triangu'o CNv eſt ſinus anguli $CNv = n$, et coſ. $CNv = m$; itemque ſin. $BCv = \nu$ et coſ. $BCv = \mu$; erit $n : \nu = \sqrt{z} : \sqrt{k}$. Deinde vero ex natura triangulorum erit $z = k + v - 2m\sqrt{kv}$; et $k = z + v + 2\mu\sqrt{zv}$; vnde $\mu = \frac{k-z-v}{2\sqrt{zv}} = \frac{m\sqrt{kv}-v}{\sqrt{zv}} = \frac{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}{\sqrt{z}}$. Cum igitur ſit $iffv = \mu\mu za\left(g + \frac{\nu c}{\mu}\right)$; erit $iffv = (m\sqrt{k} - \sqrt{v})^2\, a\left(g + \frac{\nu c}{\mu}\right)$; atque ob $\nu = \frac{n\sqrt{k}}{\sqrt{z}}$ erit $\frac{\nu}{\mu} = \frac{n\sqrt{k}}{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}$, quo valore loco $\frac{\nu}{\mu}$ ſubſtituto habebitur $ek = \frac{nc\sqrt{k}}{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}$ et $iffv = ag(m\sqrt{k} - \sqrt{v})^2 + ac(m\sqrt{k} - \sqrt{v})\, n\sqrt{k} = mmagk - 2mag\sqrt{kv} + agv + mnack - nac\sqrt{kv}$; adeoque $v = \frac{-4mag\sqrt{kv} - 2nac\sqrt{kv} + 2mmagk + 2mnack}{2iff - 2ag}$ et $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{-2mag - nac + \sqrt{(nnaacc + 4imaff(mg+nc))}}{2iff - 2ag}$. Sin autem fuerit $ag = iff$ erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{m(mg+nc)}{2mg+nc}$.

§. 834. Ex caſu hoc quo $ag = iff$ intelligitur navem a vento cum quadam obliquitate incurrente celerius propelli quam a vento directo: ſi enim angulus BCV fuerit minimus $= \Phi$ erit $n = \Phi$ et $m = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$, reiectis ob paruitatem altioribus ipſius Φ poteſtatibus. Hinc erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{(1-\Phi\Phi)g + \Phi c}{(2-\Phi\Phi)g + \Phi c} = \frac{1}{2} + \frac{\Phi c}{4g} - \frac{\Phi\Phi(2gg+cc)}{8gg}$, quae expreſſio maior eſt, quam ſi eſſet $\Phi = 0$, foret enim tantum $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2}$. Creſcente ergo obliquitate venti creſcit celeritas nauis vsque ad datum terminum, quem cum attigerit celeritas iterum decreſcit: ideoque dabitur certus obliquitatis angulus, cui maxima celeritas nauis reſpondet, qui ex formula $\frac{mmg+mnc}{2mg+nc}$ differentiata elicitur. Prodit autem $0 = 2mmngg + 2mnncg - m^3cg + n^3cc$, vel ſi tangens anguli quaeſiti BCV ponatur $= t$ vt ſit $t = \frac{n}{m}$

 erit

erit $cct^3 + 2cgtt + 2ggt - cg = 0$, vnde fit $\frac{c}{g} = \frac{1 - 2tt \pm \sqrt{(1 - 4tt - 4t^4)}}{2t^3}$.

§. 835. Debet ergo esse $1 - 4tt - 4t^4$ quantitas positiua, quae sit $= \alpha$, vt sit $1 - 4tt - 4t^4 = \alpha$, vnde fiet $(1 + 2tt)^2 = 2 - \alpha$ et $t = \sqrt{\frac{\sqrt{(2-\alpha)} - 1}{2}}$. Patet itaque α minus esse debere quam 2, ne $\sqrt{(2 - \alpha)}$ fiat imaginarium; insuper vero esse debet $\alpha < 1$, ne valor ipsius t fiat imaginarius. Cum autem t crescat, decrescente α, angulus obliquitatis BCV, cui maxima nauis celeritas respondet, erit maximus, si fiat $\alpha = v$; quo casu erit $t = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} = 0,455089$, et angulus $BCV = 24°, 28', 11''$; maior ergo esse nequit angulus BCV, cui maxima nauis celeritas respondet, si quidem fuerit $ag = iff$. Hoc vero casu erit $\frac{c}{g} = \frac{1 - 2tt}{2t^3} = \frac{\sqrt{2}}{t} = 2\sqrt{(\sqrt{2} + 1)} = 3, 106$, nempe distantia velorum $Cc = c$ maior esse debet, quam latitudo velorum g ter sumta, fitque hoc casu $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)}} = \frac{1}{1,553} = 0, 643$.

§. 836. Quae cum ita se habeant casu $iff = ag$, videamus sub quonam obliquitatis angulo idem ventus naui maximam celeritatem inducat generaliter; sit itaque $iff = \delta ag$, et erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{-2mg - nc + \sqrt{(nncc + 4\delta mmgg + 4\delta mncg)}}{2g(\delta - 1)}$, quae differentiata posito m et n variabili, et sumto $t = \frac{n}{m}$ deducet ad hanc aequationem $(2gt - c)\sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)} = 2\delta cgtt + 4\delta ggt - cct - 2\delta cg$; hincque sumtis vtrinque quadratis habebitur $(\delta + 1)ccgt^4 \underset{-c^3}{+ 4\delta cgg}\,t^3 \underset{-2\delta ccg}{+ 4\delta g^3}\,tt - 4\delta cggt + \delta ccg = 0$ ita vt tangens t anguli quaesiti BCV definiatur per aequationem biquadratam, quae si $\delta = 1$, diuidi potest per $2gt - c$ et depri-



deprimitur ad aequationem cubicam praecedentem. Sub hoc igitur obliquitatis angulo, cuius tangens $= t$, nauis celerrime propelletur nisi forte portio veli ek maior euadat quam tota latitudo veli g. Cum autem sit $ek = \frac{nc\sqrt{k}}{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}$ erit pro $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ valore superiori substituto, $ek = \frac{2(\delta-1)cgt}{2\delta g + ct - \sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)}}$ qui valor si esset $> g$, consequentia de motu celerrimo non amplius valeret.

§. 837. Ponamus ergo esse $ek = g$, quo vis venti fiat maxima, simulac totum velum anterius percutit; atque habebimus praeter superiorem aequationem inuentam, hanc $2\delta ct - 2ct = 2\delta g + ct - \sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)}$ seu $\sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)} = 2\delta g + 3ct - 2\delta ct$, qui valor rationalis loco surdi in superiori aequatione substitutus dabit $(2gt - c)(2\delta g + 3ct - 2\delta ct) = 4\delta ggt - 2\delta cg + 6cgtt - 3cct - 4\delta cgtt + 2\delta cct = 2\delta cgtt + 4\delta ggt - cct - 2\delta cg$, seu reducendo $6\delta cgtt - 6cgtt + 2cct - 2\delta cct = 0$, hinc per $2(\delta-1)ct$ diuidendo fit $3gt = c$, et $t = \frac{c}{3g}$. Substituatur hic valor in vna praecedentium, eritque $\sqrt{(c^4 + 12\delta ccgg + 36\delta g^4)} = 6\delta gg - 2\delta cc + 3cc$, vnde elicitur $9\delta g^4 - 6\delta ccgg + \delta c^4 - 2c^4 = 0$ seu $(3\delta gg - \delta cc)^2 = 2\delta c^4$ et $\frac{gg}{cc} = \frac{\delta \pm \sqrt{2\delta}}{3\delta} = \frac{\sqrt{\delta} \pm \sqrt{2}}{3\sqrt{\delta}}$. Consequenter habebitur $\frac{g}{c} = \sqrt{\frac{\sqrt{\delta} \pm \sqrt{2}}{3\sqrt{\delta}}}$ et $t = \sqrt{\frac{\sqrt{\delta}}{3\sqrt{\delta} \pm 3\sqrt{2}}}$ vbi si $\delta > 2$ duplex solutio locum habet.

§. 838. Quantam autem celeritatem nauis, si vela ad hanc normam fuerint disposita, a vento obliquo sit acceptura, commodissime ex aequatione $ek = \frac{nc\sqrt{k}}{m\sqrt{k}-\sqrt{v}} = g$ colligetur; quippe quae statim praebet $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = m - \frac{nc}{g} =$

 $m-$

$m - 3nt$ ob $t = \frac{c}{3g}$. Cum vero ſit $n = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}$ et $m = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$ erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{1-3tt}{\sqrt{(1+tt)}}$, quae ob $tt = \frac{\sqrt{\delta}}{3\sqrt{\delta}+3\sqrt{2}} = \frac{\delta}{3\delta+3\sqrt{2\delta}}$, hincque $1 - 3tt = \frac{\sqrt{2\delta}}{\delta+\sqrt{2\delta}}$; et $1+tt = \frac{4\delta+3\sqrt{2\delta}}{3\delta+3\sqrt{2\delta}}$ dabit $\frac{v}{k} = \frac{6\delta}{(\delta+\sqrt{2\delta})(4\delta+3\sqrt{2\delta})}$ et $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(4\delta+6+7\sqrt{2\delta})}}$ Quodſi autem ventus eadem celeritate a puppi in vela incurreret foret $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{ag}}{\sqrt{ag}+f\sqrt{i}} = \frac{1}{1+\sqrt{\delta}}$; ob $iff = \delta ag$; ſeu $\frac{v}{k} = \frac{1}{\delta+1+2\sqrt{\delta}}$; pro vento vero obliquo eſt $\frac{v}{k} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}\delta+\frac{n}{6}\sqrt{2\delta}}$ quae expreſſio ob minorem denominatorem maior eſt quam illa. Hinc itaque vera ratio patet, cur nauis a vento aliquantum obliquo celerius promoueatur, quam a vento directo; quod phaenomenon nauigantes quotidie experiuntur.

§. 839. Si ventus ſecundum directionem nauis BA in vela impingat, poſtica tantum vela EF ferit, atque anteriora *ef* nullam prorſus venti vim ſuſtinent, hocque igitur caſu vela anteriora ſunt inutilia, niſi forte ſint latiora. Quare ſi ventus perpetuo a puppi flaret, ſufficeret nauem vnico malo inſtrui, atque ſuperuacaneum foret vel plures malos in naui conſtituere, vel iuxta eos vela extendere. Statim vero ac ventus oblique incidit, vela anteriora quoque ad nauem propellendam vim acquirunt, quoniam eorum portio quaedam *ek* a vento impellitur, quae portio eo erit maior quo magis diſtet velum anterius *ef* a poſteriori EF. Interim tamen portio *ek* a vento percuſſa non vltra totam veli latitudinem creſcere poteſt; quare ſi interuallum C*c* iam fuerit tantum vt totum velum *ef* vim venti ſentiat, tum etiamſi velum *ef* vlterius anteriora verſus remoueatur, tamen effectus venti

venti non augeretur. Hinc igitur pro data venti obliquitate diſtantia velorum C$c = c$ maxime idonea definitur, quae tanta eſſe debet, vt ſit $\frac{g}{c} =$ tangenti anguli obliquitatis, ſub quo ventus flare obſeruatur.

§. 840. Si igitur fuerit VO directio, ſecundum quam ventus venire deprehenditur. Scilicet non ſit VO vera venti directio ſed ea, quam in naui habere videtur, et in qua in vela impingit. Pro hac ergo venti directione velum anterius ef ita aptiſſime conſtituetur, vt ventus id totum ſtringat, quod eueniet, ſi fuerit tangens anguli BOV ad ſinum totum vt latitudo velorum EF$=ef$ ad diſtantiam Cc. Atque ſi diſtantia haec Cc non ſit maior, inutile prorſus foret inter haec duo vela tertium $\varepsilon\sigma$ conſtituere; neque enim tale velum quicquam ad nauem celerius promouendam conferret. Ponamus namque eiusmodi velum $\varepsilon\sigma$ inter duo vela EF et ef expandi, atque manifeſtum eſt ventum quidem in eius portionem $\varepsilon\varkappa$ impingere; at hoc ipſum velum impediet quo minus ventus integrum velum anterius ef ſtringat. Sollicitabit ſcilicet tantum eius portionem ek reliqua parte kf penitus relicta intacta. Cum igitur ſit $\varepsilon\varkappa = kf$ ventus non maiorem vim ad nauem propellendam exeret, quam ſi velum intermedium $\varepsilon\sigma$ penitus abeſſet. Simul autem hinc intelligitur nullum incrementum vis venti obtineri, ſi plura vela inter extrema EF et ef extendantur. Tab. XXIV. fig. 5.

§. 841. Quemadmodum autem velis EF et ef ita ordinatis vti expoſuimus, inutile foret inter ea alia vela extendere, ita e contrario bono cum ſucceſſu vltra ea proram verſus plura vela vti $\varepsilon\sigma$ conſtituentur, quibus vis propellens non mediocriter augebitur. Sic ſi pro data Fig. 6.

 ven-

venti obliquitate VE fuerit Cc debita duorum velorum distantia ad eandem distantiam $c\gamma = Cc$ tertium velum $\varepsilon\sigma$, vlteriusque quartum et quintum vtiliter constituetur, siquidem longitudo nauis id permittat. Atque si vela hanc teneant inter se distantiam, tanta vi nauis promovebitur, quam fieri potest, et superuacaneum foret inter haec vela alia extendere; quippe quae vim a vento exceptam non augerent; nisi obliquitas venti maior euaderet. Interim tamen plura vela, quam haec regula postulat, vim venti non diminuunt; et quia aucta venti obliquitate, etiam vim propellentem adaugent, nimis magnus velorum numerus non penitus est reiiciendus.

§. 842. Hinc igitur pro data venti obliquitate, non solum interuallum inter bina vela se immediate sequentia sed etiam numerus velorum ac proinde numerus malorum determinari poterit. Sit enim anguli, quem directio venti cum directione nauis constituit, tangens $= t$; latitudo velorum quam vbique eandem assumo, $= g$, et distantia inter bina vela $Cc = c\gamma = c$; quia est $\frac{g}{c} = t$ erit haec distantia $c = \frac{g}{t}$ posito sinu toto $= 1$. Quodsi iam tota nauis longitudo, per quam vela extendere licet, quae sit $= a$ diuidatur per $c = \frac{g}{t}$, quotus $\frac{at}{g}$ ostendet quot eiusmodi interualla c secundum nauis longitudinem constituere liceat, et cum malorum numerus sit vnitate maior, erit pro data venti obliquitate numerus malorum maxime idoneus $= 1 + \frac{at}{g}$. Hinc nempe intelligitur si nauis esset paucioribus malis instructa, eius motum minus futurum esse celerem; etiamsi autem plures mali constituerentur,

tamen

tamen nauem celerius non esse progressuram; ac propterea nauem tam velis quam malis inutiliter esse oneratam.

§. 843. Quoniam expressio $1 + \frac{at}{g}$ indicat numerum malorum conuenientissimum pro data venti obliquitate cuius tangens est $= t$; manifestum est, quo maior fuerit venti obliquitas, eo plures malos vtiliter adhiberi posse. Conueniet autem numerum malorum ex maxima obliquitate venti, sub qua cursum etiamnum directum conseruare expedit, definire, propterea quod pro minori venti obliquitate idem malorum numerus, etsi nauis celeritatem non auget, eam tamen non diminuit. Expedit autem plerumque, si obliquitas venti maior euadat quam 60°, cursum obliquum potius instituere quam directum, et hancobrem maximus ipsius t valor non superabit tangentem 60°, quae est $= \sqrt{3}$. Quare aptissimus malorum naui imponendorum numerus erit circiter $= 1 + \frac{a\sqrt{3}}{a}$, vel $= 1 + \frac{7a}{4g}$; vbi a non totam nauis longitudinem sed distantiam inter malos extremos significat

§. 844. Quo longior ergo est nauis manente eadem eius latitudine, a qua velorum latitudo g pendet, eo plures malos in ea collocari oportebit; ideoque eo maiorem vim a vento excipiet. Cum igitur acuta nauis longitudine eius resistentia non augeatur, quo longior fuerit nauis, eo celerius a vento obliquo propelletur; quanquam a vento recto non maiorem celeritatem quam nauis breuior acquirit, hincque patet noua ratio, propter quam naues quam longissimas confici expedit. Solet autem fere in nauibus grandioribus longitudo a quadruplo esse maior quam latitudo, et velorum inferiorum latitudo prope modum duplo maior quam latitudo nauis, ita vt sit $a = 2g$;

vnde

vnde ſecundum regulam inuentam in eiusmodi nauibus $1 + 3\frac{1}{2}$ ſeu 4 mali conſtitui deberent, eo quod a ob rationem allatam minor eſt quam tota nauis longitudo $2g$. Inſtructae autem ſunt iſtae naues reuera quatuor malis, praeter tres enim malos proprie ſic dictos roſtrum quarti mali vicem ſuſtinet, quippe ex quo pariter vela extenduntur.

§. 845. Pendet autem, numerus malorum potiſſimum a latitudine velorum g, quae quo fuerit maior, eo magis numerus malorum reſtringitur, vnde naſcitur grauiſſima cauſa latitudinis velorum maxime augendae. Non ſolum autem per auctam velorum latitudinem hoc nanciſcimur commodum, vt numerus malorum diminuatur, ſed etiamſi ventus directe a puppi veniat, quo caſu anteriorum malorum vela iacent inutilia, nauis eo maiori vi propelletur, quo vela fuerint latiora; neque enim hoc caſu defectus velorum per numerum malorum compenſari poteſt. Quamuis autem inferius vela fiant latiſſima tamen ſuperiora verſus ſenſim confici debent arctiora, et hanc ob cauſam in ſublimi maiorem malorum numerum adeſſe expediret; in his igitur regionibus conueniet plura vela extendere, atque intra malos ad funes robuſtos alligare, quod ſubſidium in praxi vtiliter adhiberi ſolet.

Tab. XXV. fig. 1. §. 846. Quanquam hactenus omnia vela aeque lata poſuimus, tamen ſimili modo effectus, quem ventus in vela diuerſae latitudinis exerit, colligi poterit. Inſtructa enim ſit nauis AB duobus velis EF et ef, quorum poſterius EF latius ſit quam anterius ef. Hoc caſu manifeſtum eſt ab anteriori velo ef nullam prorſus vim a vento excipi, non ſolum ſi ventus directe a puppi veniat

niat, ſed etiam ſi habeat obliquitatem non maiorem quam eſt angulus EOB, quem recta E*e* per velorum terminos ducta cum axe nauis conſtituit. Niſi ergo obliquitas venti maior ſit iſto angulo, nauis non magis propelletur, quam ſi velum anterius *ef* plane abeſſet; atque tum demum a velo *ef* effectus orietur, cum obliquitas venti, ſeu angulus, quem eius directio cum axe nauis BA facit, fuerit maior quam angulus EOB. Prius autem totum velum anterius *ef* a vento non incitabitur, quam obliquitas venti ſuperet angulum E*o*B, cuius anguli tangens eſt $= \frac{EC+ec}{Cc}$. Anguli autem EOB, ſub quo velum anterius *ef* primum vim exerere incipit tangens eſt $= \frac{EC-ec}{Cc}$.

§. 847. Sin autem velum anterius *ef* latius ſit quam poſterius EF, tum ſi ventus directe impingat, praeter velum poſterius EF totum, anterioris veli partes *em* et *fn* venti vim ſentient, ſicque ob EF $= mn$, nauis perinde mouebiter, ac ſi velum poſterius EF prorſus eſſet ſublatum, ſolumque velum latius *ef* relinqueretur. Hocque modo velum poſterius quaſi inutile manebit, quoad venti obliquitas non excedat angulum *m*E*e* ſeu *n*F*f*, qui formatur a recta F*f*, velorum extremitates F, *f* iungente cum recta F*n* axi nauis parallela; quamdiu ergo tangens obliquitatis venti minor fuerit quam $\frac{nf}{Fn} = \frac{ec-EC}{Cc}$, ſine detrimento minus velum EF praetermittitur. At ſi venti obliquitas vltra hunc terminum augeatur, tum quidem vis propellens maior exiſtit quam a ſolo velo latiori, ante vero ambo vela tota a vento non incitabuntur, quam cum venti obliquitas maior euadit angulo E*o*B, cuius tangens eſt $= \frac{EC+ec}{Cc}$. Fig. 2.

§. 848. Si igitur eiusmodi duo vela inaequalia ita disponi debeant, vt datae obliquitatis ventus ea ambo penitus perstringat, interuallum Cc tantum esse debebit, vt fiat $\frac{EC+ec}{Cc}$ = tang. obliquitatis datae pro vtroque casu: scilicet si haec dispositio requiratur pro venti obliquitate 60°, oportebit esse $Cc = \frac{EC+ec}{\sqrt{3}}$. Hinc igitur quotcunque vela per longitudinem nauis ita poterunt disponi, vt omnia si ventus datam habeat obliquitatem, pleno vento inflentur. Sint enim vela $1\alpha 1$, $2\beta 2$, $3\gamma 3$; etc. latitu-
Fig. 3. dine data per longitudinem nauis BA ita disponenda, vt cum venti obliquitas fuerit 60° aut maior omnia inflentur; initium fiat a puppi, vbi primum velum $1\alpha 1$ constituatur, cui adiungatur $1(2)$ = semissi sequentis veli $\beta 2$ ac ducatur recta $(2)b$ cum axe BA faciens angulum 60°; eritque b locus secundi veli $2b2$, cui adiungatur $2(3) = \gamma 3$, et ducta ad eundem angulum recta $(3)c$ dabit locum veli tertii $3c3$. Porro apponatur $3(4) = \delta 4$ ducaturque $(4)d$, vt angulus $(4)d\beta$ sit 60°, habebitur d locus quarti veli $4d4$, ex quo simili ratione locus veli quinti et sequentium definietur; haecque operatio erit eadem si alius quicunque angulus obliquitatis loco 60° proponatur.

§. 849. Hinc totum interuallum inter velum primum $1a1$ et vltimum $5e5$ definiri, atque cum longitudine nauis comparari poterit, quo pateat, quot vela ratione latitudinis data nauis capere possit. Sit tangens anguli obliquitatis propositae $= t$, posito sinu toto $= 1$, eritque $ab = \frac{\alpha 1 + \beta 2}{t}$; $bc = \frac{\beta 2 + \gamma 3}{t}$; $cd = \frac{\gamma 3 + \delta 4}{t}$; et $de = \frac{\delta 4 + \epsilon 5}{t}$; vnde totum interuallum inter vela extrema erit

ae

$ae = \frac{\alpha_1 + {}_2\beta_2 + {}_3\gamma_3 + {}_4\delta_4 + \varepsilon_5}{t}$. Quare omnium velorum latitudines addantur, atque a summa subtrahatur semisumma velorum primi et vltimi; quo facto residuum per tangentem t anguli propositi diuisum dabit interuallum ae; ex quo cum tota nauis longitudo maior sit quam hoc interuallum ae, ea censeri poterit aequalis summae omnium velorum latitudinum per tangentem t anguli diuisae, ac vicissim tota nauis longitudo AB per tangentem t multiplicata dabit summam omnium velorum latitudinum vtcunque eae inter se fuerint inaequales.

§. 850. Sic igitur definitur malorum numerus ex data velorum latitudine ac nauis longitudine, hocque modo maxime satisfiet illi requisito principali, secundum quod naues maxima celeritate progredi debent. Hactenus enim tantum motum nauis progressiuum spectauimus, neque adhuc inuestigauimus, quid reliqua nauis momenta, conuersio scilicet circa axem verticalem, quo gubernatio continetur, et inclinatio circa axes horizontales ratione malorum postulent. Antequam autem huc respiciamus, quoniam circa altitudinem malorum nihil adhuc est definitum, notandum est ex sola motus progressiui contemplatione altitudinem malorum minime determinari. Cum enim hoc loco id tantum sit propositum, vt naui maxima celeritas concilietur hoc ipsum commodum eo magis obtinebitur, quo magis vis propellens augeatur. Hinc ergo vtique expediret summam malis altitudinem tribuere, quia hoc pacto quantitas velorum et vis a vento excepta plurimum multiplicaretur. Quamobrem ex hoc capite altitudini malorum non solum nulli limites ponuntur, sed etiam mali quantum fieri potest, altissimi suadentur.

§. 851. Cum igitur ex motus progreſſiui contemplatione nihil amplius circa conſtitutionem malorum praecipiatur, reliqua momenta, ad quae in nauium conſtructione potiſſimum attendi oportet, perpendamus. Ac primo quidem patebit ex conuerſione nauis circa axem verticalem, nihil, quod ad malorum conſtitutionem ſpectet, determinari, ſi quidem vela ad ſingulos malos vtrinque aequaliter extendantur. Quoniam enim in curſu directo qui hic nobis eſt propoſitus, media directio vis a vento exceptae axi nauis longitudinali eſt parallela, atque in ipſo plano diametrali exiſtit, ea ſimul per axem nauis verticalem tranſibit, hincque nullum habebit momentum ad nauem circa iſtum axem conuertendam. Quamobrem in hoc ſtatu gubernatio nauis a vi venti neque impedietur neque adiuuabitur; ſicque ſingula praecepta quae ſupra circa gubernationem nauium ſunt tradita manebunt inuariata.

§. 852. Longe aliter autem ratio erit comparata, ſi vela ad vnam tantum malorum partem extendantur, ſeu ita ſaltem, vt media directio vniuerſae vis a vento exceptae extra planum diametrale vel dextrorſum vel ſiniſtrorſum cadat. Tum enim vtique huius vis exiſtet momentum ad nauem de curſu ſuo declinandam. Scilicet ſi iſta media directio ad dextram cadat, prora nauis ſiniſtrorſum conuertetur, dextrorſum autem ſi media directio ad laeuam partem cadat. Iſte ergo effectus curſum nauis magnopere perturbans deſtrui deberet per actionem gubernaculi, quae ſaepenumero huic incommodo tollendo ne par quidem foret, nunquam autem ſine notabili celeritatis nauis detrimento exerceri poſſet. Quamobrem eiusmodi velorum

lorum ſtatus omnino eſt improbandus, haecque regula in velorum diſpoſitione ſedulo obſeruanda, vt ad vtramque partem aequalis a vento vis excipiatur, ſicque media directio per ipſum axem verticalem nauis tranſeat. Haec vero regula ideo etiam eo magis eſt tenenda, quod aequali velorum vtrinque diſpoſitione vis venti maxime augetur; nihil autem adhuc ſit repertum quod huius vis multiplicationem prohibeat.

§. 853. Huius generis autem incommodum vix euitari poteſt ſi ventus oblique in vela incidat. Quoniam enim vela tantopere extendere non licet, vt nulla prorſus curuatura ipſis a vento inducatur, vis venti in eam velorum partem, quae regioni venti eſt oppoſita, aliquanto maior exiſtet, propterea quod his locis ventus minori cum obliquitate in vela incidit. Hinc primo quidem media directio vis venti aliquantum a directione nauis declinabitur, vnde curſus nauis obliquus oriri deberet; tum vero etiam vis venti fortior erit in partes velorum a vento remotiores. Priori autem incommodo remedium afferetur, ſi vela aliquantulum ad ventum adducantur, hocque modo obliquitas incidentiae augeatur. Poſteriori vero incommodo, niſi gubernaculum ſine notabili detrimento occurrere valeat, obuiam ibitur, ſi in parte nauis vento viciniori vela vltra aequalitatem augeantur, quo per vim ad hanc partem alias praeualentem media directio totius vis in planum diametrale reducatur. Duplici autem hoc remedio tam curſus nauis directus conſeruabitur, quam nimia actio gubernaculi euitabitur.

§. 854. Perſpicuum autem porro eſt ab hac vi venti qualis ad curſum directum commode inſtituendum requiri-

tur, quantacunque demum ſit, nullam prorſus inclinationem nauis circa axem longitudinalem oriri poſſe. Cum enim media directio vis venti in planum diametrale nauis incidere debeat, in quo ſimul axis nauis longitudinalis eſt poſitus, directio vis cum iſto axe in eodem plano iacebit, hincque nullum habebit momentum ad nauem circa hunc axem inclinandam. Neque etiam curuatura velorum hic vllum impedimentum affert, qua vti vidimus, media directio vis venti mutaretur, quoniam ſi remedia ante memorata adhibeantur, haec declinatio penitus tollitur. Interim tamen ſi quod momentum vis venti reſpectu axis longitudinalis reſultaret, inclinatio nauis hinc oriunda foret perexigua ac penitus contemnenda, cum nauis eadem in curſu obliquo multo maiora momenta reſpectu huius axis ſuſtinere debeat. Quamobrem iſta conſideratio hoc loco merito negligitur.

§. 855. Supereſt igitur, vt quemadmodum vim venti ratione inclinationis nauis circa axem latitudinalem comparatam eſſe oporteat, inquiramus, vnde maximi momenti limites deriuabuntur, quos in velorum multiplicatione atque malorum altitudine ſine ingenti periculo transgredi non liceat. Cum enim vis venti momentum reſpectu amborum reliquorum axium ſit nullum, eo maius erit reſpectu axis latitudinalis, niſi forte haec directio per ipſum nauis centrum grauitatis tranſeat. Quoniam vero centrum grauitatis nauis in eius corporis medium incidit vela autem ſupra nauis corpus extendantur, manifeſtum eſt, quo altius vela fuerint diſpoſita eo maius inde eſſe oriturum momentum ad nauem inclinandam. Quamobrem ex hoc capite tam copia velorum quam malorum alti-

altitudo, determinationem atque limites adipiſcetur, quibus cum ſuperioribus praeceptis coniunctis demum efficietur, vt nauis ſine periculo celerrimum motum ſit impetratura.

§. 856. Cum igitur a vi venti oriatur momentum ad nauem circa axem latitudinalem inclinandam, inclinatio autem nimis magna ſit periculoſa, tanta venti vis, ab qua inclinatio periculoſa oriatur, tolerari nequit. Quamobrem ex maxima inclinatione, quam nauis ſine damno ſubire poteſt, magnitudo vis a vento excipendae determinabitur, neque vero hic tam quantitas ipſius vis venti definietur quam eius momentum reſpectu axis latitudinalis quod eſt productum ex ipſa hac vi in diſtantiam eius ab axe. Determinato ergo momento ipſa vis quantumvis augeri poſſet, dummodo altitudo eius mediae directionis ſupra centrum grauitatis nauis tantundem diminueretur. Ex quo ſtatim naſcitur vtiliſſima regula praecipiens; vt vela adhibeantur quam latiſſima; ſic enim eadem vniuerſorum velorum ſeruata ſuperficie directio media deorſum deducetur, eiusque momentum diminuetur. Maxime ergo nauigationi conſuleretur, ſi modus inueniretur velorum latitudinem ita magis augendi, vt tuto expandi ac ſine moleſtia tractari dirigique poſſent, qua in re vtique vna maxima nauium perfectio poſita eſſet.

§. 857. Verum inclinatio nauium non a ſola vi venti in vela exerta eiusue momento producitur, ſed etiam impetus aquae contra proram nauis allabentis plurimum confert ad inclinationem vel augendam vel minuendam. Vtriusque igitur vis momentum ante definiri oportet quam ipſam inclinationem inde oriendam aeſtimari liceat. Cognito autem hoc vtroque momento tanquam vera inclinatio-

nis

nis causa, tum demum stabilitas nauis est consideranda, qua ipse effectus determinatur atque inclinationis oriundae quantitas assignatur. Hoc igitur loco figura prorae, non amplius, quatenus ab ea resistentia nauis pendet, in computum ingredietur, sed etiam quatenus ab aqua vim excipit secundum directionem verticalem vnde satis notabile momentum respectu axis latitudinalis nasci debet. Atque his cum minima resistentia coniunctis aptissima prorae figura pro nauibus vento propulsis colligetur.

Tab. XXV. fig. 4. §. 858. Repraesentet A*ab*B nauem cursu directo secundam *ba* progredientem, cuius A*a* sit prora, B*b* puppis; in G autem situm sit totius nauis centrum grauitatis; per quod transeat vel malus vel recta imaginaria verticalis D*p*. Sit PQ media directio totius vis a vento exceptae, ipsa autem vis huius magnitudo ponatur $= P$, quae simul recta PQ indicetur. In hac ergo figura planum tabulae exhibebit nauis sectionem verticalem per axem longitudinalem factam; vnde axis latitudinalis erit normalis ad hoc planum, ac per centrum grauitatis G transibit; ex quo momentum vis P ad nauem circa axem latitudinalem inclinandam erit $= P.PG$, si quidem directio media vis venti PQ fuerit horizontalis, si enim directio PG cum recta D*p* angulum obliquum constitueret, expressio P.PG insuper per sinum huius anguli multiplicari deberet, posito sinu toto $= 1$. Assumam autem directionem PQ, vt plerumque fieri solet esse horizontalem, postmodum inuestigaturus, quid declinatio huius directionis ab horizonte immutare valeat in conclusionibus hinc deducendis.

§. 859. Hinc consideretur resistentia, quam prora navis aquam findens patitur, ac ponatur ad hoc celeritas nauis debita altitudini $= v$, quippe qua prora contra aquam impingit. Sit porro R S media directio resistentiae aquae, vtcunque ad horizontem inclinata, cuius inclinatio pendet a figura prorae, vti in superiori libro, vbi resistentiam ad calculum reuocauimus, satis superque est ostensum. Ponatur ergo ducta horizontali Rr anguli SRr sinus $= m$, et cosinus $= n$ erit vis resistentiae tota ad eius partem, qua motui nauis resistit vt sinus totus 1 ad n. Quodsi ergo, vt hactenus assumsimus, statuatur resistentia nauis absoluta tanta, quantam pateretur superficies plana ff directe eadem, qua nauis mouetur celeritate, contra aquam vibrata, erit resistentiae vis motui nauis contraria $=$ ponderi voluminis aquae ffv, quod pondus ergo erit $= \frac{Mffv}{V}$, denotante M totius nauis pondus, ac V eius volumen sub aqua mersum. Hinc itaque erit tota aquae in proram impingentis vis secundum directionem $RS = \frac{Mffv}{nV}$.

§. 860. Quoniam vero nauis cursum iam ad statum permanentem reductum esse assumo, erit vtique vis propellens P aequalis resistentiae aquae horizontali $\frac{Mffv}{V}$; vnde nascitur haec aequatio $P = \frac{Mffv}{V}$ ex qua nauis celeritas supra est determinata, nunc autem indidem ex calculo eliminari poterit. Occurat enim directio RS rectae verticali Dp in puncto S, resistentia aquae eundem exeret effectum, ac si nauis in S secundum directionem ST pelleretur a vi $ST = \frac{Mffv}{nV}$, vnde ob $P = \frac{Mffv}{V}$ erit haec vis $ST = \frac{P}{n}$, et anguli TSp sinus erit $=$ cos. $SRr = n$.

Quocirca momentum huius vis aquae ad nauem circa axem latitudinalem reclinandam erit = vi ST. SG. ſin. TSp = P. SG, ſicque omnino nauis circa axem latitudinalem inclinabitur, eiusque prora aquae profundius demergetur a virium momento P. PG − P. SG = P (PG − SG). Scilicet ſi punctum S ſupra P cadat, prora non ſolum non demergetur ſed etiam eleuabitur, puppi magis depreſſa.

§. 861. Praeter hunc autem inclinationis effectum, quem deinceps fuſius perpendemus, tota nauis alleuabitur, et quaſi leuior reddetur. Cum enim vis ST directio ſit ad horizontem inclinata, ea reſoluatur in binas vires laterales, horizontalem Sq, et verticalem Sp; quarum illa motum nauis progreſſiuum afficit eſtque $= \frac{Mfyv}{V} =$ P haec vero Sp quae eſt $= \frac{mP}{n}$, totam nauem ſurſum trahet, cuius effectus proinde in hoc conſtabit, vt nauis ex aqua quaſi extrahatur, eiusque volumen aquae ſubmerſum diminuatur. Qui effectus ſatis debebit eſſe ſenſibilis, cum ſit aequalis ipſi $\frac{m}{n}$ P, ideoque idem praeſtet ac ſi nauis tanta onerum copia, quanta pondus habeat $= \frac{m}{n}$ P priuetur. Hoc igitur effectu ob minutum volumen aquae ſubmerſum reſiſtentia quidem minuetur, hincque nauis celeritas fiet maior; at quia plerumque naues non ſatis oneratae nimis paruam habere ſolent ſtabilitatem, etiam iſte effectus non ſemper pro tanto lucro eſt habendus, quam primo intuitu videatur.

§. 862. Cum igitur omnes naues, quae velis propelluntur, eiusmodi proris ſint inſtructae, vt media directio vis aquae proram impingentis non ſit horizontalis, ſed ſurſum dirigatur, perſpicuum eſt, omnes naues, ſtatim ac

a vento propelli incipiunt, leuiores fieri debere, minusque volumen aquae immersum habere, quam si quiescant, quod phaenomenon a nauigantibus luculenter animaduerti solet. Eo magis autem nauis alleuatur, quo celeriorem cursum adipiscatur; tum enim vis a vento excepta P tanto fiet maior, simulque adeo onus $\frac{m}{n}$ P, quod de pondere nauis tollitur crescit. Ceteris ergo paribus ista allevatio eo erit maior, quo maior fuerit angulus, rRS quippe cuius tangenti $\frac{m}{n}$ est proportionalis. Cum igitur sit $P = \frac{Mffv}{V}$, erit pondus ab onere nauis ablatum $= \frac{mMffv}{nV}$, ideoque se habebit ad pondus nauis totum M vti est $\frac{m}{n}$ ffv ad V. Erit ergo alleuatio nauis in ratione composita quadrati celeritatis, resistentiae nauis absolutae ff et tangentis anguli rRS, quo media directio virium aquae ad horizontem Rr inclinatur.

§. 863. Si duae naues omnino concipiantur similes, quarum latera homologa sint vt C ad c; erunt tam ipsarum pondera M quam volumina aquae submersa V in ratione triplicata vt C^3 ad c^3; resisteutiae autem absolutae ff erunt in ratione duplicata laterum homologorum ratio vero $\frac{m}{n}$ in vtraque erit eadem. Quare si hae naues aequali celeritate propelli ponantur, erunt pondera quibus hae naues diminuentur in ratione duplicata laterum homologorum hoc est vt CC ad cc. Quoniam autem sectiones aquae eandem tenent rationem duplicatam, vtraque nauis per aequale spatium ex aqua extrahetur; scilicet si nauis maxima vnum pedem supra aquam attollitur nauis quoque minima illi prorsus similis et aeque celeriter promota per spatium vnius pedis emerget; nisi quatenus per

istam eleuationem dissimilem similitudo status vtriusque nauis tollitur. Hinc ergo quo naues fuerint maiores, eo minus erit sensibilis iste effectus ratione totius nauis; ideoque siue commodum siue incommodum inde oriundum eo minus euadet.

§. 864. Reuertamur autem ad malorum constitutionem, ac ponamus nauem malis instruendam iam esse paratam. Dabitur ergo in ea tam positio rectae verticalis Dp per eius centrum grauitatis G ductae, quam directionis virium aquae RS; hincque adeo innotescet intersectio S duarum istarum linearum. Si iam vela ad tantam altitudinem extendantur, vt media directio vis a vento exceptae PQ per ipsum punctum S transeat, tum quantacunque fuerit vis venti, nullum prorsus ex ea nascetur momentum ad nauem inclinandam; hincque nauis quam maxima vi propulsa in situ prorsus erecto sine vlla inclinatione cursum absoluet. Sin autem vela non ad tantam altitudinem pertingant, ideoque media directio vis venti PQ infra S cadat tum non solum prora nauis non magis immergetur, sed etiam eleuabitur, puppi magis immersa. Quodsi autem tanta malis altitudo tribuatur, vt media directo vis venti PQ supra punctum S cadat, tum nauis ita circa axem latitudinalem inclinabitur, vt prora profundius immergatur.

§. 865. Cum igitur ille nauis cursus sit optimus simulque tutissimus, qui cum nulla inclinatione est coniunctus, conueniet vela ad tantam altitudinem extendi, vt media directio vis a vento excipiendae per ipsum punctum S transeat. Quamobrem hinc aptissima malorum altitudo definietur, si enim omnes malos eiusdem altitudi-

titudinis ponamus, atque ad ſingulos per totam altitudinem vela aeque lata extendi ſumamus, cadet vtique media directio vis venti in mediam cuiusque mali altitudinem. Quo circa ſi vela in loco extendi incipiant, fiet tota malorum altitudo $= DS + CS = CD + 2CS$. Sin autem omnes mali non ſint aeque alti, cuiusmodi inaequalitatem ſtructura atque indoles nauis omnino requirit, tum quantum breuiores ab altitudine $CD + 2CS$ deficiunt, tantum longiores eam ſuperare debebunt, ita vt ſi ſinguli velis inſtruantur, altitudo omnium media aequetur longitudini $CD + 2CS$; vel ſi ſingulorum malorum altitudines addantur ac ſumma per malorum numerum diuidatur, prodire debebit altitudo haec inuenta $CD + 2CS$.

§. 866. Malos autem in naui conſtituendos omnino inaequalis tam altitudinis quam craſſitiei eſſe oportet, cum enim nauis non vbique aequali oneri ſuſtentando par ſit, atque circa medium plus habeat roboris quam in extremitatibus, mali extremi minores eſſe debebunt quam medii. Deinde ſi quemuis malum ſeorſim ſpectemus, is inſtar columnae inferius multo fortior ſit neceſſe eſt quam ſuperius, quo fit vt in regionibus ſublimioribus non tantam velorum vim ſuſtinere poſſit quam ad nauis ſuperficiem. Hinc vela; quo magis eleuentur, minorem latitudinem habent; et cum plura vela ad eundem malum extendi ſoleant, inferiora ratione latitudinis ſuperiora multum ſuperabunt, vnde fit vt centrum grauitatis ſeu virium velorum non in mediam altitudinem, ſed aliquantum inferius cadat. Eiusmodi vero velorum ſuperiora verſus coarctationem etiam operationis ratio poſtulat, quia vela nimis lata in ſublimi poſita non ad lubitum tractari et dirigi liceret.

liceret. Iſtam ergo malorum velorumque dipoſitionem a ſtatu nauis ac tractandi facilitate pendentem hic fuſius non attingam.

§. 867. Si iam vela inſtar trianguli iſoſcelis ſurſum conuergerent, atque centrum grauitatis ſuperficiei velorum poſitum eſſet in S, tum tota velorum altitudo foret $= 3CS$, vnde malorum altitudo prodiret $= CD + 3CS$; quae ſi vela vbique eſſent aeque lata tantum erat $= CD + 2CS$. Cum igitur reuera vela neque ſint vbique aeque lata, neque ſupra in cuſpidem acuminentur, vera malorum altitudo medium tenere debebit inter $CD + 2CS$ et $CD + 3CS$, vnde aptiſſima malorum altitudo quaſi erit $= CD + \frac{5}{2}CS$. In nauibus autem pluribus malis inſtructis, medius ſeu altiſſimus non mediocriter hanc altitudinem $CD + \frac{5}{2}CS$ ſuperare debebit, quia reliqui erunt minores; atque inaequalitas ita erit temperanda vt commune velorum centrum ad altitudinem puncti S ſit poſitum.

§. 868. Ex puncto ergo S inuento malorum ſiue aequalium ſiue inaequalium, cum numerus iam ante ſit definitus, altitudo determinabitur. Conuenienter ergo hoc punctum S a Celebr. Bougero appellatur *centrum velare*, quia media directio omnium virium a vento exceptarum per iſtud punctum tranſire debet. Altitudo itaque malorum non minor eſſe debet, quam regula iſta poſtulat: primo enim ſi minor ſtatueretur, ob vim aquae praeualentem nauis ita circa axem latitudinalem inclinaretur, vt puppi magis depreſſa prora altius eleuaretur. Tum vero in quo cardo rei vertitur, praeter neceſſitatem minor vis ad nauem propellendam impenderetur, quam a naui commodiſſi-

modiſſime ſuſtineri poſſet, vnde nulla vrgente cauſa motus nauis tardior exiſteret. Omnino autem perfectae nauis idea poſtulat, vt maxima vis, quam quidem ſine damno ſuſtentare queat, ad nauem propellendam adhibeatur, quo motu celerrimo vehatur. Quoniam vero altitudine malorum ſecundum datam regulam definita, nulla prorſus inclinatio nauis conſequitur, manifeſtum eſt magis idoneam malorum altitudinem reperiri non poſſe, quo nauis tutius ac ſine minori periculo inſtruatur.

§. 869. Quodſi autem hanc regulam transgredi conveniat, maiorem potius malis altitudinem tribui expediet, quam minorem, cum hoc pacto vis nauem promouens augeatur, ſicque ipſi maior celeritas concilietur. Inclinabitur autem vtique hoc caſu nauis proram verſus, quia momentum inclinans a vi venti ortum ſuperat alterum momentum ex vi aquae reluctante natum. Tranſeat enim vis propellentis media directio per punctum p, ac poſita vi propellente tota $= P$ erit momentum eius nauem inclinans $= P.Sp$, a quo quanta inclinatio ſit proditura ex ſtabilitate nauis reſpectu axis latitudinalis iudicari debebit. Sit igitur poſito totius nauis pondere $= M$ ſtabilitas reſpectu huius axis $= Mp$, eritque ſinus anguli inclinationis productae $= \frac{P.Sp}{Mp}$. Eousque igitur altitudinem malorum vltra datum terminum augere licebit, quoad angulus inclinationis non fiat maior, quam a naui ſine vllo periculo ſubiri poſſit; quem angulum non multum $5°$ ſuperare oportet, ita vt fractio $\frac{P.Sp}{Mp}$ non excedere debeat $\frac{1}{10}$.

§. 870. Quo maior ergo fuerit ſtabilitas nauis reſpectu axis latitudinalis, eo magis altitudinem malorum vltra terminum praeſcriptum augere licebit, ceteris paribus.

Quo-

Quoniam vero vis P praeter velorum latitudinem a celeritate venti pendet, manifestum est quo maior fuerit venti celeritas, eo minus esse debere interuallum Sp. Atque hinc istud spatium maius concedi nequit, quam a quo etiamsi ventus sit vehementissimus nulla inclinatio periculosa resultare queat; quamobrem ex valore maximo, quem vis P obtinere poterit, vento vrgente fortissimo, magnitudinem interualli Sp definiri conueniet, ne vnquam nauis periculo ex nimia inclinatione oriundo exponatur. Hinc ergo fit, quod naues, in quibus punctum p supra centrum velare S cadit, non solum proram versus inclinentur, sed etiam inclinatio eo maior existat, quo fortior fuerit ventus; cum contra naues in quibus punctum p in ipsum punctum S incidit, etiam a vehementissimo vento nullam inclinationem patiantur. Quo igitur nauis celerrimum motum sine damno impetret, maxima magnitudo interualli Sp ex stabilitate et maxima venti celeritate colligi debet, vti est praeceptum.

§. 871. Hic autem probe est notandum, quod aucto interuallo Sp, eadem manente venti vehementia, etiam ipsa vis P augeatur, ideoque momentum $P.Sp$ duplici modo crescat. Erit autem vis venti P proxime altitudini velorum $\frac{5}{8}Cp$ ideoque ipsi altitudini Cp proportionalis; vnde eius momentum erit vt $Cp.Sp$ hoc est vt $(CS+Sp)\,Sp$. Ponamus iam eiusmodi pro Sp valorem puta α esse per experientiam repertum, quo nauis etiam a fortissimo vento non vltra dimidium gradum inclinetur, ita vt foret $\frac{P.\alpha}{Mp}=\frac{1}{100}$; quoniam igitur sine periculo inclinatio ad 5 gradus augeri potest, ponamus interuallum Sp hanc inclinationem producens esse $=x$; erit pro-

propemodum $(CS+\alpha)\,\alpha:(CS+x)\,x=1:10$, vnde $10\,CS.\alpha+10\,\alpha\alpha=CS.x+xx$ ideoque $x+\frac{1}{2}CS=\sqrt{(\frac{1}{4}CS^2+10\,CS.\alpha+10\,\alpha\alpha)}$, vnde orietur idonea interualli Sp magnitudo $x=\sqrt{(\frac{1}{4}CS^2+10\,CS.\alpha+10\,\alpha\alpha)}-\frac{1}{2}CS$. Et, ſi CS prae α fuerit vehementer magnum erit $x=10\,\alpha-\frac{90\alpha\alpha}{CS}$.

§. 872. Plurimum igitur intereſt in determinatione altitudinis malorum noſſe cum centrum velare S, ſeu interſectionem mediae directionis impetus aquae RS cum recta verticali DS per centrum grauitatis nauis G ducta, tum etiam nauis ſtabilitatem. Vtrumque quidem ex figura et conſtitutione nauis cognita per calculum ſecundum methodum ſupra traditam definiri poterit, at cum ſtatus nauis ad calculum reuocatus plerumque multum ab eius ſtatu vero diſcrepare poſſit, expediet vtrumque practice per experimenta explorare; quae cum in ipſis nauibus non ad lubitum inſtitui queant, curetur nauicula fabricari naui per omnia ſimilis, ſimilique modo onerata. Inſeratur huic nauiculae verticaliter per centrum grauitatis bacillus, cui alligetur in quacunque altitudine filum, cuius ope nauicula in aqua protrahatur a pondere filum horizontaliter extendente, ac notetur vtrum durante motu antrorſum an retrorſum inclinetur; priori caſu filum humilius poſteriori ſublimius alligetur ac tractio repetatur, donec nauicula in motu prorſus non inclinetur. Quod cum euenerit punctum alligationis fili dabit centrum velare S, quod ſecundum regulam ſimilitudinis ad nauem ipſam transferetur.

§. 873. Dum haec experimenta inſtituuntur eadem opera ſtabilitas nauis explorari, atque adeo magnitudo interualli Sp, quae tolerari poſſit, aſſignari poterit. In-

vento enim in nauicula puncto S, filum aliquantum supra *S* alligetur ac dum a dato pondere protrahitur, diligenter inclinatio notetur. Hinc enim concludetur, si maior nauis in simili puncto *p* a vi horizontali propellatur, quae se habeat ad illam vim, qua nauicula erat protracta in ratione triplicata laterum homologorum seu in ratione ponderum tum eandem inclinationem consequi debere. Quodsi autem vnico casu constet, quantum nauis a data vi P in dato puncto *p* applicata inclinetur, inclinatio a quauis alia vi alibi applicata oriunda definiri poterit; erunt enim inclinationes momentis P. S*p* proportionales. Tum igitur cognita velorum superficie, ventoque maxima data celeritate facile aestimabitur vis illa P, vnde interuallum S*p* determinabitur tantum, vt nunquam inclinatio damnosa euenire queat.

§. 874. Potissimum igitur pendet altitudo malorum ac proinde copia velorum a figura prorae, quippe a qua angulus ille SR*r* determinatur. Quo magis enim media directio impetus aquae RS supra horizontem eleuatur, eo sublimius positum erit punctum S, si quidem distantia R*r* fuerit eadem; erit namque altitudo $Sr = Rr$ tang. A. SR*r*. Quamobrem si media directio aquae RS fuerit horizontalis, centrum velare caderet in punctum *r*, quod semper est sub aqua; ex quo minima velorum copia nauem inclinaret, et tametsi stabilitas nauis esset admodum magna, tamen iis venti viribus, quae ad modicum cursum instituendum requiruntur, sustinendis minime foret par. Hoc ergo incommodum in eius generis naues competit, quae omnes sectiones horizontales sub aqua inter se habent similes et aequales, quippe quae vim aquae

allabentis vbique ſecundum directionem horizontalem excipiunt. Huiusmodi ergo formae naues omnino ſunt ineptae ad malos geſtandos, neque eae ſine inſigni periculo vento committi poſſunt, talis igitur forma iis tantum nauibus eſt relinquenda, quae vel remis promouentur, vel a curſu fluminis deferuntur.

§. 875. Naues ergo velorum ope propellendas eiusmodi prora praeditas eſſe oportet, quae aſcendendo ab imo ſpinae diuergat, ita vt ſectiones horizontales vsque ad ſuperficiem aquae creſcant, vel deſcendendo a ſuperficie aquae continuo decreſcant; ſic enim in ſingulis punctis recta ad ſuperficiem prorae normalis ad horizontem inclinabitur, et cum vis aquae directionem huius normalis ſequatur, erit directio media vniuerſae aquae vis ad horizontem inclinata. Ad hanc formam cunctae naues vento propellendae conſtrui ſolent, ita vt hic pleniſſimus conſenſus theoriae cum praxi deprehendatur. Quae igitur in ſuperiori libro de vi, quam nauis in aqua promota ſuſtinet, ſunt tradita, hic commode in ſubſidium vocabuntur, quo media directio virium aquae RS definiatur. Reſoluta quidem ibi eſt vis aquae in laterales, horizontalem ſcilicet et verticalem et vtraque ſeorſim eſt definita, ab his binis viribus cognitis facillime eae coniungentur, atque directio vis aequiualentis determinabitur, cuius quidem poſitionem RS hoc loco noſſe ſufficit.

§. 876. Quo magis ergo prora ſurſum allongatur et extenuatur, eo magis media directio aquae eleuabitur atque ad ſitum verticalem propius accedet; ac, ſi prora in infinitum extenderetur, fieret media directio R S prorſus normalis ad horizontem. Hinc ſemper prora tanto-

pere elongari posset, vt malorum altitudo quantumuis magna prodiret; sed praeter incommoda plura praelongarum prorarum, quorum nonnulla iam sunt commemorata, ipsa malorum altitudo non nimis magna admitti potest. Non solum enim nimis magnum tam praealtorum malorum pondus nauem vehementer oneraret, sed etiam constitutio et confirmatio tantorum malorum maximas afferret molestias, vt lucrum inde sperandum penitus cessaret. Quin etiam velorum expansio ac directio plurimum difficilis redderetur, vt taceam plura alia incommoda, quae a tam vastis malis orirentur; quorum ingenti pondere atque apparatu ad eos sustentandos necessario centrum grauitatis totius nauis nimis eleuaretur, simulque oneratio, cui nauis est destinata, impediretur.

§. 877. Hancobrem ex natura ac robore vna cum scopo, cui nauis destinatur, altitudinem malorum, quos nauis sine incommodo gestare queat, definiri conueniet; qua inuenta prora nauis ita adstrui debebit, vt per directionem mediam virium aquae eadem malorum altitudo, quae iam erat determinata, resultet. Scilicet ex data malorum altitudine ac velorum latitudine concludetur facile altitudo puncti S seu centri velaris super centro grauitatis G; ex puncto S ad proram ducatur recta SR; atque tum proram ita formari oportebit, vt media directio virium aquae in hanc ipsam rectam RS incidat. Hoc igitur pacto non solum figura prorae propemodum sed etiam eius elongatio determinabitur; sicque naues ita construentur, vt primum tanta velorum copia sint instructae, quantam sine damno gestare valeant; tum vero vis venti inclinans ita a vi aquae aequilibretur, vt etiam a fortissimo vento nul-

la

la inclinatio ſubſequatur, quae ſine dubio eſt perfectiſſima malorum conſtitutio, quatenus ex curſu directo proficiſcitur.

§. 878. Sequenti autem modo curuatura ſpinae anterior, qua prora clauditur commodiſſime determinabitur. Sit *ab* ſpina nauis, G centrum grauitatis, per quod ad ſpinam ducatur normalis DS in eaque ex apta malorum altitudine ſtatui nauis conuenienti notetur centrum velare S, per quod ſcilicet velis omnibus paſſis media directio venti ſit tranſitura. Tum centro S amplitudine S*a* deſcribatur arcus circularis *a*A donec ad ſuperficiem aquae AB aut vltra pertingat; qui arcus praebebit curuaturam ſeu eleuationem ſpinae prorae formandae aptam. Cum enim omnes preſſiones aquae ad A*a* ſint normales, ſingularum directiones ac proinde media directio RS per punctum S tranſibit. Inuenta autem ſic ſectione nauis diametrali ſi dentur pro arbitrio ſectio aquae et ſectio ampliſſima per curuas affines tota prora formabitur, vti capite primo eſt oſtenſum. Quamuis autem hoc modo directio media vniuerſae aquae vis aliquantum alteratur, tamen diſcrepantia non erit tanta, vt inde periculum ſit metuendum. Neque enim in hoc negotio ad minutias eſt attendendum, cum poſitio puncti S ob ſtabilitatem nauis modicam patiatur amplitudinem. Tab. XXVI. fig. 1.

§. 879. Neque vero hic arcus circularis A*a* ſolus ea gaudet proprietate, vt media directio vis aquae impingentis RS per punctum propoſitum S tranſeat; haec enim eadem proprietas in infinitas alias lineas curuas competit. Quin etiam omnes arcus circulares per puncta A et *a* tranſeuntes, quorum numerus eſt infinitus eadem proprietate erunt praediti. Arcuum enim circularium per puncta A et *a* ductorum centra erunt in recta SR an-

gulum ASa bisecante, hincque media directio vis aquae in quemcunque eiusmodi arcum impingentis cadet in eandem rectam RS. Tum vero etiam linea recta puncta A et a iungens seu corda arcuum Aa dabit idoneam prorae figuram. Inter hos ergo innumerabiles arcus circulares, qui per puncta A et a duci possunt pro lubitu eligi poterit is, qui ad proram determinandam propter alias rationes videatur maxime accommodatus, et hancobrem non opus erit ad alias lineas curuas confugere.

§. 880. Ex datis ergo centro velari S, et termino spinae anteriori a vna cum superficie aquae AB definie-
Tab. XXVI. fig. 2. tur corda Aa, super qua omnes arcus circulares constructi eiusmodi prorae figuram exhibebunt, vt media directio vis aquae per punctum S transeat, erit enim haec media directio ad cordam Aa normalis, eamque bisecabit. Cum igitur vnumquemque horum arcuum ARa pro figura prorae accipere liceat, ne in electione ancipiter haereamus, conueniet eam potissimum arcum ARa prae reliquis eligi, qui prorae minimam resistentiam hotizontalem conciliet. Sic enim inter omnes arcus circulares ARa qui ad malorum altitudinem propositam aeque sunt accommodati is ad proram formandam deligetur, a quo nauis celerrimum motum adipiscatur. Hoc ergo modo duobus requisitis principalibus simul satisfaciemus, scilicet vt nauis conuenienti velorum copia instructa et celerrime promoveatur, et nullam prorsus inclinationem sensibilem siue antrorsum siue retrorsum patiatur. Neque igitur aliunde magis idonea determinatio prorae reperiri poterit.

§. 881. Cum igitur corda Aa magnitudine et positione sit data, ponatur AE $=$ aE $=$ a; sitque angulus

SEF

SEF, quem recta SR cum horizonte EF constituit, $= q$; cuius sinus ponatur $= m$ et cosinus $= n$ posito sinu toto $= 1$. Sit O centrum arcus ARa, ac ponatur OE $= b$; et radius circuli OA $=$ Oa $= c$ vt sit $c = \sqrt{(aa + bb)}$; et anguli AOR seu aOR sinus $= \frac{a}{c}$ et cosinus $= \frac{b}{c}$. Iam ad resistentiam explorandam consideretur elementum Mm, in quod aqua secundum directionem NM irruat: ducto radio OM sit angulus ROM $= s$, erit vis aquae in Mm incidentis vt Mm per quadratum sinus incidentiae RMN multiplicatum: est autem producta NM in Q sinus anguli RMN $=$ cos. OMQ $=$ cos. $(q + s)$; vnde erit vis, quam elementum Mm sustinet vt cds $(\text{cos.}\,\overline{q + s})^2$, cuius directio est MO normalis ad Mm, quare vis secundum directionem horizontalem MQ seu resistentia erit vt $cds\,(\text{cos.}\,\overline{q + s})^3$ ideoque resistentia arcus RM erit vt $\int cds\,(\text{cos.}\,\overline{q + s})^3$.

§. 882. Ad hanc formulam $\int cds\,(\text{cos.}\,\overline{q + s})^3$ integrandam manifestum est esse $(\text{cos.}\,\overline{q + s})^3 = \text{cos.}\,\overline{q + s}\,(1 - (\text{sin.}\,\overline{q + s})^2)$ vnde erit $\int cds\,(\text{cos.}\,\overline{q + s})^3 = \int cds\,\text{cos.}\,\overline{q + s} - \int cds\,\text{cos.}\,\overline{q + s}\,(\text{sin.}\,\overline{q + s})^2$ quae vtraque formula cum sit integrabilis erit integrale quaesitum $= c\,\text{sin.}\,\overline{q + s} - \frac{1}{3}c\,(\text{sin.}\,\overline{q + s})^3 + C$; haecque constans C ita debet definiri, vt posito $s = 0$, et resistentia euanescat, ex quo erit $C = -c\,\text{sin.}\,q + \frac{1}{3}c\,(\text{sin.}\,q)^3$. Quam obrem resistentia arcus RM erit $= c\,\text{sin.}\,\overline{q + s} - \frac{1}{3}c\,(\text{sin.}\,\overline{q + s})^3 - c\,\text{sin.}\,q + \frac{1}{3}c\,(\text{sin.}\,q)^3$. Sin autem angulus ROM $= s$ ad alteram partem versus A capiatur erit resistentia simili modo computata $= \int cds\,(\text{cos.}\,\overline{q + s})^3$

cuius

cuius integrale erit $= -c$ sin. $\overline{q-s} + \frac{1}{3}c\,(\text{sin.}\overline{q-s})^3 +$ c sin. $q - \frac{1}{3}c\,(\text{sin.}\,q)^3$. Ponatur angulus AOR $=$ aOR $= g$, ac in vtraque formula posito g pro s summa ambarum formularum dabit resistentiam totius arcus AR$a =$ c sin. $\overline{q+g} - c$ sin. $\overline{q-g} - \frac{1}{3}c\,(\text{sin.}\overline{q+g})^3 + \frac{1}{3}c\,(\text{sin.}\overline{q-g})^3$, ad directionem horizontalem reductam.

§. 883. Cum vero sit sin. $\overline{q+g} =$ sin. q. cos. $g +$ cos. q. sin. g et sin. $\overline{q-g} =$ sin. q. cos. $g -$ cos. q. sin. g, erit resistentia arcus AR$a = 2c$ cos. q. sin. $g - 2c\,(\text{sin.}\,q)^2$ cos. $q\,(\text{cos.}\,g)^2$ sin. $g - \frac{2}{3}c\,(\text{cos.}\,q)^3\,(\text{sin.}\,g)^3$. Quoniam nunc est sin. $q = m$, cos. $q = n$; et sin. $g = \frac{a}{c}$, atque cos. $g = \frac{b}{c}$, erit his valoribus substitutis resistentia arcus AR$a = 2na - \frac{2m^2nabb}{cc} - \frac{2}{3}\frac{n^3a^3}{cc}$. Nunc ob $cc = aa + bb$ et $mm = 1 - nn$, erit resistentia $= \frac{2na}{cc}\,(aa + bb - bb + nnbb - \frac{1}{3}nn\,aa) = \frac{2na}{3cc}\,(3aa - nnaa + 3nnbb)$. Quodsi ergo fiat $b = c = \infty$ quo casu arcus ARa cum corda Aa confunditur, erit ob a prae b euanescens resistentia $= 2n^3a$, vti alias constat. Sin autem OE $= b = 0$, vt sit $c = a$ et ARa semicirculus, erit resistentia $= \frac{2}{3}na\,(3 - nn)$, nisi quatenus ob inclinationem rectae Aa non totus semicirculus aquae allapsui exponitur.

§. 884. Quo igitur totus arcus ARa allisioni aquae opponatur, necesse est vt angulus ROa minor sit angulo ROP seu EOF, si enim sit aequalis tum tangens eius in puncto infima a fiet horizontalis, et si esset maior, arcus ad a iam sursum reflecteretur proraque alicubi profundius immergeretur quam tota spina, quae adeo figura ad proram constituendam est inepta. Debebit ergo sinus anguli ROa qui est $= \frac{a}{c}$ non maior esse sinu anguli EOF seu

ſeu coſinu anguli OEF, qui eſt $= n$, eritque igitur vel $\frac{a}{c} = n$ vel $\frac{a}{c} < n$. Sit primo $\frac{a}{c} = n$ vt ſit $\frac{b}{c} = m$, erit reſiſtentia $= \frac{2}{3} na(3nn - n^4 + 3mmnn) = \frac{4}{3} n^3 a(3 - 2nn)$. Quae reſiſtentia vel aequalis eſſe poteſt cordae vel maior vel minor; erit enim aequalis ſi $3 = 2(3 - 2nn) = 6 - 4nn$, vnde $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ideoque angulus EOF $= 60°$, ſin autem angulus EOF fuerit maior minorue $60°$, tum quoque reſiſtentia arcus minor erit, maiorue quam reſiſtentia cordae.

§. 885. Hinc apparet quandoque per incuruationem prorae reſiſtentiam diminui, quandoque vero proram rectam AEa praeſtare; qui caſus quo melius diſtingui queant, conſideremus deligentius reſiſtentiam arcus ARa eamque comparemus cum reſiſtentia, quam corda ipſa Aa patitur. Cum ergo ſit $bb = cc - aa$ erit reſiſtentia $= \frac{2na}{3cc}(3aa - 4nnaa + 3nncc) = 2na(nn + \frac{(3-4nn)aa}{3cc})$; atque reſiſtentia cordae ſit $= 2n^3 a$; patet diiudicationem ex valore $3 - 4nn$ eſſe petendam. Scilicet ſi fuerit $3 - 4nn = 0$, ſeu angulus EOF vel angulus RSG ſexaginta graduum, reſiſtentia prorae erit eadem ſiue conſtituatur recta ſecundum cordam, ſiue incuruetur ſecundum arcum circularem quemcunque per puncta A et a tranſeuntem, dummodo nulla prorae pars profundius immergatur quam ipſa ſpina. Sin autem ſit $n < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ſeu angulus RSG 60 gradibus minor, tum reſiſtentia cordae minor erit quam reſiſtentia cuiusuis arcus circularis per puncta A et a ducti.

§. 886. Caſus hic, quo angulus RSG minor eſt 60 gradibus in omnibus fere nauibus, quae malis ſolent eſſe Tab. XXVI. fig. 1.

 inſtruc-

instructae, locum habet; quocirca in his nauibus aptissima prorae figura erit linea recta puncta A et a iungens, quippe quae minimam naui producit resistentiam. Omnis ideo curuatura, quae his casibus prorae induceretur motum nauis retardaret, sicque effectum velorum qui vnice intendi solet, diminueret. Sequenti ergo modo ista prorae figura aptissima definietur; centro S interuallo Sa, quod ad finem spinae anteriorem pertingit describatur arcus circuli aRA, donec superficiem aquae in A secet ductaque corda Aa dabit prorae eleuationem atque adeo figuram conuenientissimam. Ceterum aliae rationes, quae omnes angulos, cuiusmodi oriretur in a, prohibent, applicationem huius regulae saepissime impediunt; quare ne his rationibus vis inferatur, proram in a tam parum incuruari oportebit, quam circumstantiae permittunt, ita vt minime a figura descripta aberretur.

§. 887. Sin autem naues occurrant eiusmodi, in quibus postquam arcus Aa fuerit delineatus, angulusque ASa recta SR bisectus, angulus RSG maior fiat 60 gradibus, ideoque quantitas $3 - 4nn$ valorem obtineat negatiuum, tum manifestum est quo magis prora incuruetur, eo minorem produturam esse eius resistentiam. His igitur casibus con-
Fig. 2. veniet proram in arcum circularem ARa incuruare, eius radio tam exiguo assumto, quantum fieri potest. Quoniam vero prora nusquam infra spinam descendere debet, manifestum est, angulum ROa non maiorem esse posse angulo EOF. Quare vt prorae maxima idonea curuatura tribuatur, ex puncto a erigatur recta normalis, eiusque intersectio cum recta SR notetur; haec enim intersectio dabit centrum circuli, quo arcum ARa describi conueniet.

Hoc

Hoc modo fiet prorae *a*RA tangens in imo puncto *a* horizontalis ſicque prora quaſi continuum corpus cum ſpina conſtituet, nullique occurrent anguli, quos ob alias rationes euitari oporteret.

§. 888. Eo magis igitur prora ad horizontem inclinabitur quo minor fuerit angulus RSD, ac ſimul quo minor fuerit nauis profunditas ſub aqua. Sit enim recta $SD = a$ profunditas carinae $CD = b$; et diſtantia $aD = c$; erit $Sa = SA = \surd(aa + cc)$, et $AC = \surd(aa + cc - (a-b)^2) = \surd(cc + 2ab - bb)$. Ducta iam corda A*a*, quae proram conſtituet, quoties angulus DSR non fuerit maior quam 60°, erit eius inclinatio ad horizontem = angulo CA*a*, cuius tangens eſt $= \frac{b}{\surd(cc + 2ab - bb) - c}$, et ſinus $= \frac{b}{\surd(2cc + 2ab - 2c\surd(cc + 2ab - bb))}$, vnde cum reſiſtentia ſit vt CD in quadratum huius ſinus erit reſiſtentia huius prorae rectae A*a* vt haec expreſſio $\frac{b^3}{2cc + 2ab - 2c\surd(cc + 2ab - bb)}$. Deinde vero eſt $Aa = \frac{b}{\sin CAa} = \surd(2cc + 2ab - 2c\surd(cc + 2ab - bb))$, angulus autem RSD aequalis eſt angulo CA*a*, vnde perſpicuum eſt quo minor fuerit angulus DSR eo reſiſtentiam fore minorem hincque nauem celerius eſſe progreſſuram. Tab. XXVI. fig. 1.

§. 889. Quo igitur reſiſtentia magis diminuatur, efficiendum erit vt angulus DSR plurimum diminuatur, quod fiet ſi cum altitudo SD augeatur, tum vero intervallum *a*D minuatur. Quod quidem ad poſterius attinet, quoniam *a*D a longitudine nauis pendet, quam ob grauiſſimas cauſas prorſus non diminuere licet, ſed etiam elaborandum ſit vt ea quoad fieri poteſt, augeatur; hoc relinquitur vt centrum grauitatis G, quantum fieri poteſt,

antrorſum promoueatur, quo interuallum D*a* hoc pacto minimum praeſtetur. In ſequenti autem capite aliae occurrent rationes quae eandem centri grauitatis ad proram admotionem poſtulant; quibus itaque dum ſatisfit, ſimul motus nauis accelerabitur. Quo autem centrum grauitatis proram verſus permoueatur, neceſſe eſt, vt maior onerum copia in hac nauis parte imponatur, ne autem hinc prora nimium immergatur, eius quoque volumen ſub aqua amplius fieri oportet, vnde regulae ad conſtructionem nauium requiſitae magis determinabuntur.

§. 890. Multo ſenſibilius autem aucta altitudine DS angulus DSR ac proinde reſiſtentia nauis diminuetur. Hinc ergo ſumma vtilitas perſpicitur, quam mali altiſſimi nauibus afferunt. Primo enim pluribus velis vtiliter extendendis locum concedunt, quo vis propellens fortior redditur; ex quo ſi eadem eſſet reſiſtentia, celeritas nauis augeretur. Verum praeterea quo altiores conſtituuntur mali, eo magis angulus CA*a* ac proinde reſiſtentia diminuetur, vnde denuo acceleratio nauis exiſtit. Cum igitur duplicem ob cauſam celeritas nauis aucta malorum altitudine multiplicetur, eo magis erit curandum, vt naues quam altiſſimis malis inſtruantur. Quodſi ergo impedimenta, quae nunc quidem nimiam malorum altitudinem diſſuadent, tolli vel ſuperari, vel alia ratione altitudo malorum augeri poſſet, hoc quidem nauigatio plurimum perficeretur. Interea autem probe eſt cauendum, ne praeter neceſſitatem malorum altitudo minor adhibeatur, quam nauis quaeque pro robore ſuo ſuſtinere poſſet.

§. 891. Haec igitur ſunt tenenda, ſi naues ita fabricari debeant, vt in curſu ſuo directo nullam prorſus incli-

clinationem patiantur. Quoniam vero ob insignem stabilitatem ratione axis latitudinalis, quam cum figura ipsa nauibus tribuit, tum incolumitas maxime postulat, naues sine periculo inclinationem sustinere possunt, eam ita in vsum conuerti conueniet, vt inde status nauium magis perficiatur. Supra quidem, vbi prorae figuram iam datam assumsimus, ita ab hac regula recessimus, vt malos altiores fieri suaderemus, quam resistentiae ratio postularet; vnde cum inclinatio nauis antrorsum sequeretur, ita malorum altitudo determinari debebat, vt ne inclinatio inde oriunda naui damnum afferre queat. Nunc autem si ita a regula data recedere velimus, vt inclinatio nauis antrorsum oriretur, quantam quidem sustinere posset, prora magis sursum eleuari deberet, quo media directio R S infra punctum S, per quod media directio vis venti transit, cadat; hinc autem non solum nullum lucrum sed etiam insigne damnum nauibus inferretur.

§. 892. Si enim prora A *a* magis eleuaretur atque ad situm verticalem propius adduceretur, tum resistentia nauis augeretur hincque cursus retardaretur. Atque adeo hoc pacto inclinatio in naui produceretur cum insigni incommodo. Quocirca multo erit consultius proram magis ad horizontem inclinare, quam regula ante data requirit; hoc autem modo, quia media directio vis aquae R S supra mediam directionem venti cadet, inclinatio nauis retrorsum producetur, quae dummodo non sit maior, quam sine damno sustineri potest, admitti poterit. Emolumentum autem, quod per hanc ab regula recessionem in nauem redundat, minime erit contemnendum; sic enim resistentia nauis non mediocriter diminuetur, eoque motus

nauis celerior reddetur. Eiusmodi ergo inclinatio circa axem latitudinalem innoxia vtique admitti poterit, cum tam insigne lucrum, nauis scilicet acceleratio impetretur; alia vero praeterea accedunt commoda, quae eiusmodi proram eo magis suadebunt.

§. 893. Primo enim dum prorae A*a* inclinatio ad horizontem minor redditur, simul longitudo nauis in superficie aquae AB augetur, vnde praeter alia auctae longitudinis commoda etiam stabilitas nauis respectu axis latitudinalis augetur; hincque nauis eo facilius inclinationem sustinebit, minusque damnum ab ea erit metuendum. Deinde si hoc modo prora nauis elongetur, non solum centrum grauitatis G sponte ad *a* propius accedit, sed etiam maius spatium in prora suppetit, vbi maior onerum copia collocari, hocque pacto centrum grauitatis adhuc propius antrorsum produci poterit; hac autem ipsa centri grauitatis promotione, quam punctum S sequitur, inclinatio nauis retrorsum oriunda diminuetur, atque incommodum si vllum ex hac parte esset metuendum, tolleretur. Quin etiam si ob tantam prorae onerationem in nauis statu quietis, prora aliquanto profundius immergeretur, quam par est, hic ipse defectus ab inclinatione retrorsum nata emendabitur, nauisque in situ erecto cursum absoluet.

Fig. 3. §. 894. Ad haec commoda accedit aliud non minoris pretii lucrum, quod ex ipsa nauis inclinatione retrorsum facta nascitur. Dum enim prora nauis eleuatur, eius minor portio resistentiam aquae sentiet, sicque ipsa resistentia diminuetur. Contra quidem in hoc statu nauis aqua contra vniuersum fere fundum ad puppim vsque impin-

pingit, quo reſiſtentia iterum augeri videatur. At vero in ſuperioribus vidimus reſiſtentiam non magis diminui poſſe, quam prora maxime elongata; quamobrem in praeſenti caſu, quo tota fere nauis prorae vicem ſuſtinet et aqua vbique ſub maxima obliquitate allidit, reſiſtentia vehementer diminui debebit. Denique hic non eſt praetereundum per talem inclinationem aquam liberius in gubernaculum incurrere; quae omnia tam inſignia commoda nullis incommodis inquinata eiusmodi prorae figuram, quae magis ad horizontem inclinetur, quam regula requirit, omnino ſuadent; dubiumque nullum ſupereſſe poteſt, quin in praxi a tali malorum ac prorae conſtitutione ſummus fructus percipiatur.

§. 895. Vnica ſupereſſet tractatio de malis non verticaliter conſtitutis, ſeu potius de velis, quorum ſuperficies expanſa ad horizontem ſit inclinata; verum tanta incommoda occurrunt, vt eiusmodi velorum diſpoſitio penitus ſit improbanda. Primo enim per obliquitatem eorum ſuperficies augeretur, ac propterea plus lintei requireretur, tum vero non obſtante ſuperficiei incremento, vis nauem propellens adeo in ratione duplicata ſinus anguli, quem vela cum horizonte conſtituunt, diminueretur, quae rationes vtique ſufficiunt ad eiusmodi velorum poſitionem reiiciendam. Praeterea quidem per talem velorum inclinationem tota nauis vel aquae profundius immergi, vel altius ex aqua extrahi poſſet, ſed haec non ſunt eiusmodi, vt memorata incommoda ideo admitti queant: niſi forte certae circumſtantiae quandoque eiusmodi effectum abſolute requirant, quae cum eueniunt, ipſae potius quam motus nauis erunt ſpectandae.

Caput XI.

Caput XI.
DE CVRSV NAVIVM OBLIQVO.

§. 896.

In capite praecedente vidimus, quemadmodum cum malos constitui, tum proram instrui oporteat, vt nauis cursum directum tenens sine periculo quam celerrime progredi queat. Quoniam vero cursum directum tenere non licet, nisi venti directio congruat, ventus autem non ab arbitrio nostro pendet in nauibus vento propellendis imprimis ad cursum obliquum erit attendendum, vt quicunque fuerit ventus, nauis maxime cursum propositum sequatur. In superiori quidem libro figuram nauium ad cursum obliquum instituendum aptissimam inuestigauimus, vt deuiatio a cursu proposito esset minima. Hoc igitur loco tantum superest, vt in constitutionem malorum ad hunc scopum maxime accommodatam inquiramus, quo nauis sine periculo cum maxima celeritate ac minima deuiatione secundum directionem axis longitudinalis progrediatur. Hic autem vt in cursu directo nouae sese manifestabunt regulae, quas in conformatione prorae atque totius nauis obseruare conueniet, quibus constructio nauium magis perficietur.

§. 897. Quemadmodum cursus directus absoluitur, cum media directio vis a vento exceptae axi nauis longitudinali est parallela, quod euenit si vela ita extendantur, vt iste axis ad eorum superficiem sit normalis, ita nauis cursu obliquo feretur, si media directio vis a vento exceptae cum axe longitudinali angulum constituat obliquum. His ergo casibus nauis non in directione vis venti

ti promoueri poterit, propter resistentiam aquae, cuius directio aequalis atque contraria vi propellenti esse non potest. Sequetur ergo nauis in cursu obliquo directionem quandam mediam inter ipsam suam directionem seu axem longitudinalem et inter directionem vis propellentis, angulus autem, quem directio cursus cum axe nauis longitudinali constituit, deuiatio seu declinatio cursus vocatur. Pendet autem haec cursus declinatio potissimum a figura nauis atque eo minor existit, quo magis nauis longitudo latitudinem superauerit. Cum igitur deuiatio quam minima desideretur, ad cursum obliquum imprimis requiritur, vt longitudo nauium quantum fieri queat, prae latitudine augeatur, cuius quidem rei ratio iam supra vberius est exposita.

§. 898. Quanquam varietas inclinationis superficiei velorum ad axem longitudinalem nauis potest esse iufinita in praxi tamen ad duos fere casus reduci solet. Designet enim AB nauem seu eius axem longitudinalem, sitque A prora et B puppis. Ac primo quidem si vela in situm EF ad AB normalem disponantur, nauis cursu directo promouebitur, vti vidimus, hocque casu nauis pleno vento vehi dicitur. Deinde si vela in situm ef expandantur, vt angulus eCA fiat circiter semirectus, cursus nascetur obliquus prioris speciei, qui cum vento dimidio institui dicitur, propterea quod haec velorum dispositio ad eum potissimum ventum est accommodata, qui in directione EC ad nauem AB normali venit. Sin autem ventus in directione eC irruat, vela in situm $\varepsilon\sigma$ extenduntur, ita vt angulus εCA quasi quartam partem recti seu $22\frac{1}{2}^{\circ}$ adaequet; qui cursus propterea aduersus ventum institui dicitur. Sunt adeo duae cursus

Tab. XXVI. fig. 4.

obliqui ſpecies, quarum altera ad ventum dimidium, altera ad ventum contrarium eſt accommodata.

§. 899. Scilicet cum ventus vel a puppi B venit, vel non vltra 60 aut $56\frac{1}{4}$ gradus, qui angulus 5 rhumbos facit, diſcedit, curſus directus tenetur; hoc eſt ſumto in circulo centro C deſcripto, arcu $BM = 56\frac{1}{4}°$, ſi venti directio intra B et M cadat, vela ad ſitum EF diſponuntur. Sin autem ventus ex plaga MEN iterum quinque rhumbos ſeu angulum $56\frac{1}{4}°$ continente veniat, ita vt ſit EN $22\frac{1}{2}°$, dimidio vento nauis propelli cenſetur, atque vela in ſitum eCf diriguntur. Sin autem directio venti vltra N verſus A nempe in ſpatium Ne duos rhumbos continens incidat, curſus nauis contra ventum inſtitui dicitur ac vela in ſitum $\varepsilon C \sigma$ diſponuntur. Quodſi vero ventus ex plaga eA veniat, tum nullam memoratorum curſuum tenere licebit, his ergo caſibus ipſa nauis directio AB ita ad a declinatur, vt curſum tertium aduerſus ventum tenere liceat; nauis ergo non ſecundum directionem propoſitam BA procedet, verum tamen, dum alternatim ad dextram ac ſiniſtram deflectitur in regionem propoſitam appropinquabit.

§. 900. Quamuis autem theoria pro quauis venti directione velorum diſpoſitionem aptiſſimam monſtret, tamen in praxi haec infinita varietas non commode obſeruari poteſt, propterea quod nautae theoriae expertes non ita ad lubitum inſtrui poſſunt, vt vela ad praeceptam obliquitatem accurate diſponant. In horum igitur gratiam expedit aliquot velorum diſpoſitiones tantum relictis reliquis ad vſum adhibere, atque pro vna quaque ipſis certas notas monſtrare, quas ſequentes vela vel ad plenum ventum

tum vel ad dimidium vel ad contrarium inſtar machinarum diſponere poſſint. Hoc modo etiam gubernator facilius curſus deuiationem aeſtimabit, cum duplicem tantum curſum obliquum habeat diiudicandum; ſi enim ipſi pro vtroque ſemel innotuerit, quanta ſit deuiatio, haec breuis cognitio ſufficiet ad curſum aeſtimandum. Etſi autem vndarum motus et impetus deuiationem non mediocriter immutare ſolet, tamen non tam facile in iudicio ſuo falletur, quam ſi infinita velorum obliquitas ipſi inſuper eſſet perpendenda.

§. 901. Quod nunc primum ad numerum locumque malorum attinet, quoniam in his rebus nullam mutationem, quoties curſus obliquus inſtituitur, ſuſcipere licet, tam numero quam loco malorum eodem vti oportet, qui ſemel fuerit conſtitutus. Quamuis enim alium requireret malorum cum numerum tum locum curſus directus, alium vero obliquus, tamen ob immutabilitatem, malorum vtrique ſatisfieri non poſſet; ſed contentos non eſſe oportebit malos ita conſtituiſſe, vt cum ad neutrum curſum ſint perfecte accommodati, tamen in vtroque quam fieri poteſt maximum effectum praeſtent. Poterit interim cum velorum latitudo augeri diminuiue, tum in aliis locis praeter malos vela expandi, ſicque eadem mutatio, quae per malorum tranſpoſitionem intendi poſſet, obtineri, cuiusmodi adminicula ſaepenumero in ſubſidium vocari ſolent; verum antequam huiusmodi adminicula diiudicare liceat, examinari conueniet, quantum iam ante conſtitutus malorum cum locus tum numerus motui obliquo vel faueat vel obſtet.

Tab XXVI. fig. 5. §. 902. Pro curſu autem directo malorum loca ex velorum latitudine ita determinauimus, vt ſi directio venti a puppi 60 declinet, tum ventus in omnia vela irruat. Sint igitur D et L loca duorum malorum contiguorum, ac velorum ad illum expanſorum latitudo ſit $EF = 2a$, ad hunc vero ſit $MN = 2b$; interuallum autem malorum ſit $DL = c$. Quoniam igitur haec vela EF et MN ad curſum directum ſunt extenſa, erit ducta recta EN angulus $BOE = 60°$; ideoque $\frac{a+b}{c} = \sqrt{3}$ ſeu $c = \frac{a+b}{\sqrt{3}}$. Si ergo ventus flet in directione EON, tum omnia vela inflabuntur, atque adeo curſus directus bono cum ſucceſſu inſtituetur; ſin autem venti directio magis a puppi B declinet, angulusque BOE maior 60° fiat, tum quidem niſi ad 90° aſcendat, ſingula vela EF et MN tota perſtringet, ſed nimis oblique, atque etiam portio venti inutiliter inter vela tranſibit. Quamobrem expediet velis poſitionem quandam obliquam ef et mn tribuere, quo cum ventus magis directe in ea incurrat: tum etiam nulla eius pars inutiliter pereat.

§. 903. Ponamus vela in ſitum cf et mn ita extendi vt ſit anguli ADe ſeu ALm ſinus $= m$, coſinus $= n$. Ducatur recta en, atque manifeſtum eſt, ſi ventus in directione hac en veniat, vtrumque velum totum a vento impulſum iri; ſin autem venti obliquitas fuerit minor angulo BOe, tum partem tantum veli mn incitari, at ſi obliquitas venti maior fuerit angulo BOe tum quidem ventum totum velum mn perſtringere, at aliquam venti portionem a velis non exceptam perire. Determinemus ergo ex angulo eDA ſeu mLA aſſumto angulum BOe, quo pateat ad quemnam ventum haec velorum diſpoſitio ſit

ſit maxime accommodata. Dubium enim eſt nullum quin ventus in hac directione veniens maximam vim exerat: namque perſpicuum eſt, ſi obliquitas venti eſſet maior eius vim ob minorem angulum incidentiae minorem eſſe futuram; ſin autem obliquitas venti eſſet minor tum maior quidem foret angulus incidentiae, at ſimul non totum velum mn perſtringeretur, quo ipſo vis minor euadat neceſſe eſt.

§. 904. Ex L in velum ef demittatur normalis LK, ob anguli LDK ſinum $= m$, coſinum $= n$, et $DL = c$; erit $LK = mc$ et $DK = nc$. Deinde ex e ad mn normalis ducatur ek erit $Lk = Ke = a - nc$, et $ek = LK = mc$, ideoque fiet $nk = a + b - nc$. Hinc anguli enk erit tang. $= \frac{ek}{nk} = \frac{mc}{a+b-nc}$; quo angulo enk inuento erit angulus $BOe = 180° - enk - BLn$. Cum igitur ſit tang. $enk = \frac{mc}{a+b-nc}$; et tang. $BLn = \frac{m}{n}$ erit tang. $(enk + BLn) = \frac{m(a+b)}{n(a+b)-c}$ ob $mm + nn = 1$; ideoque tang. $BOe = \frac{m(a+b)}{c-n(a+b)}$. Supra autem vidimus eſſe $c = \frac{a+b}{\sqrt{3}}$ ex quo habetur tang. $BOe = \frac{m\sqrt{3}}{1-n\sqrt{3}}$. Cum igitur latitudo velorum ex calculo egrediatur, manifeſtum eſt ex ſolo angulo inclinationis velorum ADe, definiri directionem venti eOn ſeu angulum BOe, cui haec velorum diſpoſitio maxime conueniat; in quae ergo ventus incidet ſub angulo enk, cuius tangens eſt $= \frac{mc}{a+b-nc} = \frac{m}{\sqrt{3}-n}$; et ſinus $= \frac{m}{\sqrt{(4-2n\sqrt{3})}}$.

§. 905. Haec ita ſe habent, ſi ponamus malos ita conſtitui vt vento a puppi ad 60° vsque declinante adhuc curſus directus teneri debeat; quoniam vero a nauigantibus anguli non per gradus ſed per rhumbos, quorum

vnus 11° 15″ continet, menſurari ſolent, angulusque 60° nimis magnus videtur, expediet pro eo angulum 5 rhumborum ſeu 56° 15′ aſſumi, vel quia hic angulus non commode per ſinus et tangentes repraeſentari poteſt, in eius locum ſubſtituamus angulum 54° 44′ cuius tangens eſt $= \sqrt{2}$ ita vt ſit $c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Vbique ergo $\sqrt{2}$ loco $\sqrt{3}$ ſubſtituto, ſi anguli ADe ſeu ALm quem vela cum axe conſtituunt, ſinus ſit $= m$, et coſ. $= n$, erit obliquitas venti ſeu anguli BOe tangens $= \frac{m\sqrt{2}}{1 - n\sqrt{2}}$. Hinc ſi fuerit angulus BOe rectus, ſeu ſi venti directio cum directione nauis faciat angulum rectum, erit $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ideoque hoc caſu vela ita commodiſſime diſponentur, vt cum directione nauis AB angulum ſemirectum conſtituant, ſicque curſus obliquus cum vento dimidio talis accurate inſtituetur, qualem ſupra deſcripſimus.

§. 906. Quo autem hinc facilius intelligatur, quaenam velorum diſpoſitio ad quamlibet venti obliquitatem ſit maxime accommodata, tabellam ſupputari conueniet, quae pro quauis velorum obliquitate ſeu angulo ADe directionem venti ſeu angulum BOe vna cum angulo incidentiae venti in vela exhibeat, cuiusmodi tabellam ad denos gradus conſtruxiſſe ſufficiet.

Ang. A D e quem vela cum longitudine nauis A B faciunt	Ang. B O e quem directio venti cum B A constituit	Ang. enm sub quo ventus in vela incidit.
90°	54°, 44′	35°, 16′
80	61°, 33′	38, 27
70	68, 46	41, 14
60	76, 33	43, 27
50	85, 12	44, 48
45	90, 0	45, 0
40	95, 15	44, 45
30	107, 38	42, 22
20	124, 13	35, 47
10	147, 59	22, 1

vbi eiusmodi malorum constitutionem assumsimus vt esset $c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

§. 907. Ex hac tabula patet in cursu obliquo, siquidem ventus omnia vela per totam superficiem stringat, maximum incidentiae angulum esse 45°; qui locum habet si directio venti ad nauis directionem A B fuerit normalis, atque vela ad angulum semirectum A D e extendantur. Hoc ergo casu vis venti in vela erit maxima, nauisque celerrime promouebitur, nisi quatenus eius motus ob cursus obliquitatem retardatur. Eo maius autem hoc erit lucrum quo pluribus malis nauis fuerit instructa; atque adeo fieri potest vt nauis pluribus malis instructa a vento dimidio seu ad A B normali celerius propellatur, quam a vento pleno, qui a puppi spirat; quia hic tantum in vela postrema incurrit, ille autem ventus lateralis omnia

omnia prorſus vela idque ſub maximo angulo 45°, quem obliquitas permittit, perſtringit, cuius quidem venti commodum nautis ſatis eſt notum.

Tab. XXVI. fig. 6. §. 908. Ad haec explicanda incipiamus a curſu maxime obliquo, quo vela ita diſponi ſolent, vt cum axe nauis AB angulum EDA ſeu $edA = 22°, 30'$ conſtituant. Plerumque enim hunc angulum minorem accipere non licet, quia obliquitas hincque deuiatio nauis fieret tanta, vt curſus potius impediretur quam promoueretur. Per praecedentem ergo regulam iſta velorum diſpoſitio maxime erit accommodata ad venti directionem VEf, quae cum axe AB angulum faciat $BOV = 119°, 32'$, ſeu $VOA = 60°, 28'$, eritque angulus incidentiae $Vfe = 37°, 58'$. Viciſſim autem ſi angulus VOA fuerit $60°, 28'$, a ſtructura nauis maxime pendet vtrum expediat angulum $edA = 22°, 30'$ relinqui an maiorem accipi; ſi enim maior accipiatur, angulus incidentiae quidem Vfe ac proinde vis propellens diminueretur quidem contra autem obliquitas curſus fieret minor, quo ipſo prius detrimentum compenſari poſſet. Minor autem angulus edA ſtatui prorſus nequit, quia tum et obliquitas augeretur, et ventus non amplius totam velorum ſuperficiem inflaret.

§. 909 Si ergo ventus magis oblique in vela hoc modo extenſa incidat, quoniam velorum obliquitatem augere non licet, venti quaedam portio peribit; et cum inſuper angulus incidentiae diminuatur, vis propellens ſine dubio vehementer diminuetur; ſaepenumero autem vrgente neceſſitate, quando ventus curſui eſt contrarius, angulus Vfe ad $22°, 30'$ diminui ſolet. Quo igitur iſta

vis

vis propellentis diminutio compenſetur, velorum latitudo commode augeri poterit, vtrinque appendices adiungendo. Quanquam enim latitudo velorum EF, *ef* latitudinem nauis ſuperat, tamen in iſto ſitu obliquo tota intra parietes nauis cadent, ex quo maior latitudo tractationem non impediet; hoc itaque modo venti portio alias peritura intercipietur, atque ad vſum impendetur. Poſſunt etiam in idoneis nauis locis noua vela extendi, quo magis vis a vento excipienda augeatur: hocque omnino fieri ſolet ſi ventus ſpiret lenior, ſin autem fuerit vehemens eiusmodi ſubſidia omitti debent, ne nauis a tanta vi obliqua nimiam patiatur inclinationem.

§. 910. Quamdiu ergo venti directio ita eſt comparata vt angulus VOA non fiat maior quam 60°, 28′, vela in ſtatu deſcripto maxime obliquo ſeruare conueniet, quando vero angulus VOA excedet 60°, 28′ tum iſta velorum diſpoſitio non commode retineri poterit. Quamvis enim angulus incidentiae augeatur, tamen ventus non amplius totam velorum ſuperficiem perſtringet, ex quo vis venti eo magis diminuetur, quo plures mali in naui fuerint conſtituti. Tum vero ipſa velorum obliquitas in cauſa eſt, quod celeritas nauis progreſſiua non fiat tanta, quanta ab eodem vento per aptiorem velorum diſpoſitionem impetrari poſſet. Quare ſi angulus VOA fiat maior quam 60°, 28′ conueniet ſimul vela ita diſponi, vt angulus EDA fiat maior; quo tota velorum ſuperficies a vento infletur; hinc enim non ſolum vis a vento excepta fiet maior, ſed quia media directio quae ad velorum ſuperficiem eſt normalis, propius ad nauis directionem BA adducitur, ipſa nauis celeritas intendetur, atqne deviatio diminuetur.

§. 911. Perſpicitur hinc etiam non ſtatim atque angulus VOA fiat maior quam 60°, 28′ vela in priorem obliquitatis ſitum conſtitui conuenire, in quo angulus ADE ſit 45°, ſed perpetuo dari quendam angulum, ex quo nauis maximam obtineat velocitatem. Quamobrem, ſi commoditatis gratia duae tantum obliquitatis velorum diſpoſitiones admittantur, plerumque naui non tantus motus inducetur, quantus ab eodem vento, ſi vela aliter diſponerentur, produci poſſet. Hinc expertus atque attentus gubernator, dum a vulgari velorum diſpoſitione recedit, ſatis notabiliter curſum nauis accelerare poterit. Nam ſi vel experientia vel theoria edoctus animaduertat, cum vela in altero obliquitatis ſitu iam fuerint collocata, curſum nauis celeriorem eſſe futurum, ſi obliquitas velorum aliquantum vel diminuatur vel augeatur, iubebit velorum extremitates E et F in vna parte magis adduci, in altera remitti, quo magis apta obliquitas obtineatur. Atque hoc modo non ſine admiratione in longinquis itineribus obſeruari ſolet, celeritatem nauis plurimum pendere a dexteritate gubernatorum, ita vt nauis ſub directione vnius celerius promoueatur, quam ſub directione reliquorum, etiamſi omnes circumſtantiae prorſus eaedem videantur.

§. 912. Quod igitur ad numerum malorum attinet, ex dictis patet nullam eſſe rationem, quae mutationem ſuadeat, niſi forte, cum nauis aduerſus ventum annititur, videantur plures mali vim propellentem augere. Quoniam autem per appendices iſte defectus compenſari poteſt, atque in curſu tantopere obliquo vis propellens nimis magna naui periculum minatur, etiam haec ratio numeri malorum multiplicandi ceſſat, quoniam ſi ventus contrarius

parum-

parumper fortis exiſtit, ne quidem his velis, quae mali ſuppeditant, vti licet. Praeterea vero rationi minime conſentaneum foret nauem vno pluribusue malis onerari, quae nunquam vſui eſſent, niſi in curſu aduerſus ventum inſtituendo, quando ſimul ventus leniſſime ſpiraret. Seruato ergo eo malorum numero, quem in capite praecedente pro curſu directo definiuimus, iisdem in omni curſu obliquo ſatis vtiliter frui licebit, dummodo vela ita diſponantur, vt nauis motum celerrimum conſequatur. Quo autem velorum diſpoſitio maxime idonea inueniri poſſit, ipſum nauis motum, qui a quouis vento et velorum ſitu quolibet producitur, inueſtigari oportet, vt hinc per methodum maximorum et minimorum velorum ſitus aptiſſimus quouis caſu aſſignari poſſit.

§. 913. Quia in ſitu velorum obliquo, nauis non curſu directo ſed obliquo fertur, ex ſola prorae figura eiusque reſiſtentia celeritas nauis definiri nequit, ſed etiam deuiationem curſus ab directo noſſe, et quantam nauis in hoc curſu obliquo patiatur reſiſtentiam, cognitum eſſe oportet. Pendet autem iſta inquiſitio tantopere ab vniuerſa nauis figura, vt niſi haec exactiſſime ſit cognita, atque ſimul ad calculum reuocari queat, nihil accurate definiri poſſit, quemadmodum in libro ſuperiori fuſius eſt oſtenſum. Interim tamen, quia in praeſenti negotio ſcientiam exquiſitiſſimam non requirimus, atque eius modi cognitio, quae a veritate ſaltem non nimis abhorret, ſufficiens cenſetur, a veritate aliquantum diſcedere licebit, vt calculus non ſolum tractabilior reddatur, ſed etiam commode ad vſum transferri poſſit. Hunc in finem neglectis reliquis momentis omnibus, quae a figura nauis pendent, tantum duplicem nauis reſiſten-

tiam in computum trahi conueniet, alteram quam nauis in cursu directo patitur, et alteram quam pateretur, si ad latus in directione normali seu secundum axem latitudinalem moueretur.

Tab. XXVII. fig. 1. §. 914. Sit igitur ff resistentia nauis absoluta, si cursu directo secundum axis longitudinem promoueatur, et sit hh resistentia nauis lateralis absoluta, si secundum axem latitudinalem procederet; vtroque scilicet casu resistentia absoluta indicatur per superficiem planam, quae in aqua directe pari celeritate, qua nauis progreditur, mota etiam eandem, quam nauis resistentiam patiatur. Non igitur in determinatione motus nauis cuiuscunque vehementer a veritate aberrabimus, si loco verae nauis mente substituamus parallelepipedum rectangulum $a\alpha\beta b$, cuius facies anterior $a\alpha$ sit $= ff$, et facies lateralis $\alpha\beta$ seu $ab = hh$; ita vt huius nauis fictae prora sit $a\alpha$, puppis $b\beta$, axis longitudinalis AB, et latitudinalis EF. Si enim ista nauis ficta cursu directo feratur eandem patietur resistentiam, quam nauis vera, eademque insuper erit vtriusque nauis resistentia, si vtraque ad latus secundum directionem CE vel CF progrediatur; vnde intelligitur discrimen sensibile intercedere non posse, si motus fiat oblique secundum directionem quamcunque CM. Quantus autem futurus sit dissensus ex libro superiori colligi poterit, vnde quidem is vix sensibilis deprehendetur.

§. 915. Substituta igitur hac naui ficta in locum verae, sit VC directio venti, eiusque celeritas debita altitudini c; vela autem ita sint disposita secundum eCf vt angulus eCA sit $= p$; et tota velorum superficies sit $= gg$. Sit porro angulus $VCe = q$, sub quo ventus in vela incidit; erit ergo si ventus totam velorum superficiem

ciem perstringat, vis venti aequalis ponderi voluminis aerei $= cgg\,(\text{sin.}\,q)^2$, seu aequalis ponderi voluminis aquei $= \frac{1}{800} cgg\,(\text{sin.}\,q)^2$; huiusque vis directio erit recta CP ad velorum superficiem ef normalis, ita vt sit angulus ACP $= 90° -$ AC$e = 90° - p$. Nunc dum nauis ista vi secundum directionem CP impellitur, quaeritur directio et celeritas, qua nauis sit progressura. Sit CM directio nauis quaesita, et angulus ACM $= s$, qui erit deuiatio cursus, seu cursus obliquitas; celeritas autem nauis, qua in hac directione progredietur debita sit altitudini v, ita vt ipsa celeritas nauis futura sit vt $\sqrt{v}$.

§ 916. Quoniam ponitur angulus ACM $= s$ erit vis quam facies anterior $a\alpha = ff$ ab aqua perpetietur $= ffv\,(\text{cos.}\,s)^2$, expressa in volumine aquae, huiusque vis directio erit recta AB, vis autem quam facies lateralis $\alpha\beta$ sustinebit erit $= hhv\,(\text{sin.}\,s)^2$ cuius directio erit in recta FE. Dum igitur nauis secundum directionem CP vi $= \frac{1}{800} cgg\,(\text{sin.}\,q)^2$ vrgetur, a resistentia duplicem patietur vim, alteram $= ffv\,(\text{cos.}\,s)^2$ in directione CB, alteram $= hhv\,(\text{sin.}\,s)^2$ in directione CE. Vis ergo his binis ex resistentia aquae ortis aequiualens, quae sit CR, primum ratione directionis vi CP contraria, tum vero eidem aequalis esse debet. Quia vero CR est media directio virium CB et CE, erit tang BCR $= \frac{hhv\,(\text{sin.}\,s)^2}{ffv\,(\text{cos.}\,s)^2} = \frac{hh}{ff}\,(\text{tang.}\,s)^2$. Quare cum angulus BCR aequalis esse debeat angulo ACP $= 90 - p$ erit tang. BCR $= \cot p = \frac{hh}{ff}\,(\text{tang.}\,s)^2$; vnde statim reperitur deuiatio nauis seu angulus ACM $= s$ ex aequatione tang. $s = \sqrt{\frac{ff}{hh}} \cot p = \sqrt{\frac{ff}{hh}}$ cotang. ACe. Ex velorum ergo dispositione ef, et vtraque nauis resistentia absoluta ff et hh reperitur deuiatio nauis seu declinatio a cursu directo ACM.

§. 917. Cum porro ſit $BCR = 90 - p$, erit vis aequiualens $CR = \frac{vi\ CB}{cof.BCR} = \frac{ffv(cof.s)^2}{fin.p}$. Quia vero eſt $tang.\ s = \sqrt{\frac{ff}{bb}} \cot p$, erit $sec.\ s = \sqrt{(1 + \frac{ff}{bb} \cot p)}$ et $cof.\ s = 1 : \sqrt{(1 + \frac{ff}{bb} \cot p)}$, vnde fit vis $CR = \frac{ff\,v}{fin.p + \frac{ff}{bb} cof.p}$; quae cum aequalis eſſe debeat vi propellenti $\frac{1}{800} cgg\,(fin.q)^2$, fiet $v = \frac{1}{800} cgg\,(\frac{fin\,p}{ff} + \frac{cof.p}{bb})(fin.q)^2$, ex qua aequatione celeritas nauis innoteſcit. Ad quam commodius exprimendam ducantur diagonales $a\beta$ et $b\alpha$, erit angulorum bCB, aCA tangens $= \frac{ff}{bb}$; ſinus $= \frac{ff}{\sqrt{(f^4 + b^4)}}$, et coſinus $= \frac{bb}{\sqrt{(f^4 + b^4)}}$. Sit angulus $ACa = BCb = e$, erit $v = \frac{1}{800}(cof.e\,fin.p + fin.e\,cof.p)(fin.q)^2 \frac{cgg\sqrt{(f^4+b^4)}}{ff\,bb} = \frac{1}{800}\ fin.\ (p + e)(fin.q)^2 . \frac{cgg}{bb\,fin.e} = \frac{1}{800}\ fin.\ (p+e)(fin.q)^2 . \frac{cgg}{ff\,cof.e}$. Erit vero $p + e = ang.\ eC\alpha$, et $q = ang.\ VCe$, vnde fiet primo $tang.\ ACM = \sqrt{tang.\ AC\alpha . cotang.\ ACe}$ et $v = \frac{cgg}{800ff\,cof.AC\alpha} fin.\ eC\alpha\,(fin.VCe)^2$.

§. 918. Poſſunt hinc plura problemata excogitari et reſolui, quae ad praxin non paruum ſubſidium afferunt. Sic ſi ponamus directionem nauis AB vna cum directione venti VC eſſe datam aptiſſima velorum diſpoſitio determinari poterit, qua nauis celerrime promoueatur. Quia nimirum directio nauis datur, ſimul poſitio rectae $C\alpha$ dabitur, ponatur ergo angulus datus $VC\alpha = a$ et angulus $VCe = q$, erit ang. $eC\alpha = a - q$. Hinc cum ſit $v = \frac{cgg}{800ff\,cof.AC\alpha}\ fin.\ (a - q)(fin.q)^2$, maximum eſſe debebit haec expreſſio $fin.\ (a-q)(fin.q)^2$, vnde fit $cof.(a-q)(fin.q)^2 = 2\ fin.(a-q)\ fin.q\ cof.q$, et per $cof.(a-q)\ fin.q\ cof.q$ vtrinque diuidendo habebitur $tang.\ q = 2\ tang(a-q)$.

Quam-

Quamobrem angulum datum $VC\alpha$ ita in duas partes per rectam Ce secari oportet, vt anguli VCe tangens duplo sit maior quam tangens anguli $eC\alpha$. Ad angulum ergo $VCe = q$ inueniendum sit tang. $a = \alpha$ et tang. $q = \theta$ erit $\theta = \frac{2\alpha - 2\theta}{1 + \alpha\theta}$ seu $3\theta + \alpha\theta\theta = 2\alpha$, vnde $\theta = \frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{2\alpha}$. Vel si ponatur sin. $\alpha CV = m$, et cos. $\alpha CV = n$ erit $\theta = \frac{-3n + \sqrt{(9nn + 8mm)}}{2m}$ seu $\theta = \text{tang}\, q = \frac{-3n + \sqrt{(9 - mm}}{2m} = \frac{\sqrt{(9 - mm)} - \sqrt{(9 - 9mm)}}{2m}$.

§. 919. Semper ergo maior esse debet angulus VCe quam angulus $eC\alpha$, quia illius tangens aequatur duplae tangenti huius, nisi casu quo venti directio VC cadit in Cb, hic enim positio velorum ef ad lineam $bC\alpha$ erit normalis. Quando autem angulus $VC\alpha$ fit valde acutus, tum angulus $eC\alpha$ duplo minor erit angulo VCe hoc ergo casu angulum $VC\alpha$ in tres partes aequales secari oportebit, vnamque partem angulo αCe tribui. Sin angulus $VC\alpha$ fiat rectus, erit angulus $eC\alpha = 35°, 15'$, et ang. $VCe = 54°, 45'$. Quoniam vero deuiatio nauis seu angulus ACM ita definitur, posito $AC\alpha = e$ vt sit tang. $ACM = \nu$ tang. e cot $(a - q - e)$ ob cot $(a - q - e) = \frac{1 + \text{tang.}(a-q)\text{tang.}e}{\text{tang}(a-q) - \text{tang.}e} = \frac{2 + \text{tang.}q \cdot \text{tang.}e}{\text{tang.}q - 2\,\text{tang.}e}$, erit tang. $ACM = \nu \frac{2\,\text{tang.}e + \text{tang.}q(\text{tang.}e)^2}{\text{tang.}q - 2\,\text{tang.}e}$. Hinc declinatio nauis euanescet, si fiat tang. $q = -2.$ cot. e; si exempli gratia sit $e = AC\alpha = 5°$ erit $q = VCe = 92°, 31'$, et $eC\alpha = 95°$, quo ergo casu habetur cursus directus.

§. 920. Ceterum ex formulis quas (917) tam pro declinatione nauis ACM quam pro celeritate nauis, quae a dato vento et data velorum dispositione oritur, inuenimus, faciles regulae deriuari possunt ad motum nauis determinandum. Cum enim sit tang. $ACM = \nu$ tang. $AC\alpha$.

cot

cot ACe, quia angulus eCP est rectns erit tang. ACM $= \sqrt{}$ tang. $AC\alpha$. tang. ACP. Producta ergo $a\alpha$ donec rectas CM et CP secet in μ et P, et sumta AC pro sinu toto, erit $A\mu =$ tang. ACM; $A\alpha =$ tang. $AC\alpha$; et $AP =$ tang. ACP; hincque fit $A\mu = \sqrt{A\alpha . Ap}$; ex quo erit $A\mu$ media proportionalis inter $A\alpha$ et AP. Sumta ergo $A\mu$ media proportionali inter $A\alpha$ et AP recta $C\mu M$ dabit directionem in qua nauis promouebitur. Quoniam deinde est $a\alpha = ff$, si ex a in $b\alpha$ demittatur perpendiculum $a\gamma$, erit $a\gamma = ff$ cos. $AC\alpha = ff$ cos. e. Hinc ergo erit $v = \frac{cgg}{800\, a\gamma}$ sin. $eC\alpha$ (sin. $VCe)^2$. Sumatur ergo $C\delta$, quae se habeat ad $a\alpha$ vt superficies velorum gg ad resistentiam prorae absolutam ff, erit $v = \frac{c . C\delta}{800 . a\gamma}$ sin. $eC\alpha$ (sin. $VCe)^2$; vnde erit celeritas venti apparens $\sqrt{c}$ ad celeritatem nauis $\sqrt{v}$ vt 1 ad sin. VCe. $\sqrt{\frac{C\delta}{800\, a\gamma}}$ sin. $eC\alpha$.

§. 921. Cum ergo sit celeritas nauis $\sqrt{v} =$ sin. VCe $\sqrt{\frac{c . C\delta}{800\, a\gamma}}$ sin. $eC\alpha$, erit celeritas nauis perpetuo in ratione composita ex simplici celeritatis venti $\sqrt{c}$, et sinus anguli incidentiae VCe, atque ex sub duplicata ratione superficiei velorum $C\delta$ et sinus anguli $eC\alpha$. Manente ergo celeritate venti et superficie velorum eadem nauis celerrime promouebitur, si vterque angulus VCe et $eC\alpha$ fuerit rectus; quo itaque naui celerrimus motus imprimatur, nauis ita est dirigenda vt directio venti in diagonalem bC incidat, atque vela ita sunt disponenda, vt ef sit ad eandem diagonalem $b\alpha$ normalis. Eiusmodi ergo cursum institui conueniet, si hostem nos a tergo persequentem effugere velimus. Quoniam vero si nauis pluribus malis est instructa, ventus non omnia vela in hoc cursu perstringere valet; his

his casibus expediet cursum magis obliquum eligere, quo maior velorum portio vel integra superficies a vento infletur, in quo negotio pariter maximum definire licebit.

§. 922. Quando autem cursus nauis versus determinatam plagam dirigi debet, parum refert celerrime processisse, nisi simul nauis in proposita directione promoueatur. Quamobrem hic quaestio in praxi vtilissima nascitur, quemadmodum pro data venti directione non solum vela disponi, sed etiam ipsam nauem dirigi oporteat, vt in data directione CM celerrime progrediatur. Sit igitur VC directio venti, et CM cursus a naui describendus; ac ponatur angulus $VCM = a$. Sit autem ACB positio nauis aptissima, quae quaeritur, ac ponatur, angulus $ACM = s$; qui designat declinationem cursus, erit ob ang. $AC\alpha = e$, angulus $\alpha CM = s - e$; et ang. $VCA = a - s$. Deinde sit ef velorum dispositio maxime idonea ponaturque angulus $eCA = p$; et angulus incidentiae $VCe = q$; erit $p + q = a - s$. Primum ergo ex formula pro deuiatione inuenta erit $\text{tang.}\, s = \sqrt{\text{tang.}\, e \cot.\, p} = \sqrt{\frac{\text{tang.}\, e}{\text{tang.}\, p}}$; ideoque $\text{tang.}\, p = \frac{\text{tang.}\, e}{(\text{tang.}\, s)^2}$, vnde ex angulo ACM statim inuenitur velorum dispositio seu angulus $eCA = p$.

§. 923. Positis porro celeritate venti $= \sqrt{c}$ et celeritate nauis $= \sqrt{v}$, erit $v = \frac{cgg}{800 ff \cos.\, e} \text{fin.}\, eC\alpha (\text{fin.}\, VCe)^2$. Est vero $eC\alpha = p + e$; et $VCe = q = a - s - p$; vnde erit $v = \frac{cgg}{800 ff \cos.\, e} \text{fin.}\, (e + p)(\text{fin.}\, q)^2$; ac propterea maximum effici debet $\text{fin.}\, (e + p)(\text{fin.}\, q)^2$, ex quo nascitur ista aequatio $dp \cos.\, (e + p)(\text{fin.}\, q)^2 + 2 dq\, \text{fin.}\, (e + p) \text{fin}\, q \cos.\, q = 0$, seu $0 = dp\, \text{tang.}\, q + 2 dq\, \text{tang.}\, (e + p)$. Cum vero sit $\text{tang.}\, p = \frac{\text{tang.}\, e}{(\text{tang.}\, s)^2}$ erit $dp = \frac{-2 ds\, \text{tang}\, e\, (\cos.\, p)^2}{\text{tang.}\, s\, (\text{fin.}\, s)^2}$;

et ob $q = a - s - p$, erit $dq = -ds + \frac{2ds\,tang.\,e(cof.\,p)^2}{tang.\,s\,(fin.\,s)^2}$, quibus valoribus fubftitutis et per ds diuifo habebitur $\frac{2\,tang.\,e\,(cof.\,p)^2\,tang.\,q}{tang.\,s\,(fin.\,s)^2} = \frac{4\,tang.\,e(cof.\,p)^2\,tang.\,(e+p)}{tang.\,s\,(fin.\,s)^2} - 2\,tang.\,(e+p)$. Seu tang $e(\text{cof.}\,p)^2$ tang. $q +$ tang. $s\,(\text{fin.}\,s)^2$ tang. $(e+p) = 2$ tang $e\,(\text{cof.}\,p)^2$ tang $(e+p)$.

§. 924. Sit tang. $e = \delta$; tang. $p = x$; et tang. $a = \alpha$; erit tang. $s = \sqrt{\frac{\delta}{x}}$; et fin. $s = \sqrt{\frac{\delta}{\delta + x}}$; deinde ob $q = a - s - p$ erit tang. $q = \frac{tang.\,(a-p) - tang.\,s}{1 + tang.\,(a-p)\,tang.\,s} = \frac{\alpha - x - (1+\alpha x)\,tang.\,s}{1 + \alpha x + (\alpha - x)\,tang.\,s} = \frac{(\alpha - x)\sqrt{x} - (1+\alpha x)\sqrt{\delta}}{(1+\alpha x)\sqrt{x} + (\alpha - x)\sqrt{\delta}}$; et tang. $(e+p) = \frac{\delta + x}{1 - \delta x}$; quibus fubftitutis ob cof. $p = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$ et $\frac{1}{(cof.\,p)^2} = 1 + xx$, erit $\frac{(\alpha - x)\sqrt{x} - (1+\alpha x)\sqrt{\delta}}{(1+\alpha x)\sqrt{x} + (\alpha - x)\sqrt{\delta}} + \frac{(1+xx)\sqrt{\delta}}{(1-\delta x)\sqrt{x}} = \frac{2(\delta + x)}{1 - \delta x}$. Si haec aequatio a fractionibus liberetur diuifibilis erit per $\delta + x$, atque diuifione peracta prodibit $\alpha - 3x - 2\alpha xx = (2\alpha - 3x - \alpha xx)\sqrt{\delta x}$. Haec autem aequatio euoluta fit quinque dimenfionum ita vt hinc in genere nihil ad nauis velorumue difpofitionem concludi queat. Quoniam vero angulus e plerumque valde eft exiguus, fi eum prorfus euanefcentem ponamus vt fit $\delta = 0$, erit $\alpha - 3x = 2\alpha xx$ hincque $x = \frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{4\alpha}$, quae quidem folutio ob deuiationem euanefcentem congruit cum fupra (919) inuenta.

§. 925. Quanquam ergo angulus e non pro euanefcente haberi poteft, tamen quia eft valde paruus, ifte pro x inuentus valor non multum a vero aberrabit. Sit itaque verus valor $x = \frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{4\alpha} + z\sqrt{\delta}$ fiet $-3z + \frac{(3 - \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)})}{} z = -z\sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)} = \frac{12\alpha z + 9 - 3\sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{8\alpha}\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{4\alpha}}$. hincque $z = \frac{-9 - 12\alpha\alpha + 3\sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{8\alpha\sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{4\alpha}}$, Vel fi ponatur $\frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{4\alpha} = \beta$ vt fit $\alpha = \frac{3\beta}{1 - 2\beta\beta}$ reperie-

perietur $z = \frac{-\beta - \beta^3}{1 + 2\beta\beta} \sqrt{\beta}$, vnde fit $x = \beta - \frac{\beta(1 + \beta\beta)\sqrt{\beta\delta}}{1 + 2\beta\beta}$, qui valor facile loco veri ſubſtituetur. Hoc igitur modo definitur $x =$ tang. p ideoque velorum diſpoſitio in naui ſeu angulus eCA: quo cognito ſtatim prodibit angulus $ACM = s$, cum ſit tang. $s \sqrt{\frac{\delta}{x}}$, vnde directio nauis AB innoteſcit; ſicque tam nauis ita dirigetur, atque vela ita diſponentur, vt nauis ſecundum directionem CM celerrime promoueatur.

§ 926. Quemadmodum autem in quouis caſu tam nauis dirigi quam vela diſponi debeant, commodiſſime ex tabella perſpicietur, in qua pro pluribus diuerſis angulis VCM et nauis et velorum diſpoſitio maxime idonea exhibeatur Ad eiusmodi vero tabellam conficiendam valor x pro cognito aſſumi ex eoque valor ipſius α definiri poterit, id quod facile praeſtatur ex hac aequatione $\alpha = \frac{2x(1 - \sqrt{\delta x})}{1 - 2\sqrt{\delta x} - 2xx + xx\sqrt{\delta x}}$. Oportet autem pro δ valorem convenientem aſſumi, quia igitur eſt $\delta =$ tang. $e = \frac{ff}{bb}$, ac reſiſtentia lateralis bb multum ſuperat reſiſtentiam prorae ff, ponamus $bb = 9ff$; quae hypotheſis in plerisque nauibus non multum a veritate abhorrebit. Cum enim naues quadruplo ſoleant eſſe longiores quam latae, hinc iam foret $bb = 4ff$, ſi formam heberent parallelepipedi, at per prorae elongationem eius reſiſtentia circiter duplo redditur minor, vnde fere fit $bb = 9ff$ et $\delta = \frac{1}{9}$, vnde ang. $AC\alpha = 6°, 21'$, hancobrem habebitur $\alpha =$ tang. $VCM = \frac{2x(3 - \sqrt{x})}{3 - 2\sqrt{x} - 6xx + xx\sqrt{x}}$ exiſtente tang. $eCA = x$; et tang. $s =$ tang. $ACM = \frac{1}{3\sqrt{x}}$ et $VCe = VCM - ACM - eCA$.

§. 927. At vero tentanti patebit non licere pro x nimis paruos valores accipi, quia alias angulus ACM fie-

ret maior quam totus angulus VCM, hisque adeo casibus nauis retro in directione MC moueretur contra institutum. Si enim ponatur angulus $eCA = 10°$, prodibit $VCM = 34°, 29'$ et $ACM = 38°, 27'$. Quo igitur casus ad propositum pertinentes obtineamus, manifestum est motum, qualem desideramus, oriri non posse, nisi sit angulus VCM maior quam $eCM = p + s$; quare debebit esse $\alpha > \frac{1 + xx\sqrt{x}}{3\sqrt{x} - x}$, substituto autem loco α valore invento, sublatisque fractionibus, diuidi poterit per $1 + xx$, atque ex quoto cognoscetur esse debere $2\sqrt{x} + 18x\sqrt{x} > 3 + 3xx$. Hinc per approximationem reperitur esse debere $x > 0,24559$; ideoque necesse est vt angulus eCA maior statuatur quam $13°, 48'$, vnde ab hoc angulo ascendendo valores pro eCA accipi debebunt, sumto enim $eCA = 13°, 48'$ nauis nullum motum in directione proposita accipere poterit sed quiescet.

Tab. XXVII. fig. 2. §. 928. En igitur eiusmodi tabellam, quae pro variis anguli VCM valoribus exhibet angulos eCA, VCA, ACM, $eC\alpha$, et VCe, vt nauis celerrime in directione CM promoueatur.

VC

V C M	e C A	V C A	A C M	e C α	V C e
47°, 44′	13°, 48′	13°, 48′	33°, 56′	20°, 9′	0°, 0′
51, 47	15, 0	19, 0	32, 47	21, 21	4, 0
67, 36	20, 0	38, 41	28, 55	26, 21	18, 41
81, 37	25, 0	55, 36	26, 1	31, 21	30, 36
93, 56	30, 0	70, 15	23, 41	36, 21	40, 15
104, 51	35, 0	83, 8	21, 43	41, 21	48, 8
114, 41	40, 0	94, 41	20, 0	46, 21	54, 41
123, 41	45, 0	105, 20	18, 21	51, 21	60, 20
132, 6	50, 0	115, 7	16, 59	56, 21	65, 7
139, 55	55, 0	124, 20	15, 35	61, 21	69, 20
147, 24	60, 0	133, 12	14, 12	66, 21	73, 12
154, 38	65, 0	141, 49	12, 49	71, 21	76, 49
161, 31	70, 0	150, 9	11, 22	76, 21	80, 9
168, 16	75, 0	158, 29	9, 47	81, 21	83, 29
174, 55	80, 0	166, 57	7, 58	86, 21	6, 57
182, 9	85, 0	176, 31	5, 38	91, 21	1, 31
180, 0	90, 0	180, 0	0, 0	96, 21	0, 0

§. 929. Ex hoc ergo tabula primum patet, nisi angulus VCM, quem directio venti VC cum via proposita CM constituit maior sit quam 47°, 44′, hunc cursum omnino teneri non posse. Pendet autem iste angulus 47°, 44′ ab angulo ACα quem 6°, 21′, assumsimus; qui si minor maiorue esset assumtus, etiam vltimus seu minimus angulus VCM minor maiorue prodiisset. Sin autem resistentia lateralis *bb* infinita esset respectu *ff*, ideoque angulus ACα euanesceret, tum quantusuis exiguus foret angulus VCM tamen cursum institui liceret. Pendet ergo haec diiudicatio cursus conuenientissimi a ratione inter

resistentiam prorae ff et resistentiam lateralem bb, quae idcirco ante omnia cognita esse debet, id quod per vnicam obseruationem deuiationis nauis facile praestabitur. In cursu enim obliquo notetur primum angulus eCA qui sit $= p$; tum vero obseruetur deuiatio nauis seu angulus ACM qui sit $= s$; his cognitis erit tang. ACα $=$ tang. p (tang s)^2. Quodsi ergo angulus ACα maior minorue prodeat quam 6°, 21′, alia tabula constitui debebit, ex qua cursus nauis aptissimus determinetur.

§. 930. Hunc in finem adiungam hic tabulam, in qua angulus ACα infinite paruus assumitur, quo facilius ex collatione huius cum praecedente casus medii, quibus angulus ACα minor deprehenditur quam 6°, 21′, dignosci queant.

VCM

V C M	e C A	V C A	A C M	e C α	V C α
14°, 49′	5°, 0′	14°, 49′	0°, 0′	5°, 0′	9°, 49′
29, 25	10, 0	29, 25	0, 0	10, 0	19, 25
44, 11	15, 0	44, 11	0, 0	15, 0	28, 11
56, 3	20, 0	56, 3	0, 0	20, 0	36, 3
68, 0	25, 0	68, 0	0, 0	25, 0	43, 0
79, 6	30, 0	79, 6	0, 0	30, 0	49, 6
89, 28	35, 0	89, 28	0, 0	35, 0	54, 28
99, 13	40, 0	99, 13	0, 0	40, 0	59, 13
108, 26	45, 0	108, 26	0, 0	45, 0	63, 26
117, 15	50, 0	117, 15	0, 0	50, 0	67, 15
125, 42	55, 0	125, 42	0, 0	55, 0	70, 42
133, 54	60, 0	133, 54	0, 0	60, 0	73, 54
141, 53	65, 0	141, 53	0, 0	65, 0	76. 53
149, 41	70, 0	149, 41	0, 0	70, 0	79, 41
157, 22	75, 0	157, 22	0, 0	75, 0	82, 22
164, 58	80, 0	164, 58	0, 0	80, 0	84, 58
172, 28	85, 0	172, 28	0, 0	85, 0	87, 28
180, 0	90, 0	180, 0	0, 0	90, 0	90, 0

§. 931. Ex his ergo duabus tabulis coniunctis, si angulus ACα minor deprehendatur quam 6°, 21′, pro quouis angulo VCM proposito satis exacte ad praxin tam nauis directio quam velorum dispositio definiri poterit, vt nauis in data via celerrime progrediatur. Sit enim angulus ACα = 3°, 10′, medium scilicet teneat inter 6°, 21′, et 0°, 0′; atque propositus sit angulus VCM = 90°. Pro velorum dispositione seu angulo *e*CA tabula prior dat 28°, 24′, posterior vero dat 35°, 16′, inter quos valores medius 31°, 50′ dabit valorem aptissimum pro

pro angnlo eCA. Hinc erit ex regula generali tang. $ACM = \sqrt{\frac{\text{tang. } 3^\circ, 10'}{\text{tang. } 31^\circ, 50}}$, ideoque declinatio nauis seu angulus $ACM = 16^\circ, 37'$. Quare ex his, si in naui quapiam fuerit angulus $AC\alpha = 3^\circ, 10'$, atque angulus fuerit propositus $VCM = 90^\circ$, sequenti modo nauis dirigi, velaque disponi conueniet, vt sit $eCA = 31^\circ, 50'$; $VCA = 73^\circ, 23'$, $ACM = 16^\circ, 37'$ et $eC\alpha = 35^\circ, 0'$ et $VCe = 41^\circ, 33'$.

§. 932. Quemadmodum autem hic, dum posuimus $\delta =$ tang. $AC\alpha = \frac{1}{9}$, inuenimus cursum teneri non posse nisi sit angulus VCM maior quam $47^\circ, 44'$, seu angulus eCA maior quam $13^\circ, 48'$; simili modo quicunque alius valor ipsi δ tribuatur reperiri poterunt limites pro angulis VCM et eCA, quos hi anguli superare debent. Cum enim esse debeat angulus VCM maior quam $eCM = p + s$, si hi duo anguli aequales ponantur, prodibunt limites illi desiderati. At quia est tang. $p = x$ et tang. $s = \sqrt{\frac{\delta}{x}}$ erit tang. $(p + s) = \frac{\sqrt{\delta} + x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}}$, vnde fit tang. $VCM = \alpha = \frac{3x(1 - \sqrt{\delta}\, x)}{1 - 2\sqrt{\delta}\, x - 2xx + \lambda x\sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{\delta} + x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}}$. Quae aequatio si a fractionibus liberetur, tumque per $1 + xx$ diuidatur, orietur $\sqrt{\delta} - 2\delta\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + xx\sqrt{\delta} = 0$ vnde cum δ sit quantitas valde parua, per approximationem oritur $x = \sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4}\sqrt[3]{\frac{\delta\delta}{16}} + \frac{\delta\delta}{6}\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}}$. Dabit autem x tangentem anguli eCA et $\sqrt{\frac{\delta}{x}}$ tangentem anguli ACM horumque angulorum summa praebebit angulum minimum VCM, erit vero $\sqrt{\frac{\delta}{x}} = 2\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} + \frac{\delta}{2} + \delta\sqrt[3]{\frac{\delta\delta}{16}} + \frac{\delta\delta}{3}\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} =$ tang ACM.

§. 933. Quoties igitur euenit, vt angulus VCM non excedat limitem ſic inuentum, curſus propoſitus teneri non poteſt; et cum neque quieſcere neque regredi conveniat, eiusmodi curſum inſtitui oportet, quem tenentes ad propoſitam metam etiamſi non directe accurramus, tamen appropinquemus. Maxime autem hoc ſubſidium vſu venit, quando ventus directe ex eadem regione in quam tendimus, venit. Quamuis enim plane impoſſibile ſit contra ventum progredi, tamen ita curſum inſtituere licet, vt nauis in recta CM, quae cum VM angulum acutum faciat, promoueatur, ſicque adeo plagam verſus, vnde ventus venit, appellatur. Praecipuum autem negotium in hoc verſatur, vt, cum infinitis modis aduerſus ventum luctari liceat, is imprimis curſus definiatur atque eligatur, quo nauis eodem tempore plurimum verſus plagam, vnde ventus venit, promoueatur.

§. 934. Si ventus veniat ex plaga VC, ponamus ACB eam eſſe nauis directionem, et eCf velorum diſpoſitionem maxime idoneam, vt ex itinere maximum lucrum contra ventum obtineatur. Sit angulus $VCe = q$; $eCA = p$, et angulus ex indole nauis cognitus $AC\alpha = e$; tum vero ponatur angulus ACM ſeu declinatio nauis a curſu directo $= s$; erit vti vidimus tang. $s = \sqrt{\frac{tang. e}{tang. p}}$. Deinde vero eſt altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{cgg}{800 ff \, cof. e}$ ſin. $eC\alpha$ (ſin. $VCe)^2$ hincque ipſa celeritas, qua nauis in directione CM procedet erit vt ſin. $q \sqrt{ſin.\,(e + p)}$, quae ſi multiplicetur in coſinum anguli $VCM = p + q + s$ dabit celeritatem deriuatiuam, qua nauis adverſus ventum progreditur, quae ergo maxima eſt efficienda. Quocirca maxima fieri debet iſta expreſſio coſ. $(p + q + s)$ ſin. q

$\sqrt{}$ ſin. $(e+p)$. At ex aequatione tang. $s = \sqrt{\frac{tang.\, e}{tang.\, p}}$ habetur $dp = \frac{-2\, ds\, tang.\, e\, (cos.\, p)^2}{tang.\, s\, (sin.\, s)^2}$ ſeu $ds = \frac{-dp\, tang.\, s\, (sin.\, s)^2}{2\, tang.\, e\, (cos.\, p)^2} = \frac{-dp \sqrt{tang.\, e}}{2(tang.\, e + tang.\, p)(cos.\, p)^2 \sqrt{tang.\, p}}$.

§. 935. Quoniam hic duae inſunt quantitates variabiles p et q a ſe inuicem non pendentes, vtramque ad maximum efficiendum definiri oportet, ex quo maximum maximorum elicietur. Habeat p hincque etiam s iam valorem, quem maximi natura poſtulat, et quaeratur valor anguli q; debebit ergo eſſe ſin. q coſ. $(p+q+s)$, maximum, vnde oritur coſ. q coſ. $(p+q+s) =$ ſin. q ſin. $(p+q+s)$ ſeu cot. $q =$ tang. $(p+q+s)$. Fiet ergo $90° - q = p+q+s$; et $q = \frac{90° - p - s}{2}$. Quod ſi ergo iam inuenta ſit diſpoſitio velorum ſeu angulus eCA ex quo ſimul habetur angulus ACM $= s$, nauis ipſa ita verſus ventum dirigi debet, vt ducta CL ad CM normali, angulus LC$e = 90 - p - s$ a venti directione VC biſecetur. Intelligitur hinc etiam quaecunque velorum diſpoſitio habeatur, inter omnes nauis directiones hoc modo inueniri eam, quae motum celerrimum aduerſus ventum producat. Supereſt ergo vt velorum aptiſſimam diſpoſitionem ſeu angulum q inueſtigemus, quo inuento promtiſſimus motus contra ventum obtineatur.

§. 936. Cum igitur ſit $q = \frac{90 - p - s}{2}$ et $p+q+s = \frac{90+p+s}{2} = 90 - q$, erit coſ. $(p+q+s) =$ ſin. $q =$ ſin. $\frac{90-p-s}{2}$; hincque iſta expreſſio fieri debet maximum (ſin. $q)^2 \sqrt{}$ ſin. $(e+p)$, vnde fit $2\, dq$ ſin. q coſ. $q \sqrt{}$ ſin. $(e+p) + \frac{dp\, cos.\, (e+p)(sin.\, q)^2}{2\sqrt{sin.\, (e+p)}} = 0$ ſiue $4\, dq$ ſin. q coſ. q ſin. $(e+p) + dp$ (ſin. $q)^2$ coſ. $(e+p) = 0$, ex qua naſcitur $4\, dq$ tang. $(e+p) + dp$ tang. $q = 0$. Eſt vero $dq = \frac{-dp - ds}{2}$ $= -$

$= -\frac{dp}{2} + \frac{dp\sqrt{tang.\,e}}{4(tang.\,e + tang.\,p)(cos.\,p)^2\sqrt{tang.\,p}}$, quo substituto orietur tang. $q =$ tang. $\frac{90 - p - s}{2} = 2$ tang. $(e + p) - \frac{\sqrt{tang.\,e}}{(1 - tang.\,e\;tang.\,p)(cos.\,p)^2\sqrt{tang.\,p}}$. At est tang. $\frac{90 - p - s}{2} = \sqrt{\frac{1 - sin.\,(p + s)}{1 + sin.\,(p + s)}} = \frac{1 - sin.\,(p + s)}{cos.\,(p + s)} = \frac{1 - sin.\,p\;cos.\,s - cos.\,p\;sin.\,s}{cos.\,p\;cos.\,s - sin.\,p\;sin.\,s} = \frac{2\,tang.\,e + 2\,tang.\,p.}{1 - tang.\,e\;tang\;p} - \frac{\sqrt{tang.\,e}}{(1 - tang.\,e\;tang.\,p)(cos.\,p)^2\sqrt{tang.\,p}}$. Cum iam sit tang. $s = \sqrt{\frac{tang.\,e}{tang.\,p}}$ erit sin. $s = \frac{\sqrt{tang.\,e}}{\sqrt{(tang.\,e + tang.\,p)}}$ et cos. $s = \frac{\sqrt{tang.\,p}}{\sqrt{(tang.\,e + tang.\,p)}}$ fiet tang. $\frac{90 - p - s}{2} = \frac{\sqrt{(tang.\,e + tang.\,p)} - sin.\,p\sqrt{tang.\,p} - cos.\,p\sqrt{tang.\,e}}{cos.\,p\sqrt{tang.\,p} - sin.\,p\sqrt{tang.\,e}}$.

§. 937. Ponatur tang. $e = \delta$ et tang. $p = x$, vt sit sin. $p = \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}}$ et cos. $p = \frac{1}{\sqrt{(1 + xx)}}$; quibus substitutis habebitur $\frac{\sqrt{(\delta + x)(1 + xx)} - x\sqrt{x} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}} = \frac{2\delta + 2x}{1 - \delta x} - \frac{(1 + xx)\sqrt{\delta}}{(1 - \delta x)\sqrt{x}}$ quae multiplicata per $1 - \sqrt{\delta x}$ transibit in hanc: $\frac{\sqrt{(\delta + x)(1 + xx)} - \sqrt{\delta} - x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\delta + 2x}{1 + \sqrt{\delta x}} - \frac{(1 + xx)\sqrt{\delta}}{(1 + \sqrt{\delta x})\sqrt{x}}$. Multiplicetur per $(1 + \sqrt{\delta x})\sqrt{x}$, et fiet $\sqrt{(\delta + x)(1 + xx)} + \sqrt{\delta x(\delta + x)(1 + xx)} - \sqrt{\delta} - x\sqrt{x} - \delta\sqrt{x} - xx\sqrt{\delta} = 2\delta\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - \sqrt{\delta} - xx\sqrt{\delta}$ seu $(1 + \sqrt{\delta x})\sqrt{(\delta + x)(1 + xx)} = 3(\delta + x)\sqrt{x}$; quae per $\sqrt{(\delta + x)}$ diuisa dat $(1 + \sqrt{\delta x})\sqrt{(1 + xx)} = 3\sqrt{x(\delta + x)}$; et sumtis quadratis $1 + xx + 2\sqrt{\delta x} + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x + \delta x^3 = 9\delta x + 9xx$. Hinc fit $1 + 2\sqrt{\delta x} + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x^3 = 8\delta x + 8xx$. Ex qua primum patet si fuerit $\delta = 0$ seu angulus $AC\alpha$ infinite paruus, fore $8xx = 1$ et $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Hoc ergo casu erit tang. $eCA = 0,3535534$, ideoque angulus $eCA = 19°, 28'$. et ob $ACM = 0$ erit $LCe = 70°, 32'$, ac propterea angulus $VCe = 35°, 16'$.

§. 938. Quanquam autem aequatio inuenta $1 + 2\sqrt{\delta x} - 8\delta x - 8xx + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x^3 = 0$ commode re-

 solui

solui nequit, tamen quia δ est quantitas valde parua, per approximationem verus valor ipsius x facile elici poterit. Aequatio enim transformatur in hanc $(1-2\sqrt{\delta x})(1+4\sqrt{\delta x}) = xx(2-\sqrt{\delta x})(4+\sqrt{\delta x})$, vnde fit $x = \sqrt{\frac{(1-2\sqrt{\delta x})(1+4\sqrt{\delta x})}{(2-\sqrt{\delta x})(4+\sqrt{\delta x})}}$. Cum iam valor ipsius x non multum discrepet ab ante inuento $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, si hic valor substituatur erit accuratius $x = \sqrt{\frac{(\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\delta})(\sqrt[4]{8}+4\sqrt{\delta})}{(2\sqrt[4]{8}-\sqrt{\delta})(4\sqrt[4]{8}+\sqrt{\delta})}}$; qui si nondam satis accuratus videatur, is denuo in formula inuenta loco x substituatur, sicque prodibit valor nouus pro x ad veritatem proxime accedens. Hoc ergo modo pro quouis casu valor ipsius $x =$ tang. eCA eruetur, vnde simul habebitur tang. $ACM = \sqrt{\frac{\delta}{x}} = \frac{\sqrt{\delta x}}{x}$; quo cognito angulus incidentiae $VCe = \frac{90 - eCM}{2}$ innotescet.

§. 939. Quo hunc calculum exemplo illustremus, sit vti ante posuimus $\delta = \frac{1}{9}$ et ang. $AC\alpha = 6°, 21'$, sumto $x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0, 3535534$; erit $\delta x = 0, 0392837$ et $\sqrt{\delta x} = 0, 1982008$; vnde reperitur $x = 0, 3781247$. Hinc denuo habebitur $\sqrt{\delta x} = 0, 2049728$; hocque valore substituto emergit $x = 0, 3771825$, et $l\,x = 9, 5765516 = l$ tang. eCA. ex quo valore vero proximo oritur ang. $eCA = 20°, 40'$; et $l$tang. $ACM = l\frac{\sqrt{\delta x}}{x} = 9, 7346029$. seu $ACM = 28°, 30'$; hinc prouenit angulus $eCM = 49°, 10'$; et $90 - eCM = 40°, 50'$; quare erit angulus incidentiae $VCe = 20°, 25'$. Maxime ergo nauis aduersus ventum penetrabit si vterque angulorum VCe et eCA fuerit circiter $20°\frac{1}{2}$ seu propemodum duorum rhumborum, quae nauis velorumque dispositio fere a nauigantibus sedulo obseruari solet.

§. 940. Etsi hoc idem argumentum in superiori libro iam fusius est pertractatum, tamen pro vsu practico visum est has regulas tradere. Primum enim hypotheses quas ibi et hic sum contemplatus, inter se differunt, atque in eiusmodi negotio, in quo ipsam veritatem attingere non licet, multitudo hypothesium inutilis esse nequit. Tum vero quod caput rei est, ibi ventum absolutum consideravi, cuiusmodi appareat obseruatori in loco firmo constituto, cum autem in mari non liceat venti tam veram directionem quam veram vim obseruare, hoc loco omnia ex vento apparente deduxi: ex quo diuersitas vtriusque tractationis eo minus est admiranda. Ceterum harum regularum obseruatio non turbatur eo, quod motu nauis variato ipsa directio venti apparens mutetur; perpetuo enim ad directionem venti praesentem spectari oportet, ad eamque nauem ac vela accommodari.

§. 941. Definita tam nauis directione quam velorum dispositione conuenientissima ad cursum adversus ventum instituendum, etiam ipsa nauis celeritas definiri, seu cum celeritate, qua eodem vento secundo existente esset progressura, comparari poterit. Si ventus esset secundus atque vela ita disponantur, vt sit angulus $eC\alpha = 90^\circ$, atque angulus VCe statuatur 60° (maiorem non pono, quia alias non tota velorum superficies inflaretur), foret quadratum celeritatis nauis vt $\frac{3}{4}$. Quando autem eadem nauis contra ventum luctatur, erit vt vidimus ang $eC\alpha = 27^\circ, 1'$ et $VCe = 20^\circ, 25'$ hinc ex (917) oritur quadratum celeritatis vt $0,055278$. Ergo celeritas nauis secundo vento motae est ad nauis celeritatem vento aduerso motae vt 1 ad $\sqrt{\frac{4}{3}.\ 0,055278}$ hoc est vt 1

 ad

ad 0, 27148, ſeu proxime vt 11 ad 3; curſu igitur contra ventum inſtituto nauis celeritas fere ad quartam vsque partem diminuitur, celeritas autem, qua nauis in regionem, vnde ventus venit, procedit, fit circiter triplo minor, nauis ita vndecies tardius in regionem propoſitam progreditur vento exiſtente contrario, quam ſi eſſet ſecundus.

§. 942. Plurimum autem iſta nauis contra ventum promotio pendet a ratione inter reſiſtentiam prorae et lateris ſeu ab angulo $AC\alpha$ quem hic aſſumſimus $= 6^\circ, 21'$. Quo igitur facilius perſpiciatur, quantum nauis, in qua iſte angulus minor exiſtit, contra ventum procedere valeat, caſum illum euoluamus, in quo angulus $AC\alpha$ ac propterea declinatio nauis euaneſcit. Supra autem vidimus hoc caſu ſumi debere ang. $eCA = eC\alpha = 19^\circ, 28'$, et $VCe = 35^\circ, 16'$. erit ergo $VCA = VCM = 54^\circ, 44'$, vnde et celeritas nauis contra ventum obluctantis erit vt ſin. $35^\circ, 16' \surd$ ſin. $19^\circ, 28' = \frac{1}{3}$. Cum ergo celeritas vento exiſtente proſpero ſit vt $\frac{\surd 3}{2}$ erit haec nauis celeritas ad illam vti $3\surd 3$ ad 2, hoc eſt proxime vt 21 ad 8. Sin autem celeritas deriuatiua quaeratur, qua nauis actu in venti plagam promouetur, erit ea $\frac{1}{3\surd 3}$; hinc ergo nauis vento exiſtente contrario in regionem propoſitam progreditur celeritate vt 2, dum eiusdem celeritas, ſi ventus eſſet ſecundus, foret vt 9. Hoc ergo caſu nauis plus quam duplo celerius contra ventum promouetur, quam caſu praecedente.

§. 943. Hinc igitur luculenter perſpicitur, quantum anguli $AC\alpha$ paruitas motum aduerſus ventum inſtituendum acceleret. Quamobrem in conſtructione nauium etiam

tiam in hoc maxime erit incumbendum, vt angulus $AC\alpha$ quantum fieri poteſt diminuatur: id quod efficietur reſiſtentiam lateralem prae reſiſtentia prorae plurimum augendo. Ad hoc ergo duplex patet via: altera, vt prorae reſiſtentia plurimum diminuatur, quod quidem iam nauis acceleratio in curſu directo potiſſimum requirit. Altera autem via huic ſcopo propria eo tendit, vt reſiſtentia lateralis quantum fieri poteſt augeatur; quod primo augenda longitudine nauis obtinetur: tum vero conformatio laterum ita debet eſſe comparata, vt aqua in curſu obliquo ſub non nimis acuto angulo incidat. Imprimis vero figura ſpinae non parum huc confert, ſi ei tanta craſſities tribuatur, vt multum infra nauem promineat; huius prominentiae enim reſiſtentia notabiliter reſiſtentiam lateralem augebit.

§. 944. Cum igitur motus nauium progreſſiuus in curſu obliquo nihil in malorum conſtitutione ante tradita immutandum poſtulet, ad reliqua capita, quorum ratio in nauium conſtructione et nauigatione eſt habenda, progrediamur. Supereſt ſcilicet vt inquiramus, quantum nauis curſu obliquo lata inclinetur circa axem tam longitudinalem quam latitudinalem; atque hinc ſimul praecepta colligentur, pro nauium conſtructione atque malorum collocatione, vt minima inclinatio circa axem longitudinalem conſequatur. Quod enim ad inclinationem circa axem latitudinalem attinet, de ea iam in capite praecedente abunde eſt tractatum. Denique vero inueſtigari debebunt vires ex curſu obliquo natae, quibus nauis circa axem verticalem conuertatur, atque actio gubernaculi perturbetur;

tur;

tur; vt iis cognitis medela idonea inueniri, ficque curfus nauis gubernaculi beneficio conferuari queat.

Tab. XXVII. fig. 3. §. 945. Inclinatio autem nauis partim a vi venti vela tendentis, partim a vi aquae in fuperficiem nauis impingentis oritur: ex quibus viribus coniunctis nafcitur momentum inclinationem producens, cuius effectus determinatur per nauis ftabilitatem. Sit tota vis a vento excepta $= P$, cuius directio erit ad velorum fuperficiem normalis. Si ergo in curfu obliquo fuerit ef velorum pofitio atque angulus ACe ponatur $= p$, media directio vis venti CP cum axe longitudinali AB conftituet angulum $ACP = 90 - p$. Refoluatur haec vis P in duas laterales fecundum axes nauis CA et CF erit vis fecundum directionem $CA = P$ fin. p et vis fecundum directionem $CF = P$ cof. p. Cum iam media directio vis venti in fublimi fit fita, ponatur eius altitudo fupra nauis centrum grauitatis $= k$ hincque erit momentum refpectu axis latitudinalis proram fubmergere conans $= Pk$ fin. p, momentum vero refpectu axis longitudinalis latus nauis dextrum deprimere conans $= Pk$ cof. p.

§. 946. Ad vim ex refiftentia ortam aeftimandam fit CM directio, fecundum quam nauis propellitur. Ac primo quidem notandum eft mediam directionem virium aquae ad horizontem effe inclinatam, ac furfum vergere, propterea quod fuperficies carinae furfum diuergere folet, a cuius figura pendet inclinatio mediae directionis virium aquae ad horizontem. Repraefentet ergo $AEBF$ fectionem nauis horizontalem per centrum grauitatis C factam, perquam tranfeat media directio virium aquae OS in puncto O, fitque angulus, quo haec directio ad horizontem incli-

inclinatur $SOR = q$; et ipsa vis $OS = Q$, quae resoluatur in verticalem $OQ = Q$ sin. q, et horizontalem $OR = Q$ cos. q. Perspicuum igitur est, vim horizontalem OR, quoniam eius directio in eodem plano est sita, in quo axes nauis longitudinalis AB et latitudinalis EF iacent, nullam inclinationem circa hos axes producere; sed omnem vim inclinantem, quae quidem a vi aquae oritur a vi verticali $OQ = Q$ sin. q esse petendam.

§. 947. Quoniam vero nauis a vi CP propulsa eiusmodi cursus directionem obliquam CM sequitur, in qua vis resistentiae horizontalis OR directionem obtineat parallelam vi propellenti, atque insuper tantam celeritatem acquirat, vt vis resistentiae horizontalis $OR = Q$ cos. q aequalis fiat vi propellenti P; primum ex cognito puncto O dabitur directio vis horizontalis OR, quippe quae directioni CP erit parallela. Hinc producta OR, donec vtrumque axem secat in K et L erit angulus $CLO = p$, et angulus $AKO = 90 - p$. Deinde vero ex aequatione $P = Q$ cos. q innotescet vis aquae $Q = \frac{P}{cos.\, q}$. Quamobrem resultabit vis verticalis $OQ = Q$ sin. $q = P$ tang. q. Ducta ergo ex puncto O recta OI axi AB parallela, quae alteri axi EF occurrat in I; erit momentum ex allisione aquae ortum respectu axis longitudinalis $AB = P . CI$. tang. q et momentum respectu axis latitudinalis $EF = P . OI$. tang. q; quae ergo momenta ex solo situ puncti O, et angulo $SOR = q$ determinantur.

§. 948. Nauis ergo circa axem longitudinalem dextrorsum inclinabitur a momento virium $= Pk$ cos. $p - P . CI$. tang. q; quod omissa vi absoluta P fit proportionale huic formulae k cos. $p - CI$. tang. q. Momentum vero,

quo nauis circa axem latitudinalem EF antrorſum inclinabitur, erit $= Pk$ ſin. $p - P.OI$. tang. q, ſeu vt k ſin. $p - OI$. tang q. Quoniam vero iam ante in curſu directo nauem ita conſtituimus, vt inclinatio circa axem latitudinalem nullum impedimentum afferat, multo minus in curſu obliquo quicquam ab inclinatione circa iſtum axem erit metuendum. Primum enim ipſa vis venti oblique in vela incidentis multo erit minor tum vero etiam quantitas huius vis decreſcit cum ſinu anguli ACe; quam ob duplicem cauſam inclinatio nauis circa axem latitudinalem nullius prorſus erit momenti, neque idcirco eius rationem hoc loco haberi conueniet; ſed ſufficiet inclinationem circa alterum axem AB perpendiſſe.

§. 949. Cum igitur momentum nauem ad latus inclinare conans ſit vt k coſ. $p - CI$ tang. q, niſi ſit k coſ. $p = CI$. tang. q. nauis actu circa axem longitudinalem AB inclinabitur; ipſius vero inclinationis quantitas pendebit a ſtabilitate nauis reſpectu huius axis, ita vt quo maior fuerit haec ſtabilitas eo minorem nauis ſubitura ſit inclinationem. At vero reliquae nauium qualitates minime concedunt, vt quantitas CI. tang. q aequalis reddatur ipſi k coſ. p, cum ad hoc nimis magna nauis latitudo requiratur atque adeo ſaepenumero euenire ſolet vt ob punctum I vltra C cadens quantitas CI. tang. q negatiuum valorem induat, quibus caſibus momentum k coſ. p ex vi venti ortum adeo augetur a vi aquae, ideoque niſi ſtabilitas fuerit ſumma vel nauis in curſu obliquo maxime periclitabitur, vel non niſi exigua velorum inferiorum copia vti poterit, quo momentum ex vi venti ortum non maius euadat, quam quidem ſine periculo ſuſtineri queat.

§. 950.

§. 950. Quo igitur omnia vela ad curſum obliquum inſtituendum tuto adhibere liceat, hoc ante omnia erit efficiendum vt diſtantia puncti O ab axe AB, ſeu intervallum CI non euaneſcat; multo minus valorem negatiuum nanciſcatur. Cum igitur directio media virium aquae OS ad planum verticale per AB ductum ſurſum conuergat, idque tandem traiiciat, manifeſtum eſt, quo altius ſita fuerit ſectio horizontalis AEBF, eo propius punctum O ad rectam AB admotum iri, atque tandem vltra eam cadere debere. Quoniam itaque haec ſectio horizontalis AEBF per centrum grauitatis nauis tranſire ponitur, perſpicuum eſt, quo altius poſitum fuerit centrum grauitatis nauis, eo minus futurum eſſe interuallum CI; hocque adeo negatiuum fieri poſſe. Quamobrem ad iſtud inſtitutum hoc maxime requiritur, vt centrum grauitatis nauis quantum fieri poteſt, deprimatur. Quod idem cum etiam nauis ſtabilitas poſtulet, nullaque ratio contrarium requirat, maximum lucrum ex depreſſione centri grauitatis, in vniuerſam nauigationem redundabit.

§. 951. Quodſi autem hoc fuerit effectum, vt intervallum CI notabilem magnitudinem ſit nactum, curandum erit praeterea, vt valor quantitatis CI. tang. q tam prope ad valorem k coſ. p adducatur, quam quidem fieri poteſt. Hoc autem praeſtabitur angulum SOR, quo media directio virium aquae ad horizontem inclinatur, plurimum augendo, in ratione enim tangentis huius anguli valor CI. tang. q augebitur. Dum igitur reſiſtentia aquae ſecundum directionem verticalem facta augetur, inclinatio nauis in curſu obliquo diminuitur. At vero aucta reſiſtentia verticali ſimul reſiſtentia horizontalis minor redditur,

 tur,

tur, hocque ipſo nauis motus acceleratur; hancobrem diminutio reſiſtentiae horizontalis non ſolum naui motum celeriorem conciliabit, ſed etiam nauem aptiorem efficiet, quo magis in curſu obliquo inclinationi ad latera reluctari valeat. Haeque adeo rationes coniunctae augmentum reſiſtentiae verticalis maxime ſuadent.

§. 952. Quemadmodum autem ad hunc ſcopum attingendum, nauis figuram comparatam eſſe oporteat, curatius perpendamus. Quod quidem ad figuram prorae attinet ea ex curſu directo iam ſatis definita videtur, poterit autem ex iis, quae de figura laterum carinae praecipientur, magis perfici. Contemplemur ergo carinae ſectionem verticalem ad axem AB normalem, eiusmodi in
Fig. 4. loco, vbi latera nauis neque conuergunt neque diuergunt ſenſibiliter. Huius ſectionis ſemiſſis ſit CEHD; et centrum grauitatis nauis in G; ac primo quidem patet, prominentiam ſpinae D*d*, quae ante ad curſum contra ventum inſtituendum erat commendata, nunc fieri pernicioſam. Quoniam enim aqua in hanc prominentiam incidens agit ſecundum directionem horizontalem D*r*, haec vis quo fuerit maior, eo magis momentum, quo nauis circa axem longitudinalem inclinatur, augebitur. Cum igitur ſpinae prominentia alio reſpectu ſit vtilis alio damnoſa, eam ſatis paruam ſtatui oportebit.

§. 953. Deinde manifeſtum eſt ad curſum obliquum inſtituendum, naues fundo horizontali praeditas maxime eſſe ineptas. Si enim CE*b*D eſſet ſectio nauis transuerſa baſin habens D*b* horizontalem, ſolum latus E*b* vim aquae patietur, cuius adeo directio fere erit horizontalis, vnde et angulus *q* diminuetur, et interuallum CI negatiuum

vum reddetur, nisi forte centrum grauitatis G puncto D propius fuerit quam ipsi C, quod autem in grandioribus nauibus nunquam vsu venit. Hancobrem fundum carinae DH aliquantum sursum vergere oportebit, quo et resistentiam sustineat, et ipsius directionem IK sursum proiiciat. Neque vero hanc eleuationem seu angulum HD*h* nimis magnum esse oportet, quoniam, licet vis aquae in fundum augeretur, tamen directio IK deprimeretur, atque infra G rectam verticalem CD traiiceret, quo ipso non solum vis nauem inclinans non diminueretur, sed etiam augeretur; ad quod accedit, quod resistentia lateris EH hanc vim inclinantem etiam augeat, nisi centrum grauitatis G in semissem inferiorem altitudinis CD cadat.

§. 954. Quoniam igitur nec fundus carinae DH horizontalis esse potest, et latus EH, si fuerit verticale inclinationem non minuit, atque eiusmodi anguli vti H euitari debent, figuram DHE in curuam continuam formari conueniet. Ponamus ergo sectionem carinae transversam esse semicirculum, eiusque semissem quadrantem DIE; quo casu latitudo carinae erit ad eius profunditatem vt 2 ad 1. Media igitur directio vis aquae impingentis IC transibit per punctum C; quod idem eueniret, si loco quadrantis figura quaecunque ipsi inscripta substituatur, quoniam vero capacitati carinae est consulendum, et anguli vitari debent, ipse quadrans omnibus figuris inscriptis merito antefertur. Quodsi ergo centrum grauitatis nauis in ipsam superficiem aquae incidat, tum vis aquae IC inclinationem nauis neque diminuet neque augebit, sin autem centrum grauitatis infra aquae superficiem cadat in Fig. 5.

 G,

G, tum vtique ab hac vi inclinatio nauis minuetur. Contra vero haec vis inclinationem augebit, si centrum grauitatis nauis supra aquae superficiem cadat.

§. 955. Nisi ergo centrum grauitatis nauis infra aquae superficiem cadat, sectiones carinae transuersales figuram semicirculi induere nequeunt; neque propterea carinae profunditas semissem latitudinis aequare poterit. Supra vero iam, cum de stabilitate ageretur, ostensum est, profunditatem carinae semissem latitudinis excedere non oportere, cum igitur haec duo praecipua capita, ad quae in nauivm constructione est respiciendum, tam egregie conspirent, per ea figura sectionum transuersalium carinae optime determinatur. Ante omnia scilicet ad situm centri grauitatis totius nauis est attendendum, quod vel infra aquae superficiem in G cadet, vel in ipsam aquae superficiem in C, vel supra eam in *g*. Priori igitur casu, si interuallum CG sit notabile, sectionibus transuersalibus carinae commode figura semicircularis tribuitur, atque latitudo carinae duplo maior quam eius profunditas statuitur. Quo profundius enim positum fuerit centrum grauitatis G, eo magis non solum vis inclinationi resistens augebitur, sed etiam stabilitas nauis maior redditur; sicque ob duplicem causam nauis inclinatio in cursu obliquo diminuitur.

§. 956. Casus hic imprimis locum habet in nauibus onerariis, in quibus maxima onerum pars infra aquae superficiem condi solet; tum enim totius nauis commune centrum grauitatis infra aquae superficiem, deprimitur. In nauibus autem alii scopo destinatis ac praecipue bellicis, vbi tormenta supra aquae superficiem collocari debent, centrum grauitatis non solum in aquae superficiem C sed

etiam

etiam ſupra eam in g, cadere ſolet. His igitur caſibus media directio vis aquae ic ſupra centrum grauitatis g cum verticali DC puta in c collineare debet. Quare ſi ſectionis carinae figura fuerit circularis, vel non multum ab ea abhorreat, vti fieri ſolet, eius figura centro c deſcripta eſſe debebit. Erit ergo Die figura ſectionis transuerſae carinae, quae propterea erit ſegmentum circuli centro c deſcripti atque latitudo ſectionis 2Ce ſuperabit profunditatem CD bis ſumtam. Perſpicuum vero etiam eſt, mediam directionem ic maiorem cum horizonte angulum facere quam caſu priore.

§. 957. His itaque caſibus, quibus centrum grauitatis nauis non infra ſuperficiem aquae cadit, profunditas carinae CD minor eſſe debet, quam ſemiſſis latitudinis Ce. Euidens autem eſt, quo magis ratio Ce ad CD excedat rationem aequalitatis, eo minorem inclinationem in curſu obliquo nauem eſſe ſubituram. Primo enim aucta latitudine Ce, punctum c altius eleuabitur, hocque momentum virium aquae inclinationi obluctans augebitur. Tum vero ob eandem Ce auctam ſtabilitas nauis non mediocriter increſcit, atque idcirco inclinationem nauis diminuit, atiamſi alias vis inclinans eſſet eadem. Cum autem ſit $Cc > Ee$, perſpicuum eſt, exiguum rationis Ce ad CD exceſſum ſupra rationem aequalitatis, vehementer inclinationem impedire, quia centrum grauitatis g non multum ſupra aquae ſuperficiem cadere ſolet. Sumta ergo ſemi latitudine Ce aliquanto maiori quam CD, vel CE, erit $Cc = Ee + \frac{Ee^2}{2CD}$; tum centro c deſcribatur arcus circuli Die per D tranſiens, erit CDie aptiſſima figura ſectionum carinae transuerſalium.

§. 958. Hoc igitur modo sectiones nauis verticales ad axem longitudinalem normales ita formantur, vt a vi aquae in latera nauis impingente vis inclinans diminuatur, quo pacto ipsa nauis inclinatio ob auctam simul stabilitatem multo minor reddetur. Imprimis vero ab aqua in proram allabente vis inclinans debilitabitur; hoc enim loco directiones virium aquae multo magis sursum vergent, atque ab axe longitudinali erunt remotae. Quo igitur effectus huius vis maior existat, necesse est vt in sectionibus transversis prorae, latitudo C*e* maiorem habeat rationem ad profunditatem CD, quam in corpore nauis. Cum ergo proram versus altitudines CD minores euadant, latitudo C*e* in minore ratione decrescere debebit; vel sectio nauis horizontalis in superficie aquae facta proram versus obtusior est constituenda, quam sectio verticalis per mediam nauem facta; quo in sectionibus transuersis proram versus ratio C*e* ad CD continuo maior prodeat.

§. 959. Parem autem nauis conformationem requiret vltima conditio, quae perpendenda restat, qua effici oportet, vt gubernaculi ope nauis statu suo conseruari, atque ad lubitum dirigi queat. Pendet vero haec disquisitio a momentis virium nauem sollicitantium respectu axis verticalis per centrum grauitatis nauis ducti. Quodsi haec momenta penitus se destruant, directio nauis a sola gubernaculi actione pendebit; ideoque talis virium status ad gubernationem maxime accommodatus videtur. Quoniam vero supra vidimus in cursu obliquo CM nauem difficulter gubernaculi ope ad eam partem *e*, vnde ventus venit dirigi posse, propterea quod aqua in gubernaculum versus istam plagam inflexum nimis exigua vi impingat; expediet,

diet, vires nauem conuertentes non omnino ſe deſtruere, ſed eas, quae proram verſus ventum conuertere valeant, non nihil praeualere; tam parum autem, vt effectus inde oriundus gubernaculi beneficio facile coerceri queat. Sic enim, ceſſante gubernaculi actione, nauis ſponte aduerſus ventum dirigetur, quem effectum alias gubernaculum producere non valeret. Tab. XXVII. fig. 6.

§. 960. Quoniam igitur hic momenta virium reſpectu axis verticalis per centrum grauitatis nauis tranſeuntis inveſtigamus, ſolae vires horizontales erunt conſiderandae. Ac directio quidem media virium a vento exceptarum ipſa eſt horizontalis, vnde eius diſtantia ab axe verticali determinabit ipſius momentum reſpectu huius axis. Sit A CBF ſectio nauis ſecundum aquae ſuperficiem facta, A prora, B puppis et G punctum, per quod axis verticalis tranſeat, quod ideo propemodum circa medium nauis ſitum erit. Sit porro CP media directio vis venti ad hoc planum relata, ipſa vero haec vis ponatur $=$P. Tum vero repraeſentet KR directionem mediam reſiſtentiae aquae, ſeu vis quam aqua ſecundum directionem horizontalem exerit. Erit ergo vti vidimus haec directio KR parallela directioni CP, atque ipſa aquae vis $=$P. His igitur duabus viribus nauis verſus A*a* conuertetur momento $=$P.KC. ſin. ACP; ſcilicet ſecundum figuram prora erga ventum conuertetur.

§. 961. Pendet ergo iſte effectus a poſitione punctorum C et K atque ipſe puncti G locus ex computo egreditur. Quamobrem ſi punctum K, in quo media dire-

ctio resistentiae axem AB traiicit, ante punctum C proram versus cadat, nauis ad ventum conuertetur eo maiori vi, quo maius fuerit interuallum KC ceteris paribus. Nisi igitur istud momentum tam sit paruum vt per actionem gubernaculi vinci possit, nauis cursum tenere non poterit. Sin autem punctum C ante punctum K cadat, effectus orietur contrarius atque nauis a vento detorquebitur, qui effectus etiamsi esset maxime debilis, tamen a gubernaculo destrui non posset. Gubernaculum enim in situm B*b* dirigi deberet, in quo non nisi perexiguam aquae vim sentiret. Hinc maxime cauendum est, ne punctum C propius ad proram B accedat quam punctum K. Aptissime autem haec duo puncta erunt collocata, si tantum non congruant, atque punctum K tantillum propius sit prorae, quam punctum C, vt interuallum CK reddatur minimum ob rationes modo allegatas.

§. 962. Locus autem puncti K a figura carinae pendet, cuius sectiones horizontales quo magis proram versus conuergant atque acuminentur, eo propius punctum K ad proram A accedet. Punctum vero C a velorum per nauis longitudinem distributione, atque adeo ab arbitrio nostro pendet. Si enim vela aequabiliter per totam nauis longitudinem disponantur punctum C in medium fere lineae AB punctum cadet, si quidem ventus in omnia vela aequaliter irruere possit, quod autem in cursu obliquo fieri solet. Quodsi ergo punctum K nimis prope ad proram A esset situm, tum vela non aequaliter disponi possent, ne interuallum CK nimis magnum prodiret, sed plura vela circa puppim auferri deberent, quo punctum C propius ad

proram perducatur. Sin autem punctum K nimis prope ad puppim B caderet, tum copia velorum proram versus diminui deberet, donec punctum O in debitam a puncto K distantiam perduceretur.

§. 963. Quanquam autem numerum velorum vel proram vel puppim versus diminuendo effici potest, vt puncta C et K debito interuallo a se inuicem sint remota, tamen hoc pacto per velorum diminutionem vis nauem propellens debilitatur, hincque nauis motus progressiuus retardatur; id quod omni cura est euitandum. Quamobrem punctum K in eiusmodi loco constitutum esse oportet, vt omnibus velis expansis punctum C satis prope ad K et quidem puppim versus cadat. Solet autem in nauibus ob alias rationes prora multo magis velis onerari quam puppis, quo fit vt omnibus velis expansis media directio virium venti CP propius ad proram quam ad puppim incidat, atque maximus etiam malus prorae propior quam puppi esse solet. Puncto igitur hoc C per aestimationem notato figura carinae ita debet esse comparata vt punctum K in idem fere punctum C cadat. Quamuis enim in hoc error quidam committatur, tamen is per velorum expansionem sine sensibili vis propellentis iactura corrigi poterit.

§ 964. Scilicet si carina eiusmodi habeat figuram, quae ab hoc scopo non multum dissentiat; per experientiam copia velorum expandendorum facile definitur. Ponamus enim omnibus velis expansis nauem aduersus ventum vergere, indicium hoc erit punctum C puppi nimis esse vicinum, hancobrem velum quoddam circa puppim

 vel

vel auferatur vel aliter dirigatur, vt vis conuertens ab eo orta diminuatur, hocque modo nauis ad situm fixum redigatur. Sin autem contra nauis a venti plaga depellatur, tum vela circa proram diminui debebunt, vnum alterumue vel tollendo vel aliter dirigendo. Simili modo si nauis magis erga ventum conuerti debeat, atque gubernaculi vis huic effectui non sufficiat, tum vis conuertens velorum circa puppim aliquantum augeatur, quod fiet si vnum velum vento magis opponatur. Sic itaque postremum velum inseruiet naui dirigendae, atque defectui gubernaculi supplendo.

Tab. XXVIII fig. 1. §. 965. Cum igitur data nauis longitudine AB in superficie aquae facile innotescat punctum C, per quod media directio vis venti, si cuncta vela fuerint expansa, est transitura; sitque $AC < BC$. Tum centro C ad proram constituendam describatur circulus hAi: atque sumta ECF $=$ latitudini nauis, ducantur axi AB parallelae hEm, et iFn, quae a recta EF bisecentur. Manifestum est, si sectio nauis horizontalis figuram haberet $hAinm$, tum, quocunque cursu obliquo nauis feratur, mediam directionem resistentiae per punctum C esse transituram. Cum autem eiusmodi figura naui non conueniat, figuram idoneam appropinquantem formari oportebit, cuiusmodi est AHEMBNFI, quae sectionibus nauis horizontalibus tribuatur; in qua quidem ob proram magis rotundam media directio
Fig. 2. resistentiae ante punctum C in K per AB transibit. Hinc igitur facile perspicitur proram HAI satis obtusam esse futuram, quod ipsum inclinationi nauis ad latus egregie inseruit.

§. 966.

§. 966. Cum igitur ſectio nauis horizontalis in ſuperficie aquae facta hoc modo ſit determinata, ſectionem diametralem, quae verticaliter per medium nauis fit, conſideremus. Repraeſentetur ea per figuram AaDbB, qualem ſupra in curſu directo deſcripſimus. Statuatur ſcilicet profunditas CD aliquanto minor, quam ſemiſſis latitudinis CE vel CF, ſiquidem centrum grauitatis nauis in ipſam aquae ſuperficiem cadat vel ſupra eam. Denotat ergo Aa accliuitatem prorae, quam inclinatio nauis in curſu directo determinat; et dB repraeſentat eleuationem puppis ſuper ſpina db, quo ob gracilitatem puppis ſub aqua tum ratione ſectionum horizontalium quam verticalium, aqua liberius in gubernaculum Bgb incurrere queat. Reſiſtentia igitur nauis non multum per cuſpidationem horizontalem diminuetur, ſed maximam partem per eleuationem prorae aA, atque reſiſtentia eo minor reddetur quo magis angulus A diminuatur.

§. 967. Ex his duabus figuris ſectionis aquae et diametralis facile tota carinae forma conficitur, cum ſectio ampliſſima EDF iam ante ſit determinata, quippe quae erit ſegmentum circulare per data puncta E, D, et F ductum. Ex his autem omnes ſectiones transuerſales definiuntur, cum vniuscuiusque detur et latitudo et profunditas, id quod vel per figuras affines praeſtabitur, vti in primo capite oſtenum eſt, vel per figuras non multum ab hac ſimilitudine recedentes. Sic ſectio verticalis per pq tranſiens, cum latitudini pq coniuncta ſit profunditas or, pro figura huius ſectionis congrue aſſumi poterit ſegmentum circulare prq. Quod autem ad ſectiones transuerſales

Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5.

 les

les puppim verſus attinet, eae pari modo ex datis latitudine ac profunditate facile determinantur; ſic ex latitudine xy et altitudine vz naſcetur figura xzy infra z cum ligno mortuo zu connexa. His obſeruatis itaque figura nauis ad curſum obliquum inſtituendum aptiſſima orietur.

FINIS.



Fig. 1.

Fig. 2.

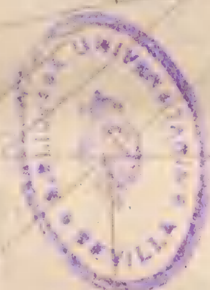
Pars II.

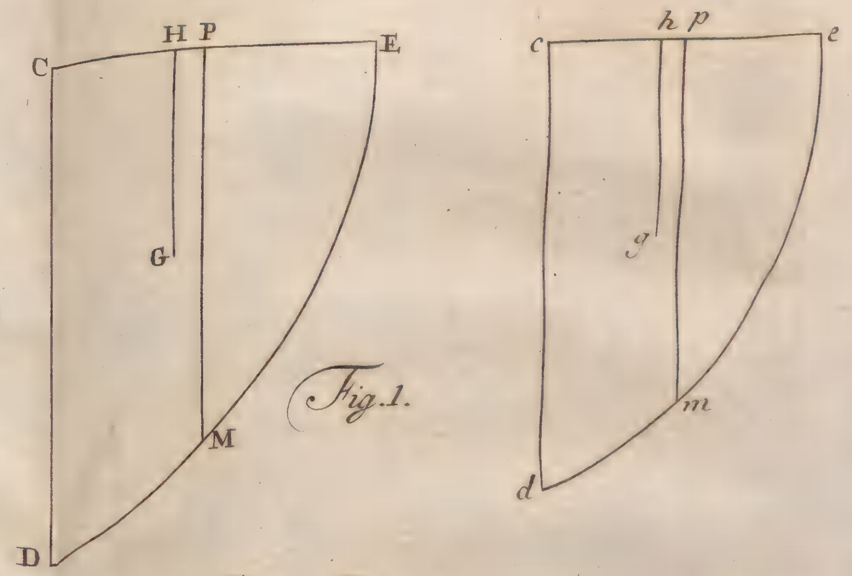
Tabula I

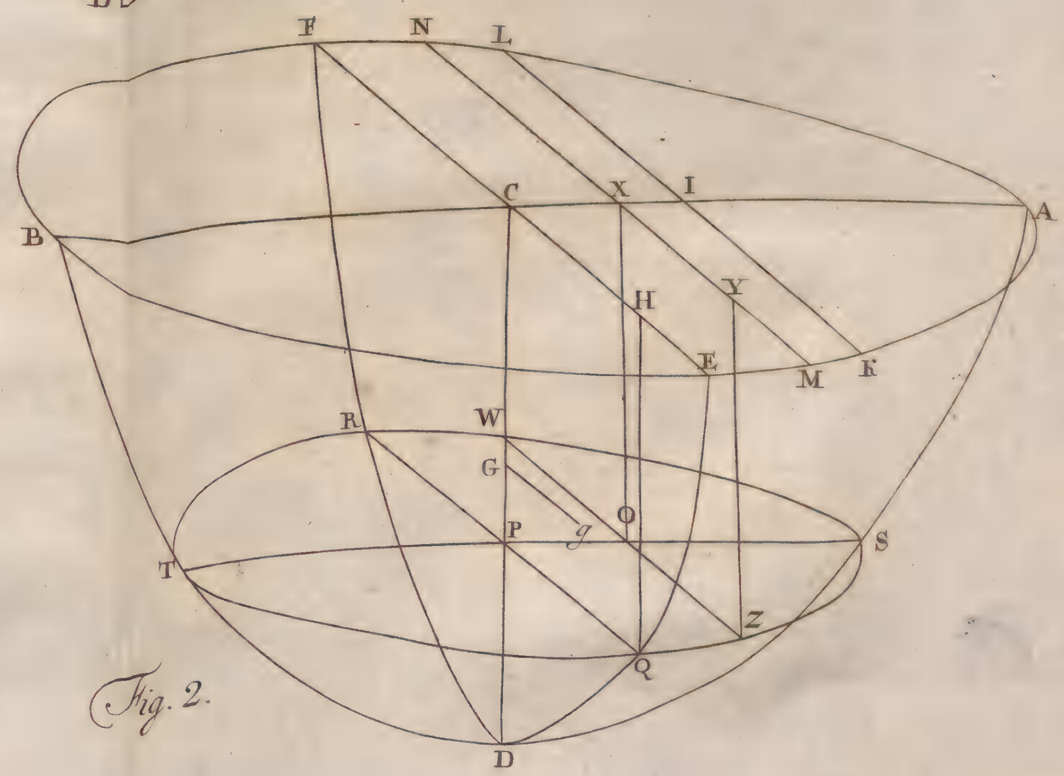






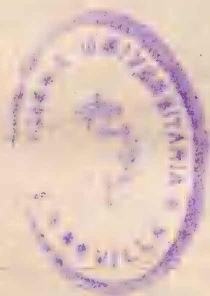

SEVILLA





Pars II.

Tab. II.



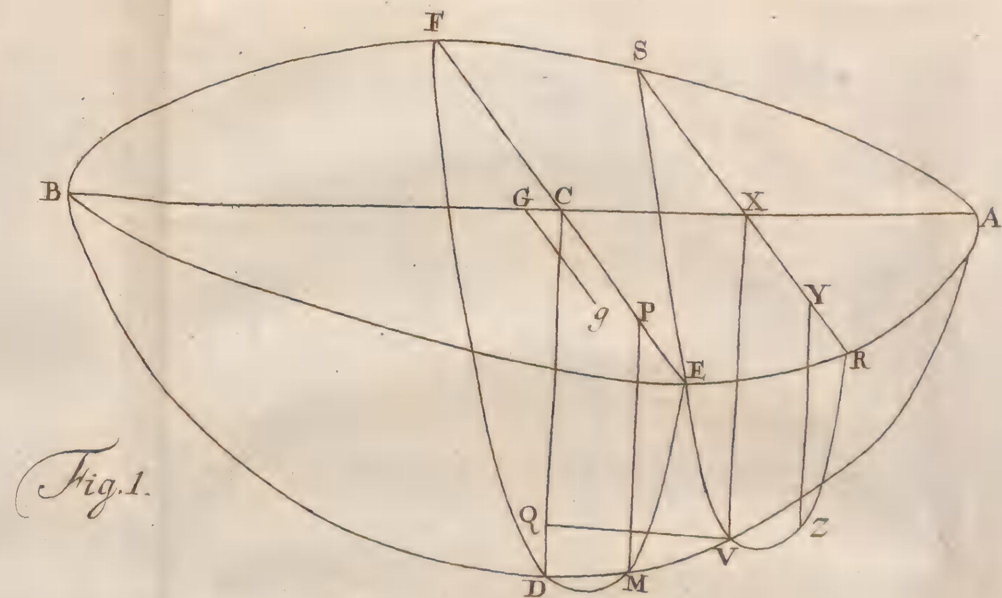


Fig. 1.

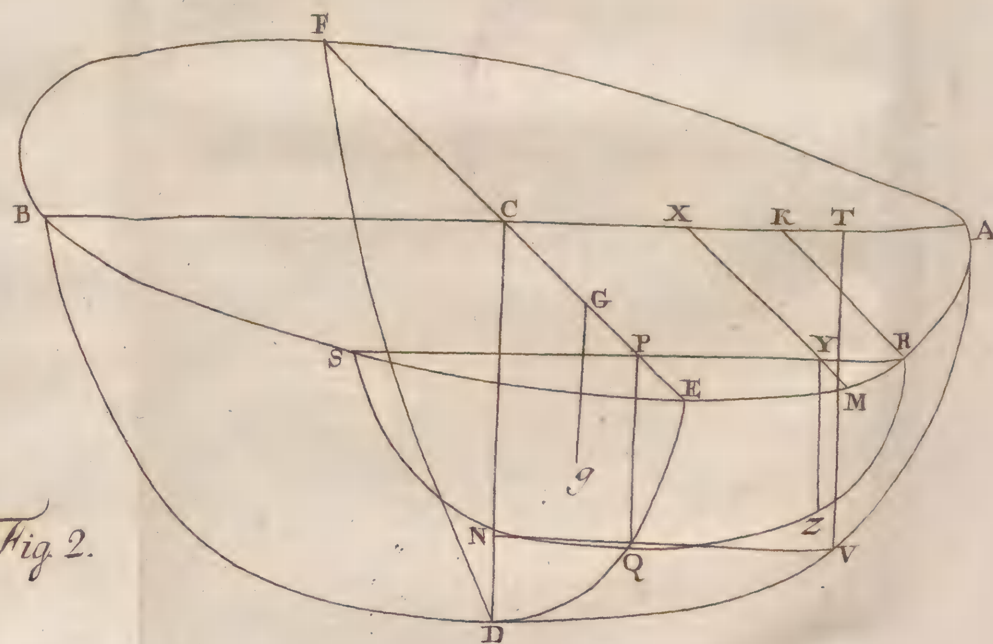


Fig. 2.



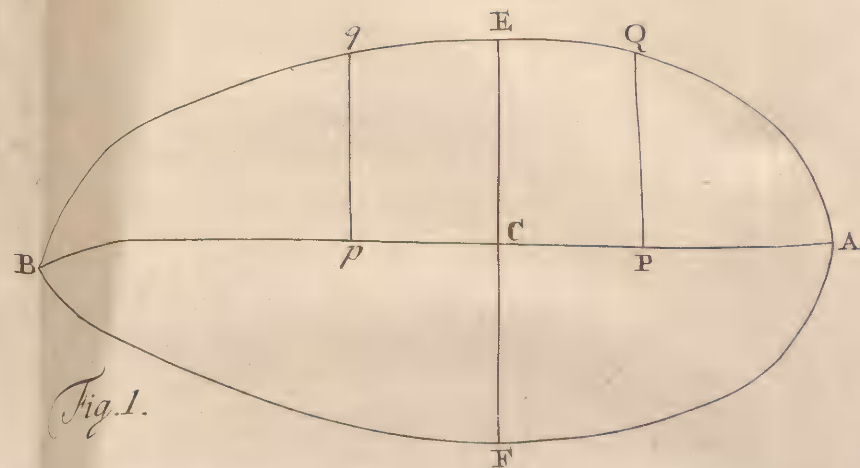


Fig. 1.

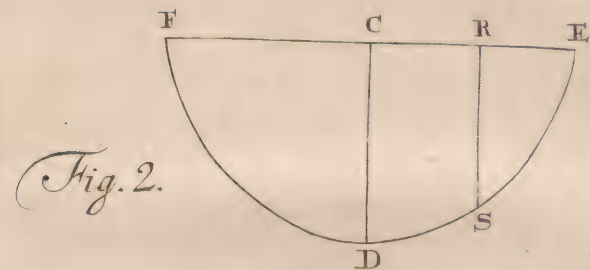


Fig. 2.

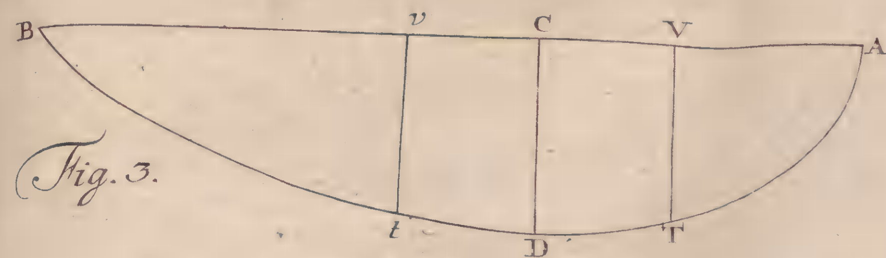
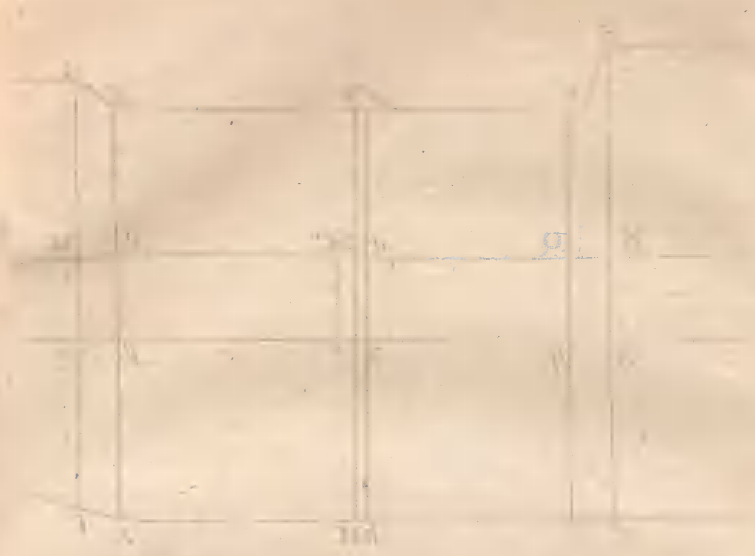


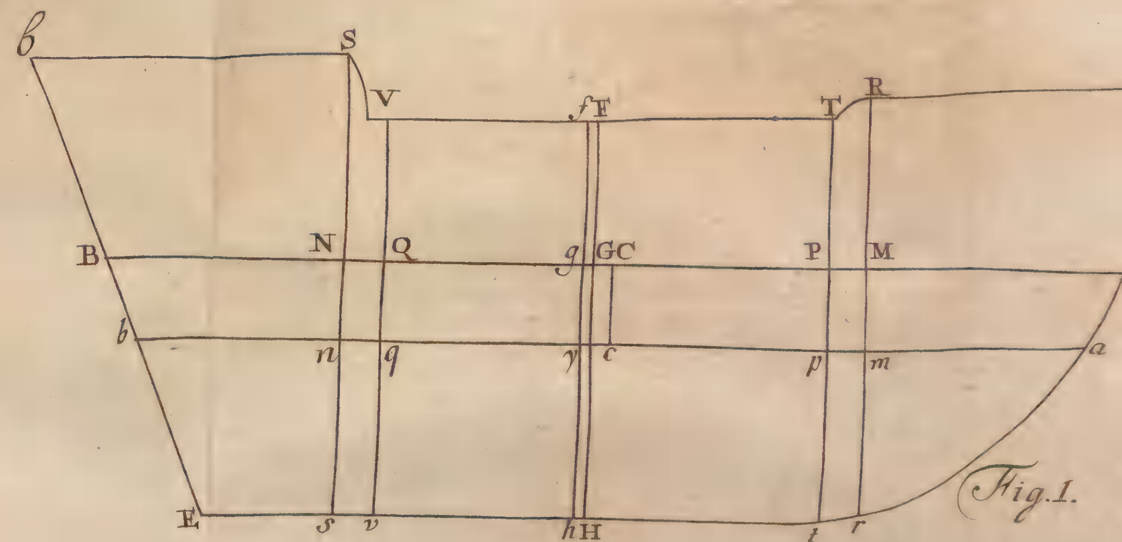
Fig. 3.

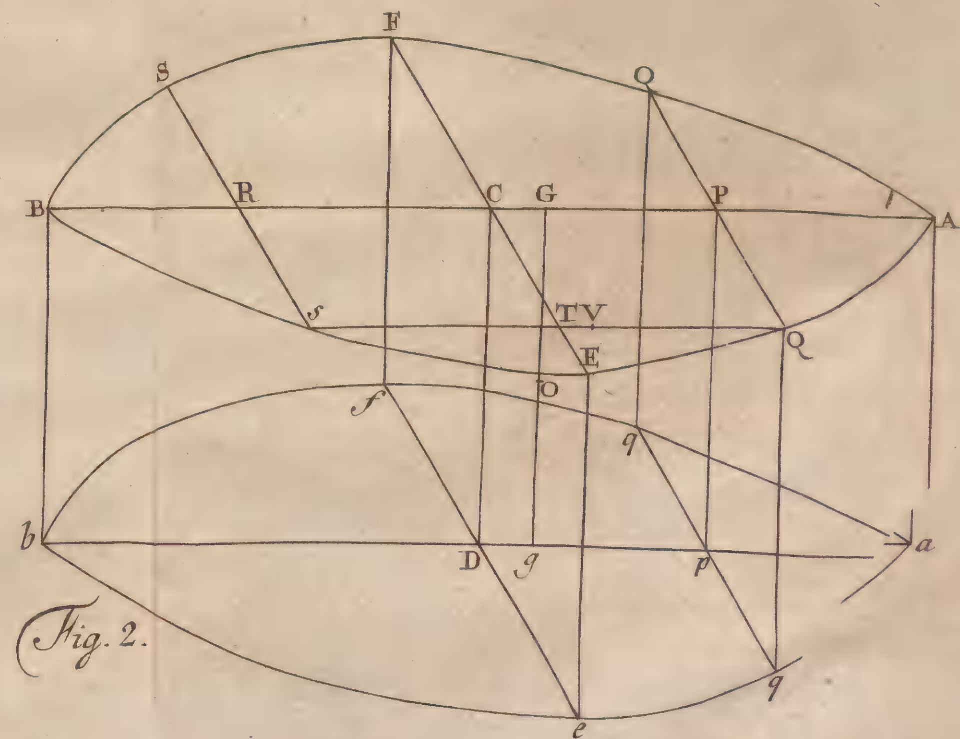
Pars II.

Tab. IV.

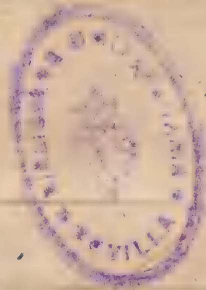





b
S
V
f F
T
R
B
N
Q
g
G C
P
M
b
n
q
γ
c
p
m
a
E
s
v
h H
t
r
Fig. 1.


F
S
O
B
R
C
G
P
A
s
T V
Q
E
O
f
q
b
D
g
p
a
Fig. 2.
q
e





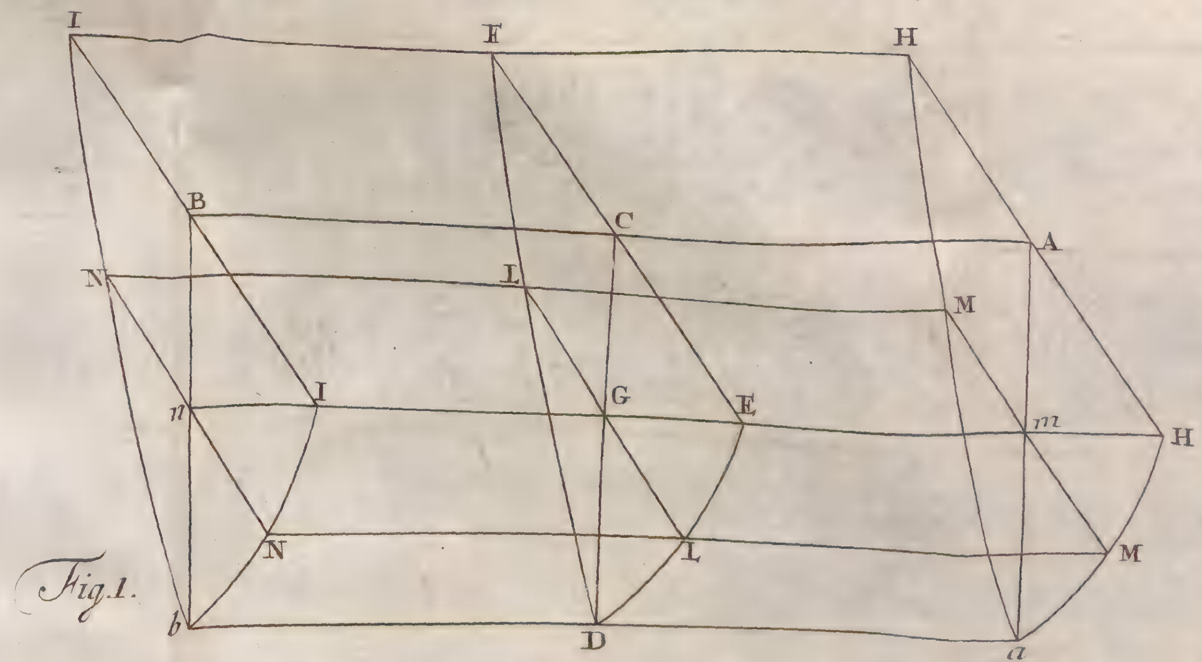


Fig. 1.

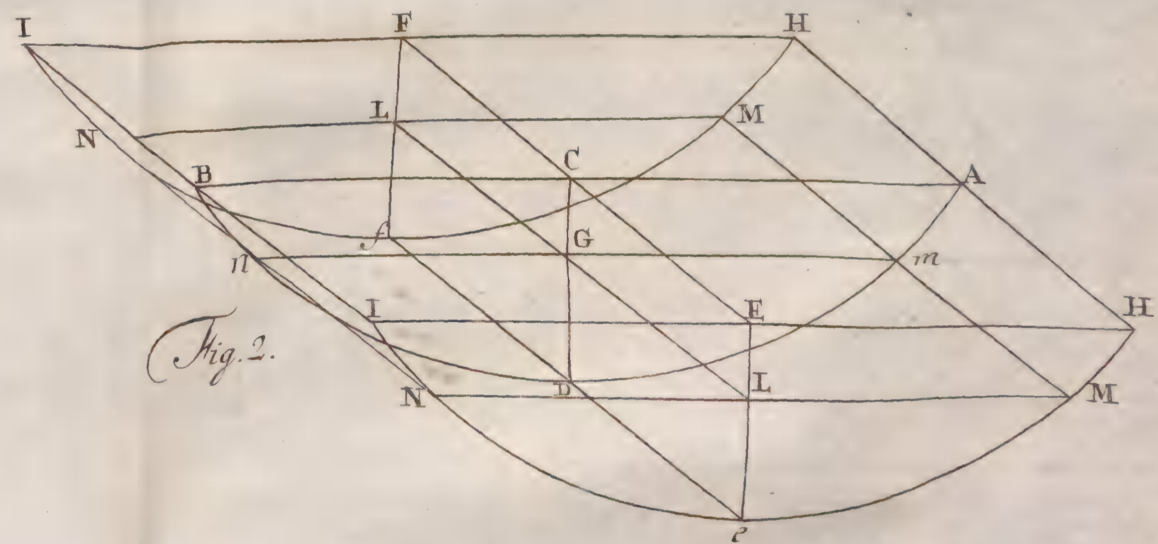
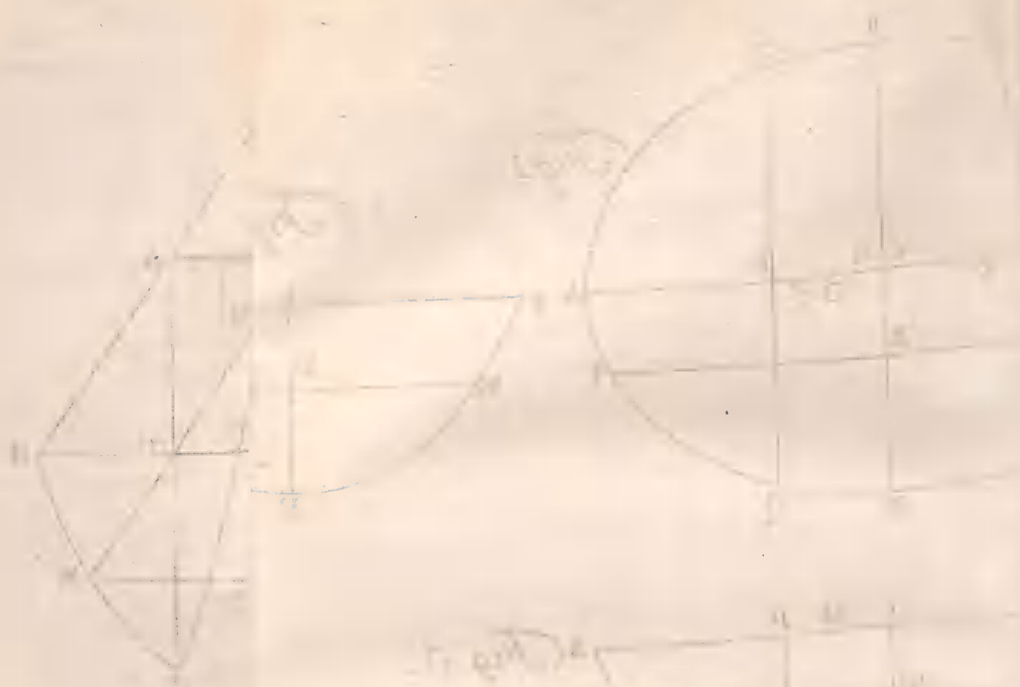
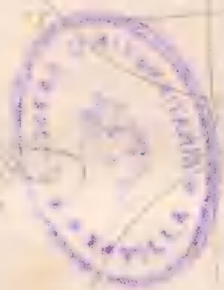
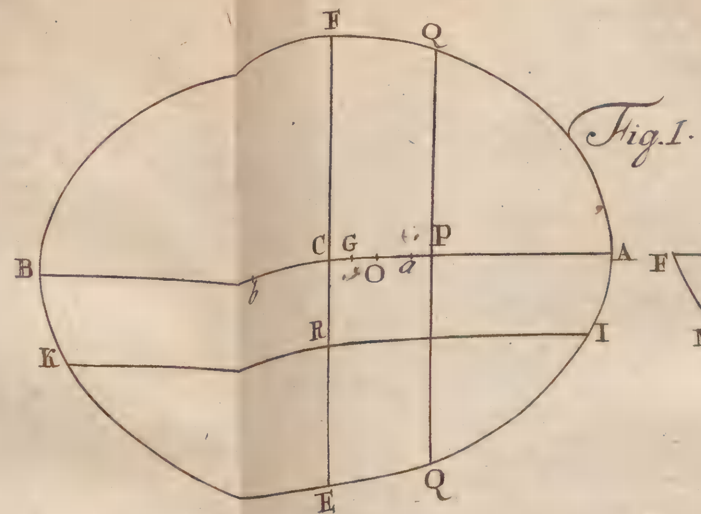


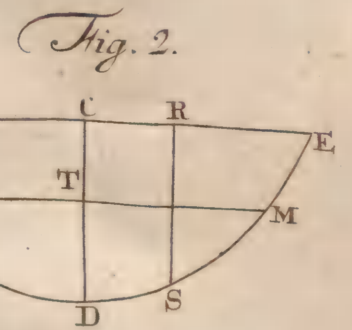
Fig. 2.

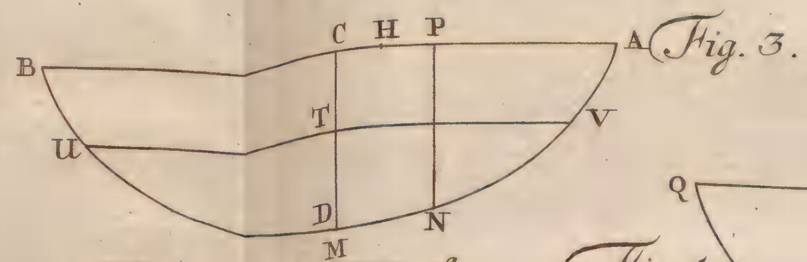


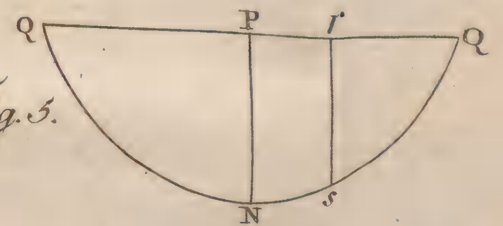


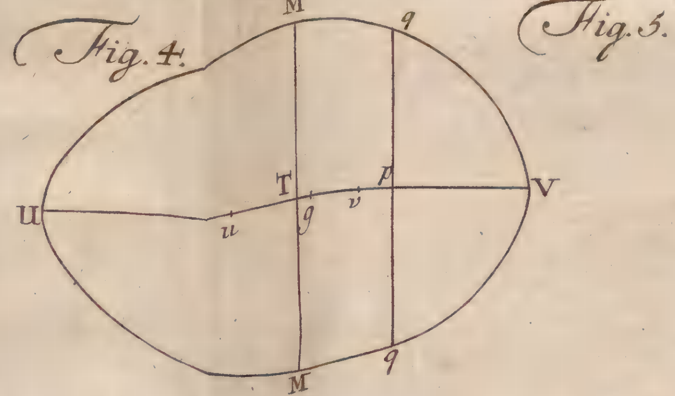


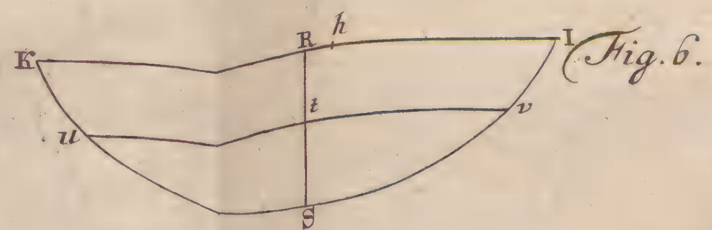






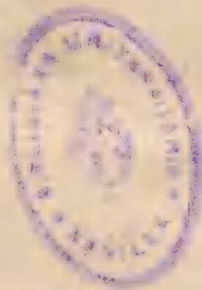


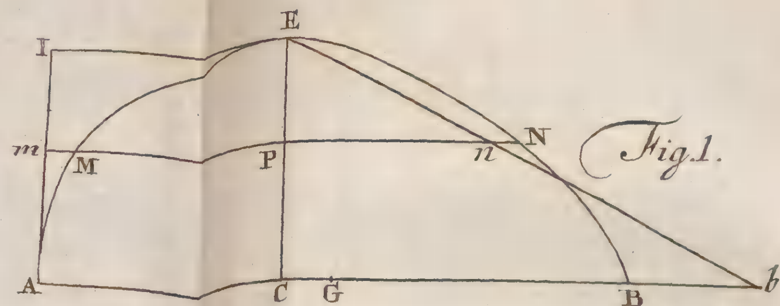


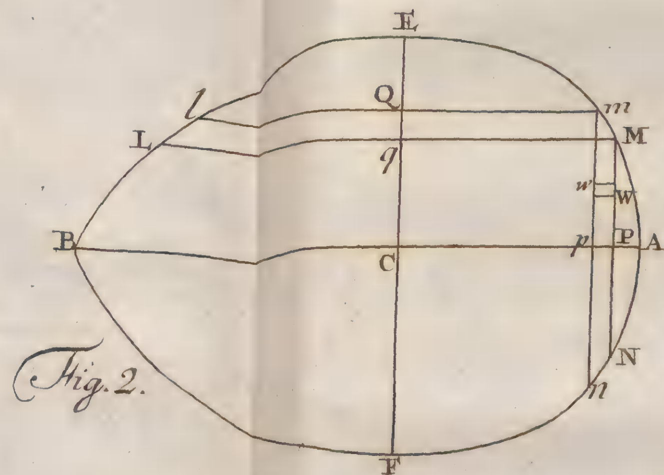


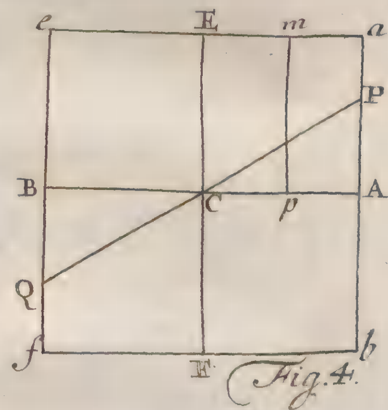
Pars II.

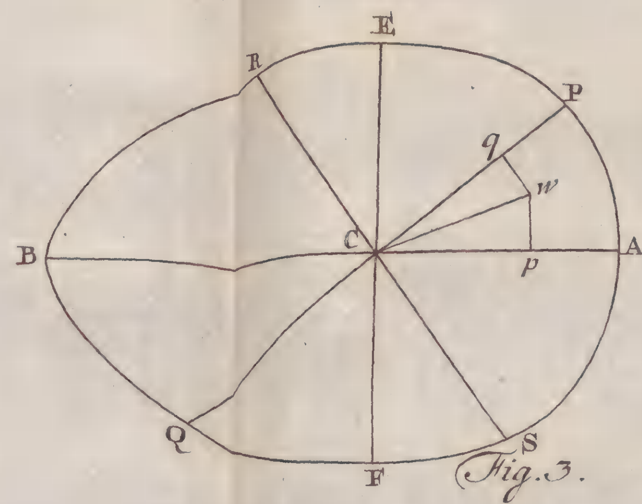
Tab. VII.

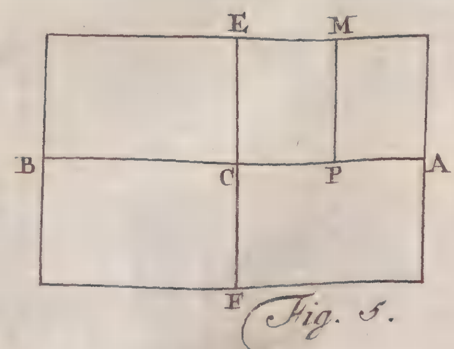


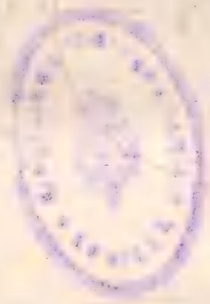

E
I
m
M
P
n
N
Fig.1.
A
C
G
B
b


E
l
Q
m
L
M
q
w
W
B
p
P
A
C
N
n
Fig. 2.
F


e
E
m
a
P
B
C
p
A
Q
f
F
b
Fig.4.


E
R
P
q
w
B
C
p
A
Q
F
S
Fig.3.


E
M
B
C
P
A
F
Fig. 5.



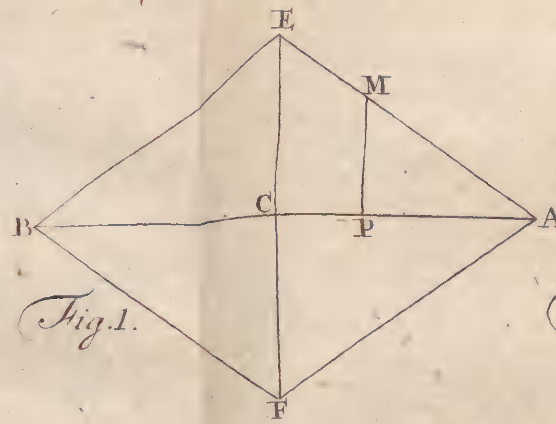


Fig. 1.

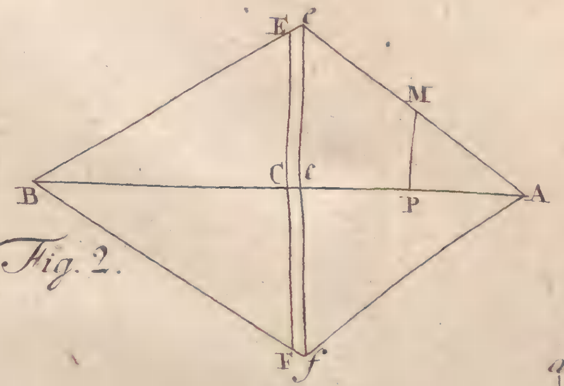


Fig. 2.

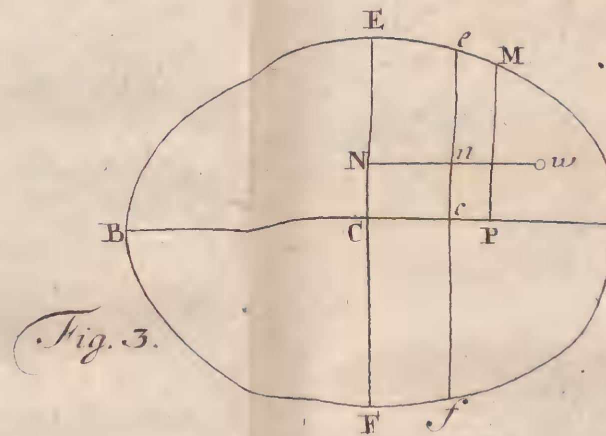


Fig. 3.

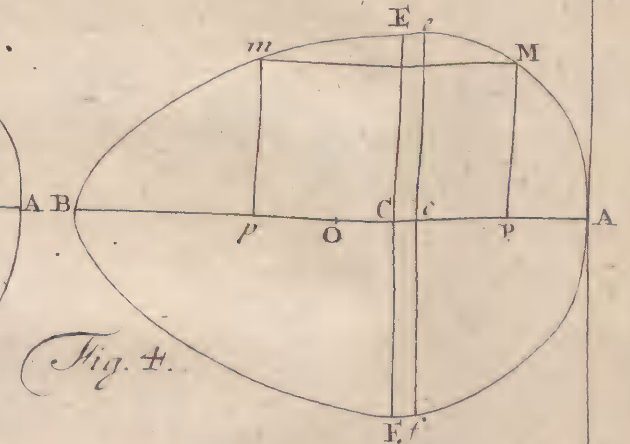


Fig. 4.

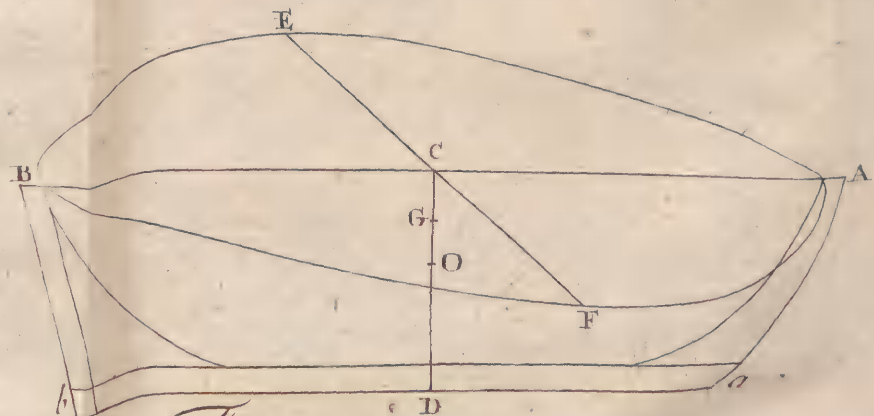


Fig. 5.





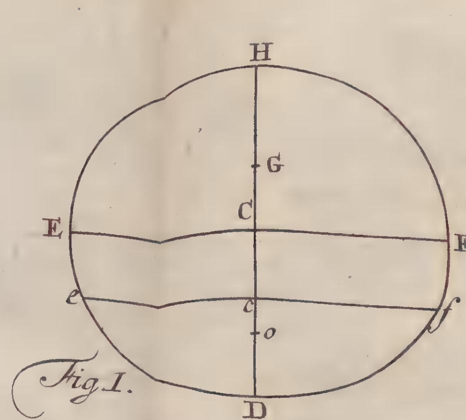


Fig. 1.

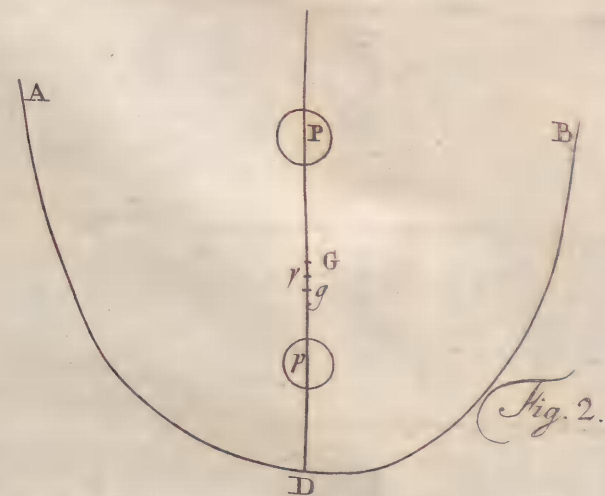


Fig. 2.

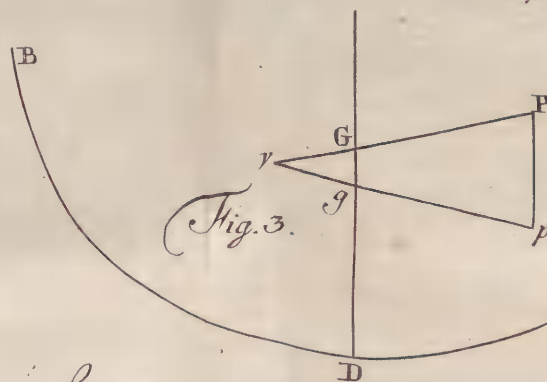


Fig. 3.

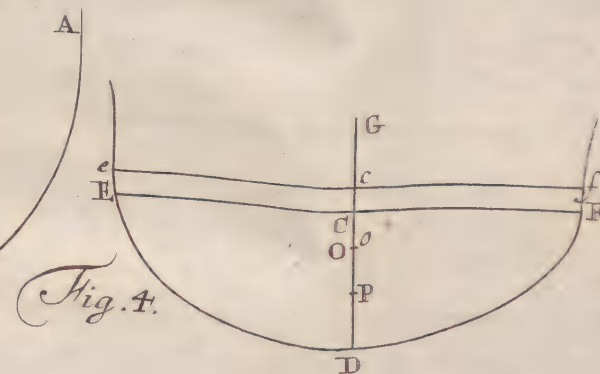


Fig. 4.

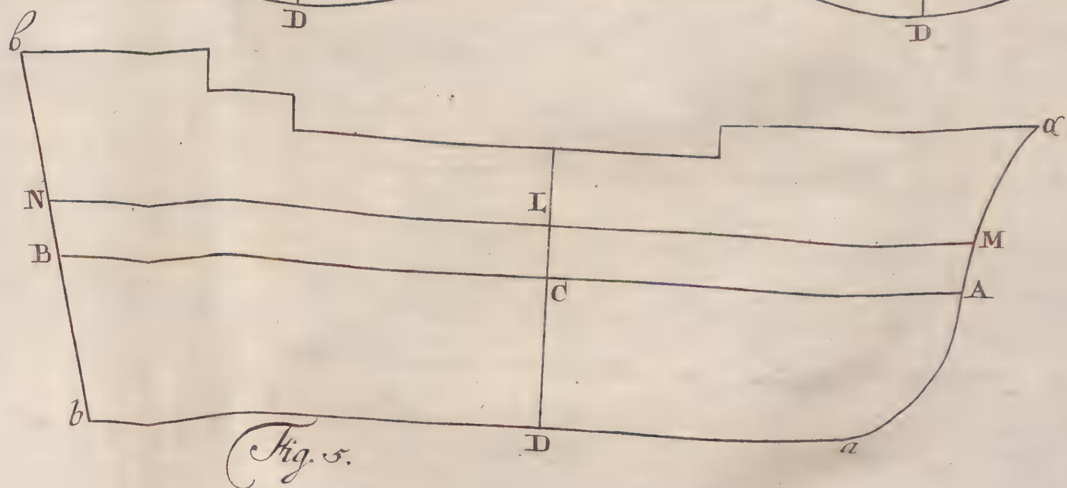
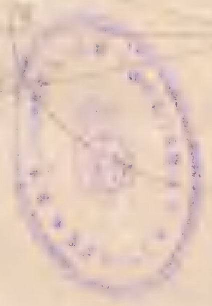


Fig. 5.







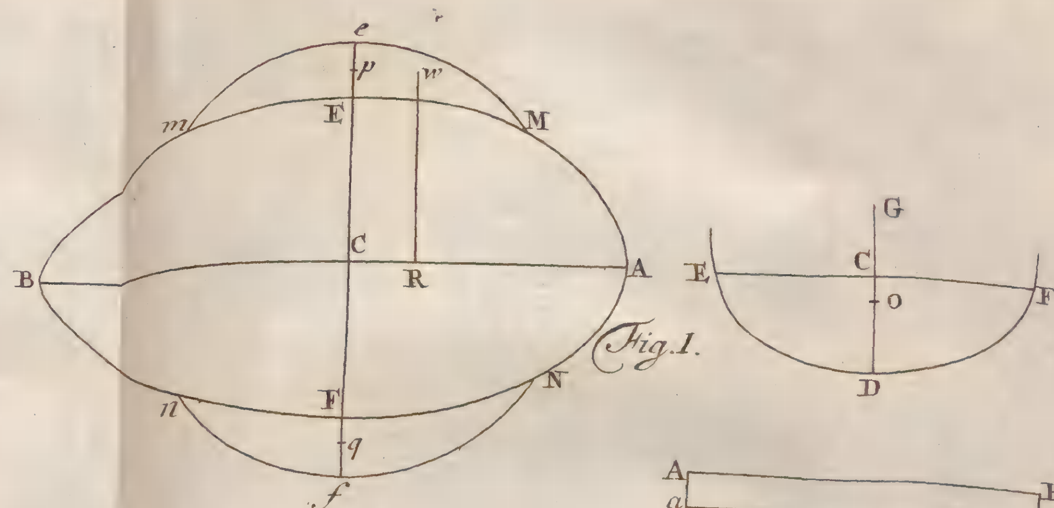


Fig. 1.

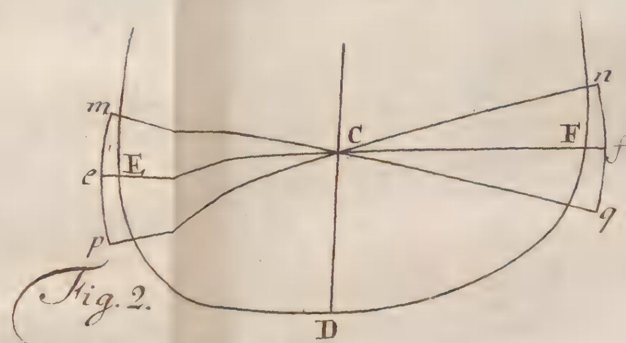


Fig. 2.

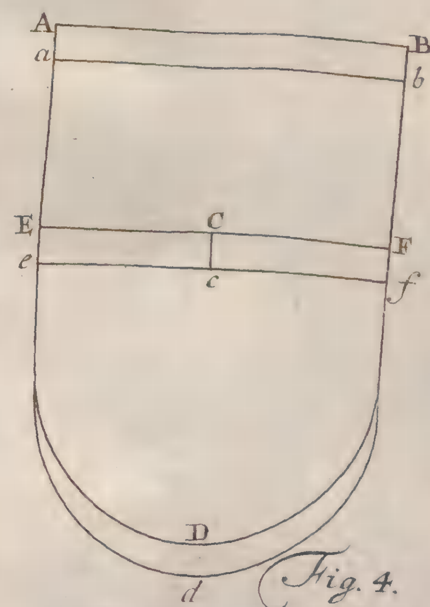


Fig. 4.

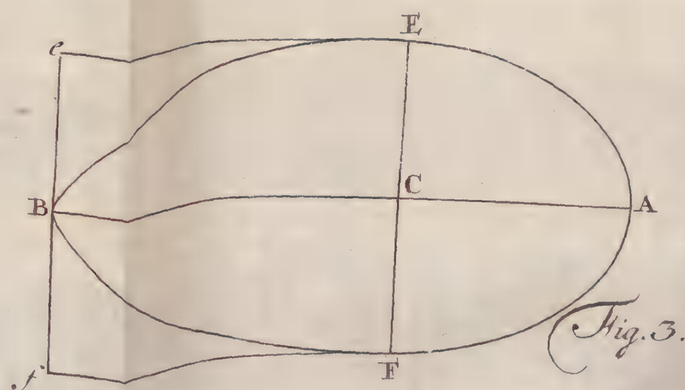
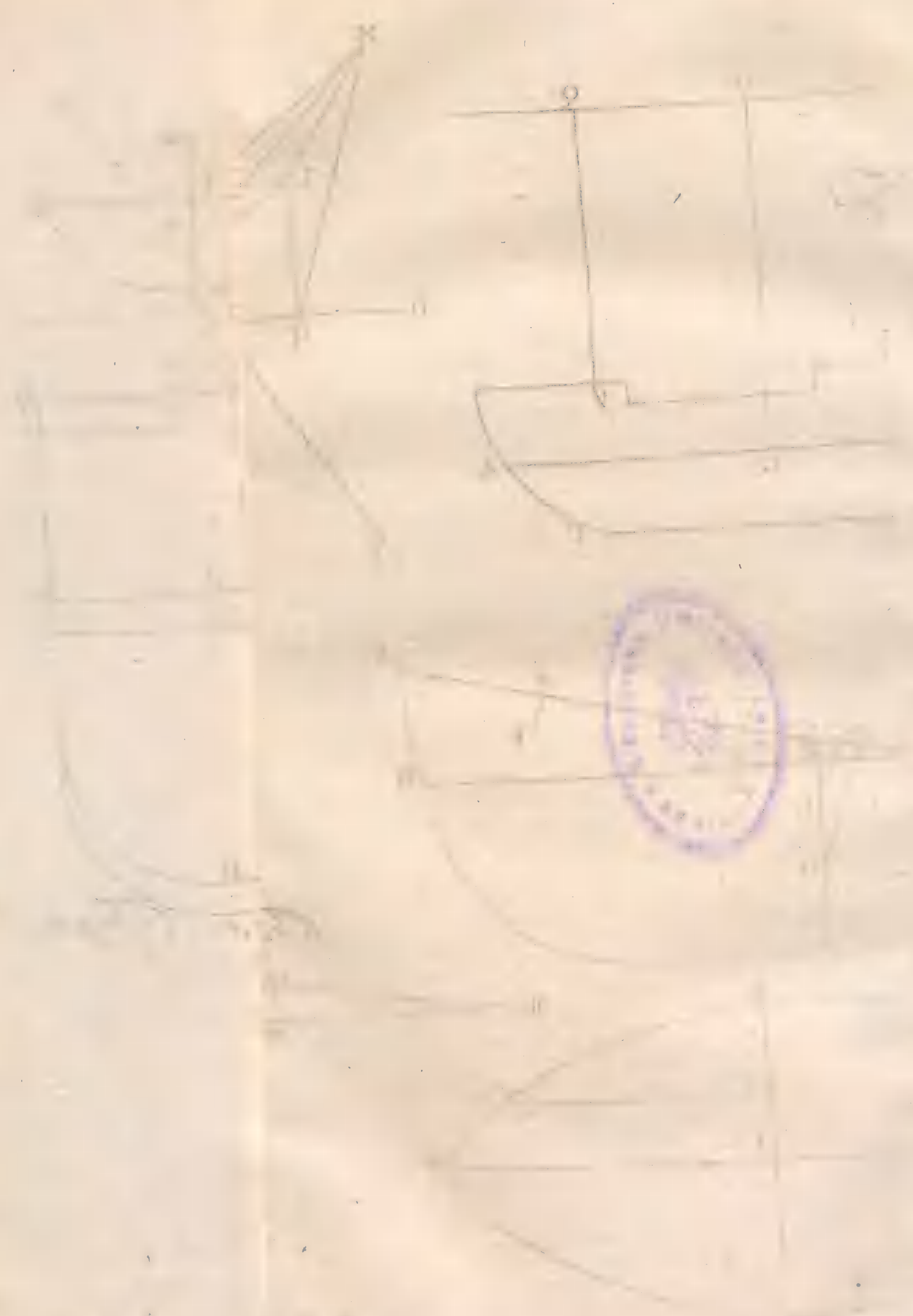
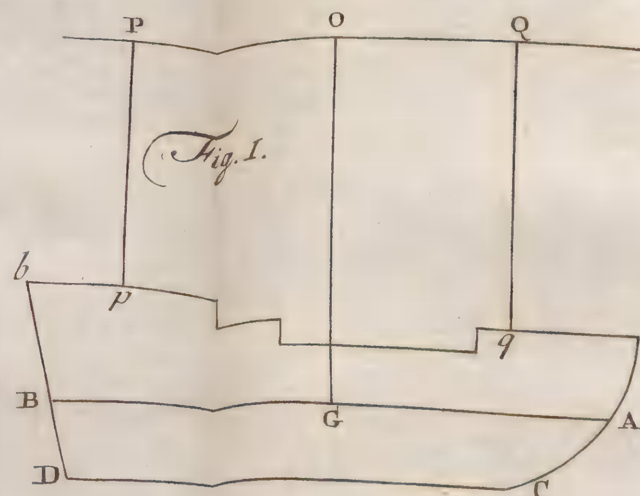
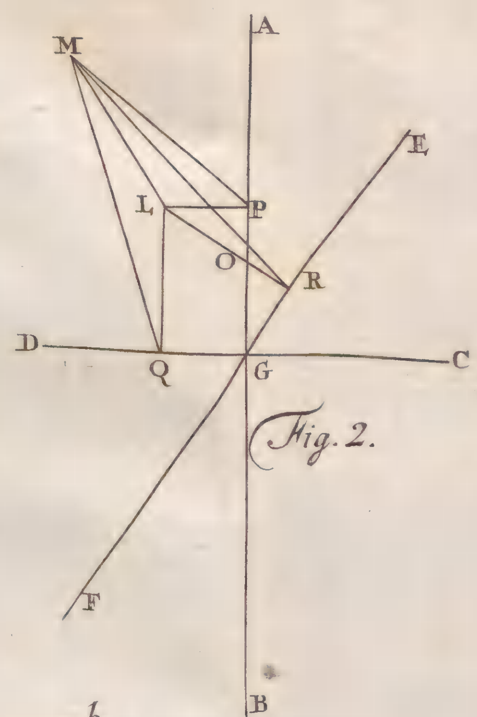


Fig. 3.




Fig. 1.
P
O
Q
b
p
q
B
G
A
D
C


A
M
E
L
P
O
R
D
Q
G
C
Fig. 2.
F
B

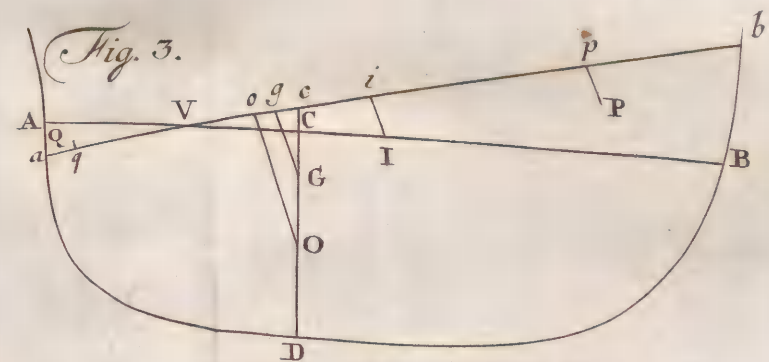
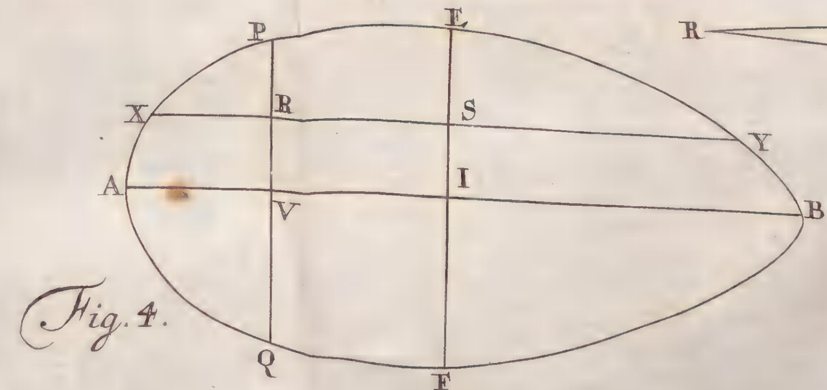
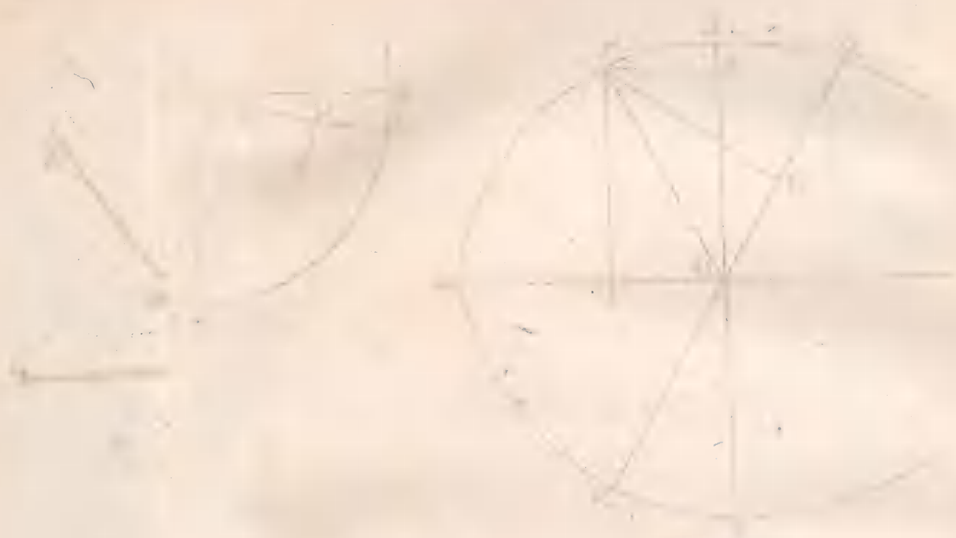
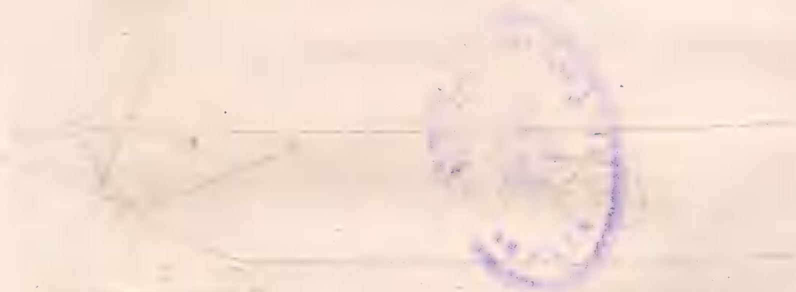

Fig. 3.
b
p
o g c
i
A
V
C
P
Q
a
q
I
B
G
O
D

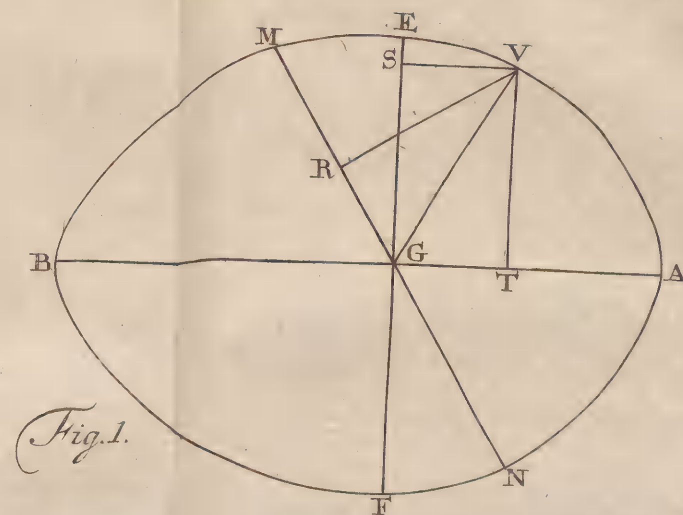

Fig. 5.
y
mn
R
Y
MN

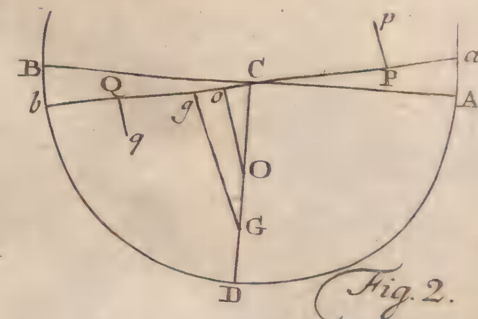

P
E
X
R
S
Y
A
I
V
B
Fig. 4.
Q
F

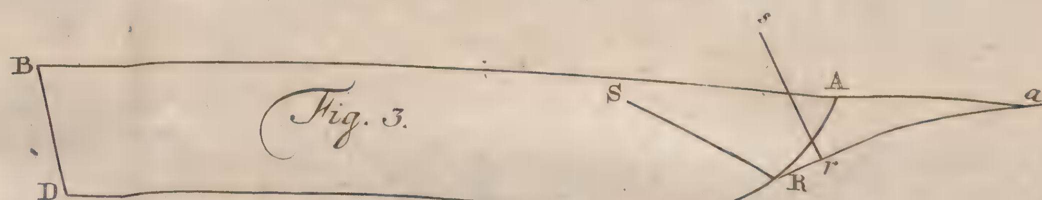


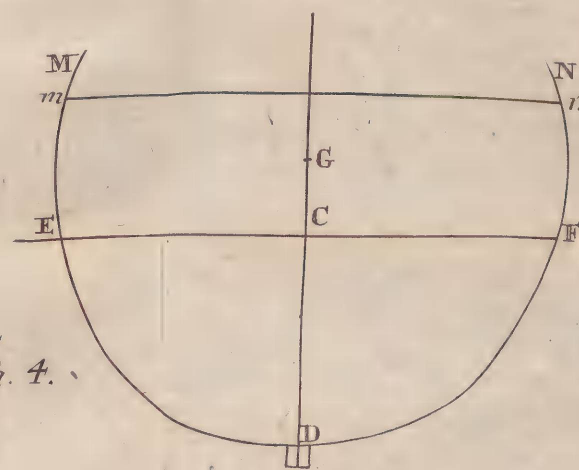


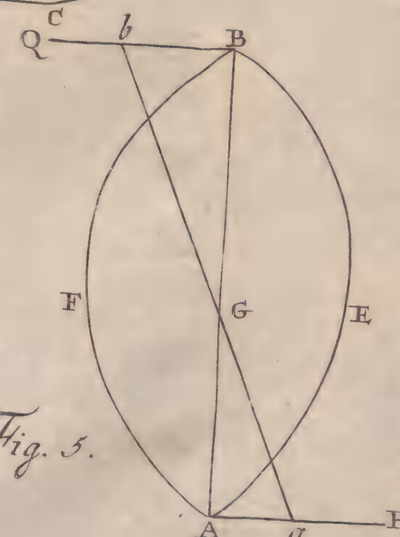


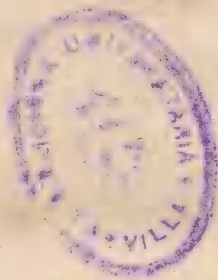

E
M
V
S
R
B
G
T
A
F
N
Fig. 1.


p
a
B
Q
C
P
b
g
o
A
q
O
G
D
Fig. 2.


B
A
a
S
Fig. 3.
r
R
D
C


M
N
m
n
G
E
C
F
Fig. 4.
D


Q
b
B
F
G
E
Fig. 5.
A
a
P





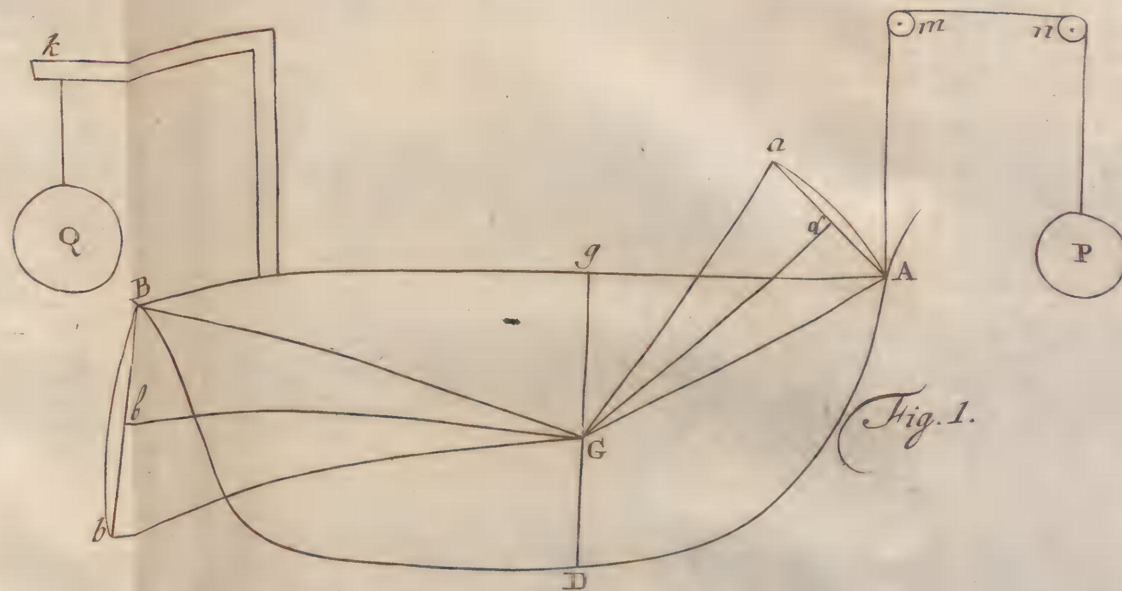


Fig. 1.

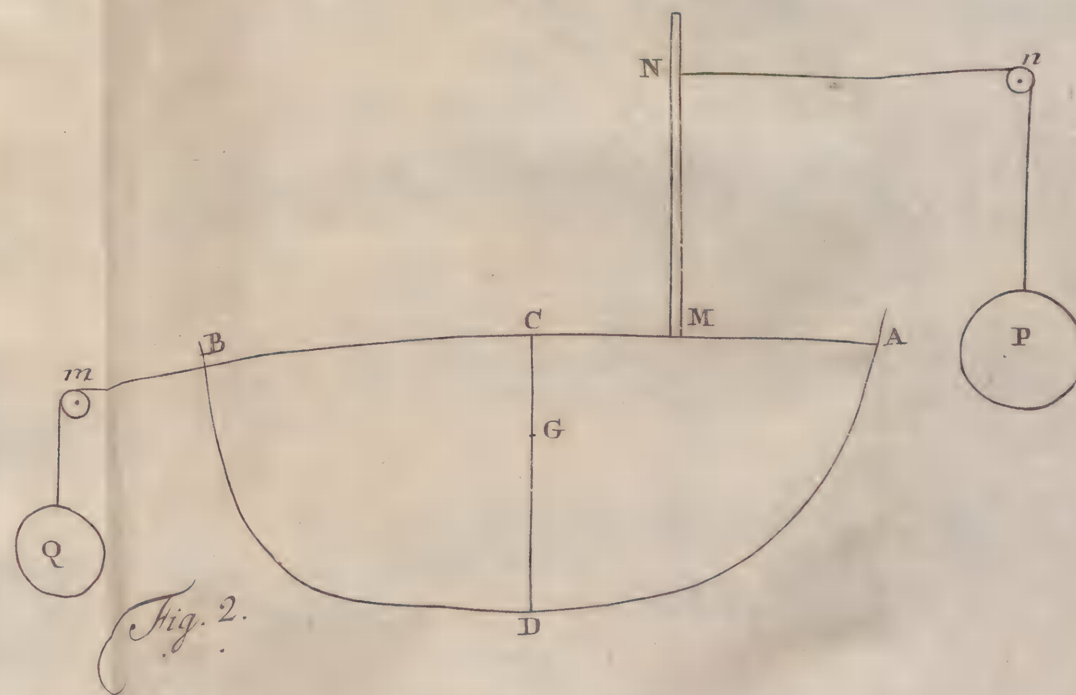
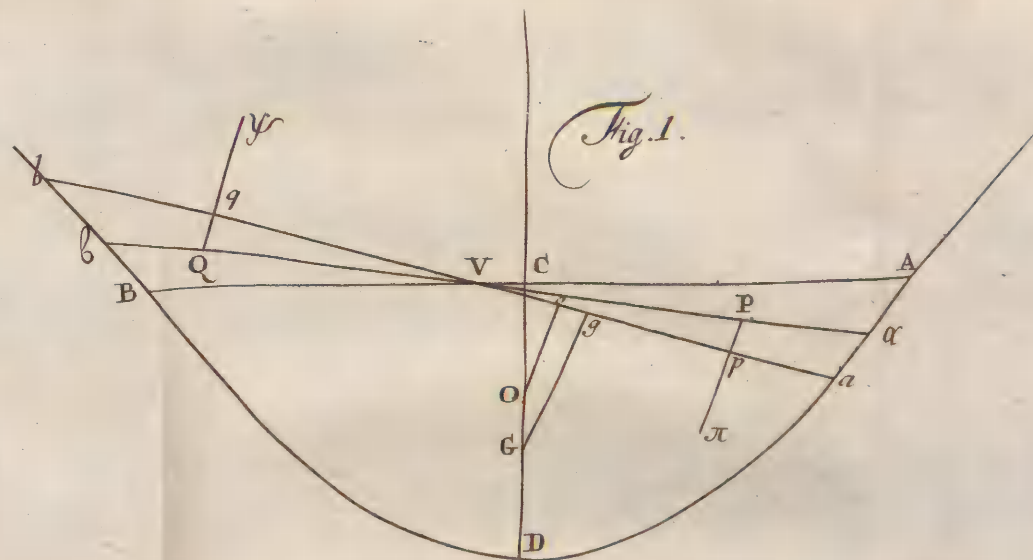
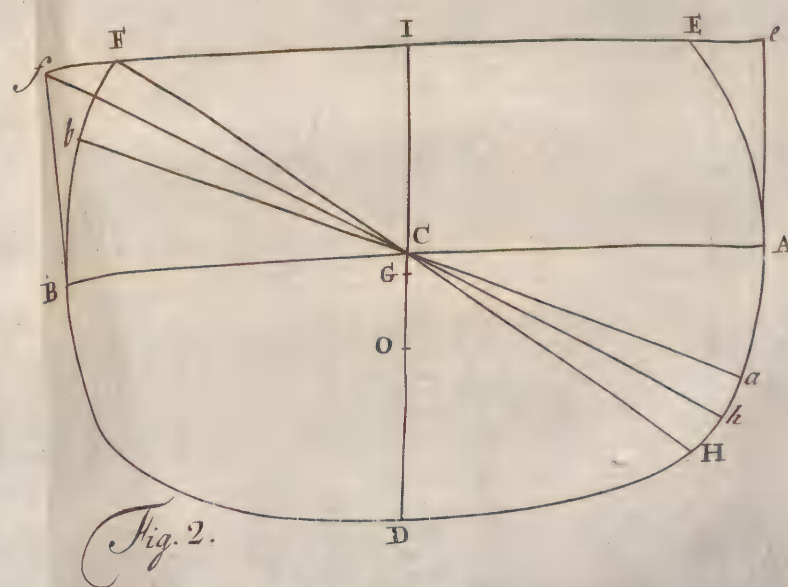


Fig. 2.

Tab. XIV.







Pars II.

Tab. XV.

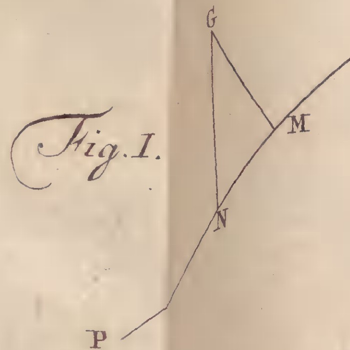


Fig. 1.

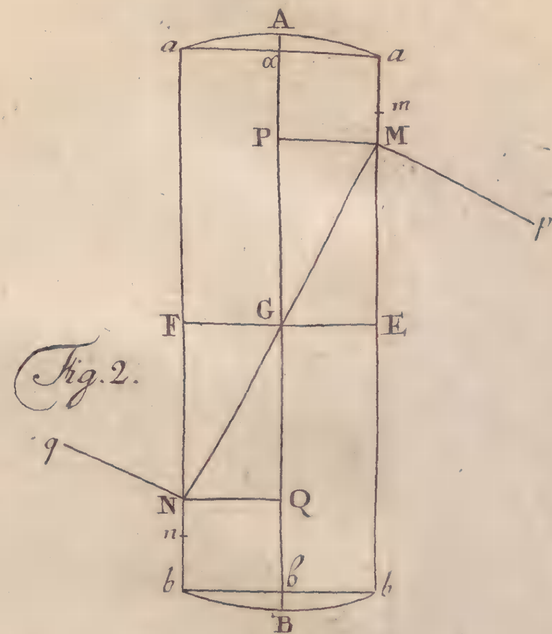


Fig. 2.

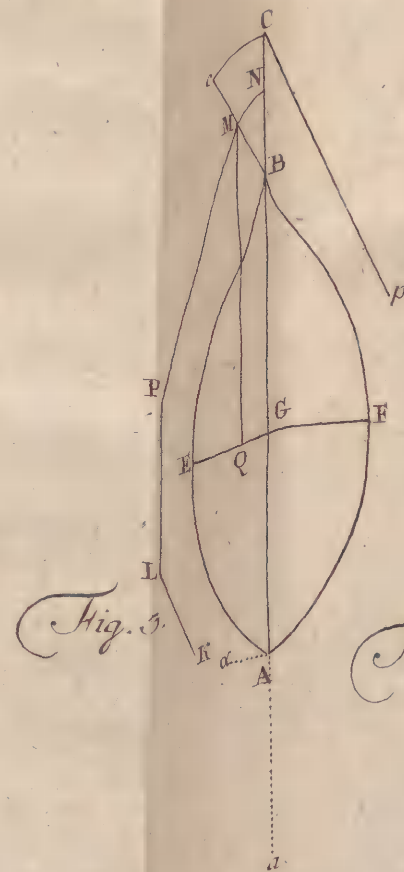


Fig. 3.

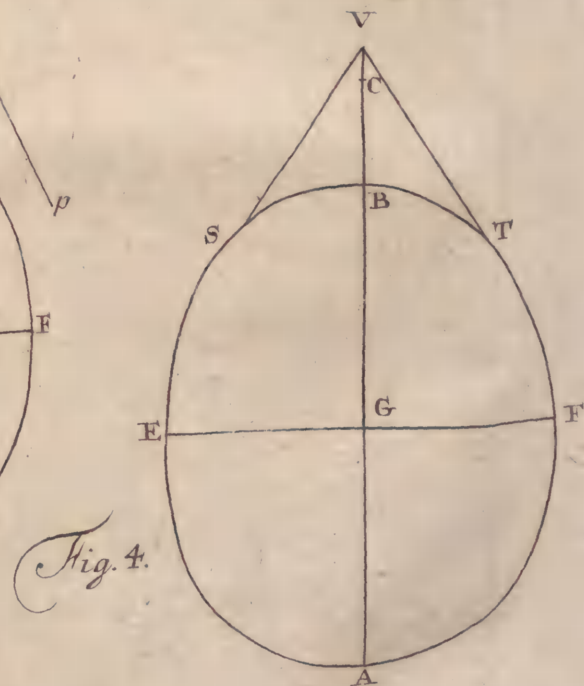
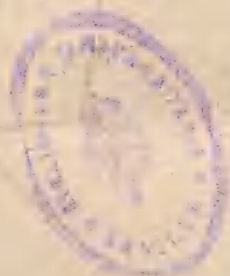
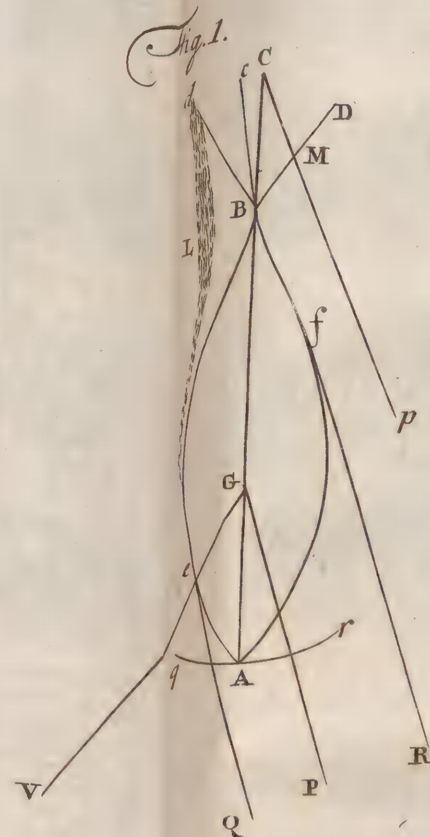
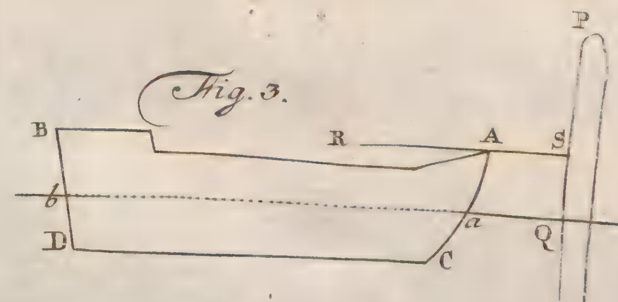
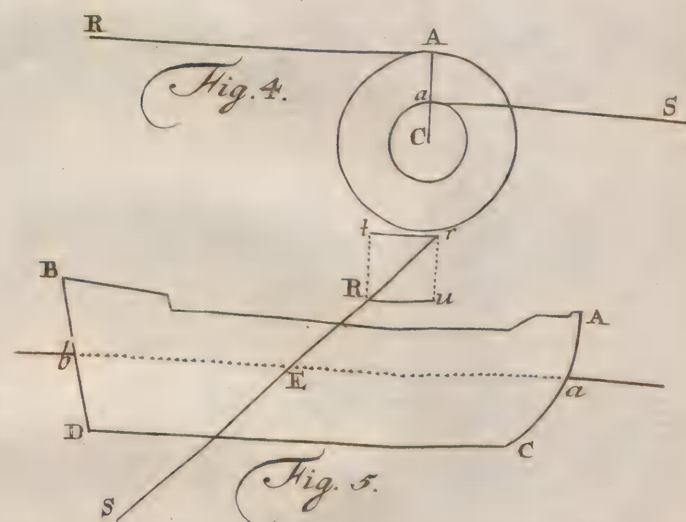


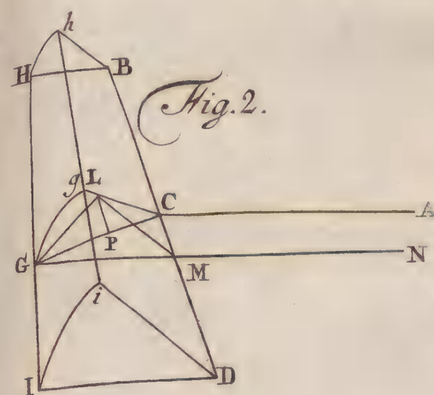
Fig. 4.

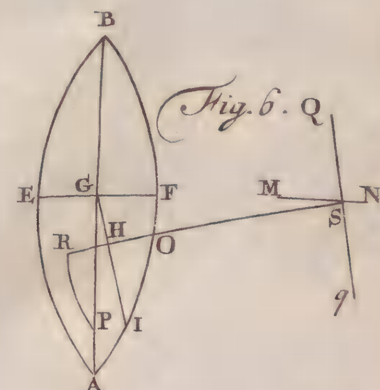



Fig. 1.
C
c
D
M
B
L
f
p
G
e
r
q
A
V
Q
P
R

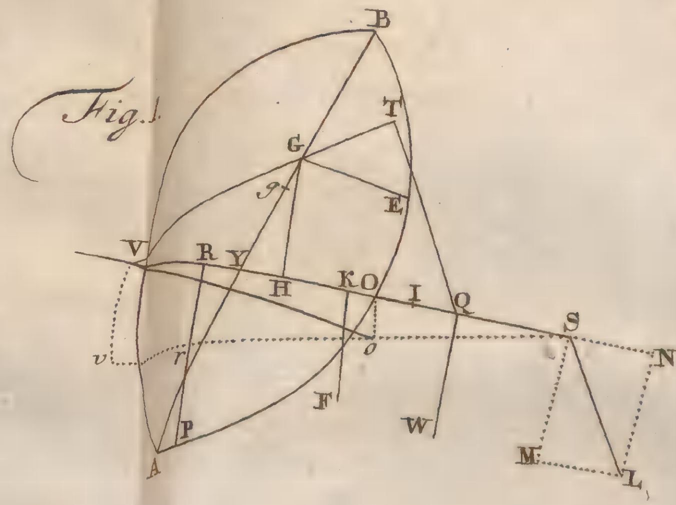

Fig. 3.
P
B
R
A
S
b
D
a
Q
C

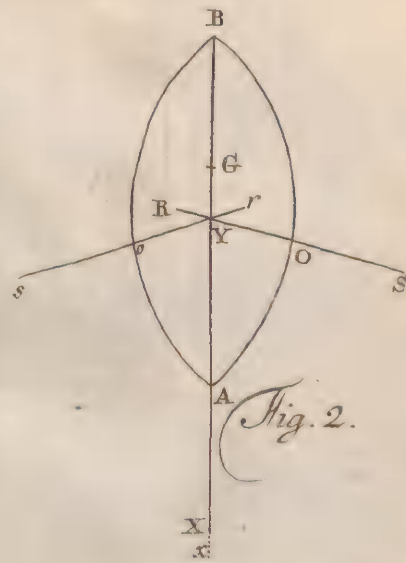

R
A
Fig. 4.
a
S
C
t
r
B
R
u
A
b
E
a
D
C
Fig. 5.
S

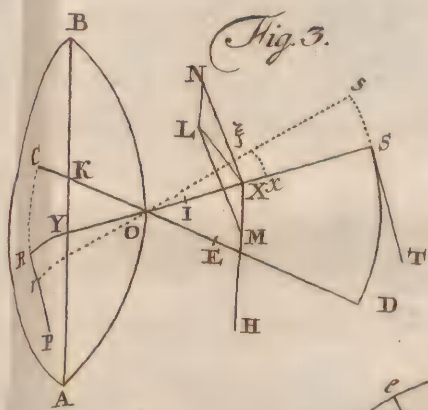

h
H
B
Fig. 2.
g
L
C
A
G
P
M
N
i
I
D

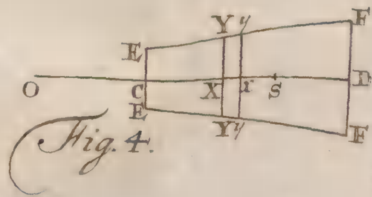

B
Fig. 6.
Q
E
G
F
M
N
S
R
H
O
q
P
I
A

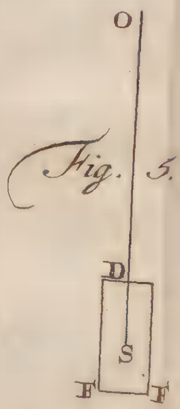
M
W
M

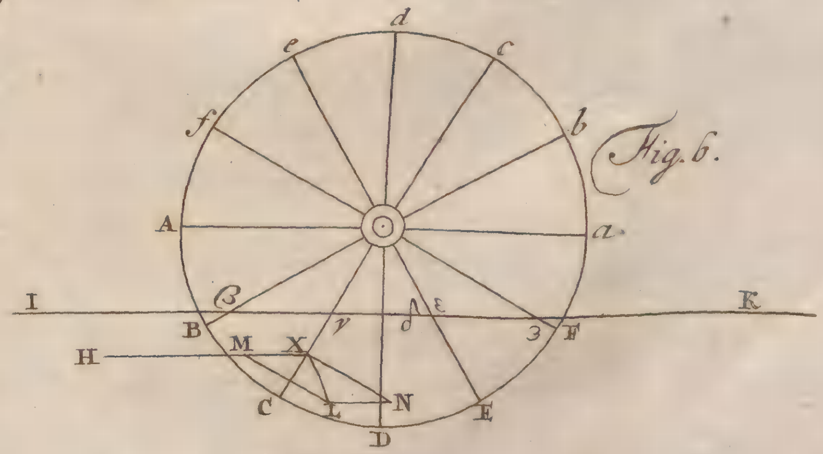






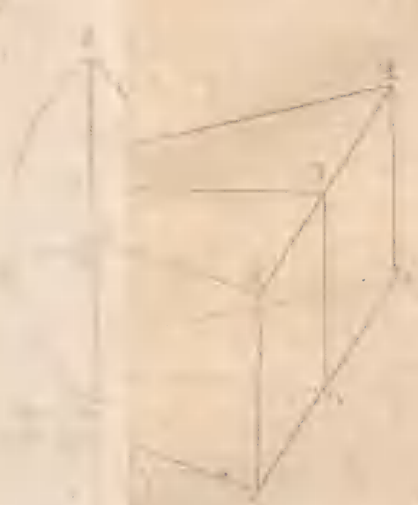


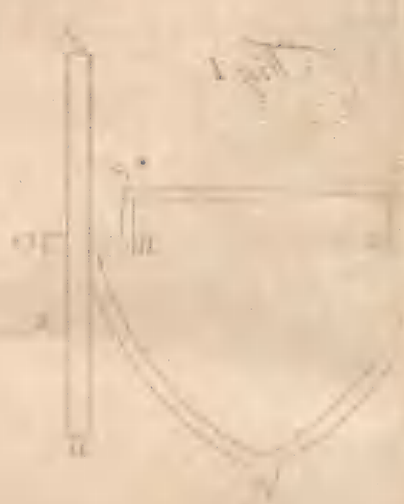


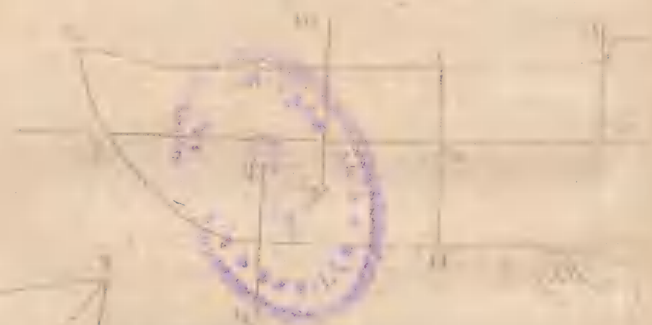


Pars II.

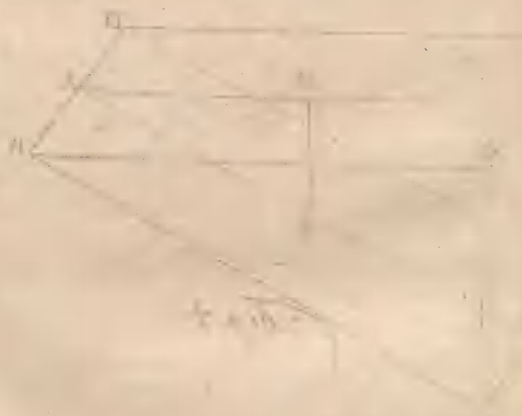
Tab XVIII.

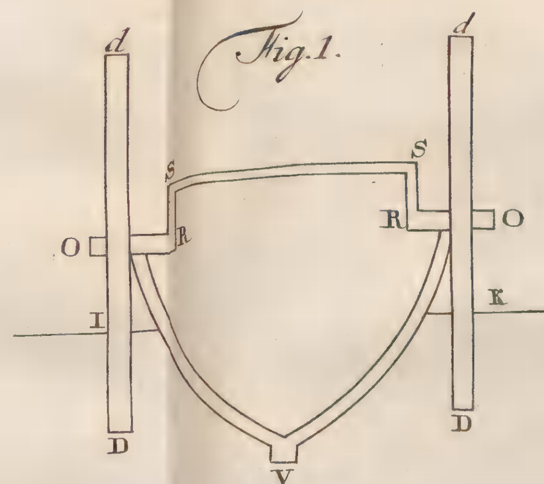


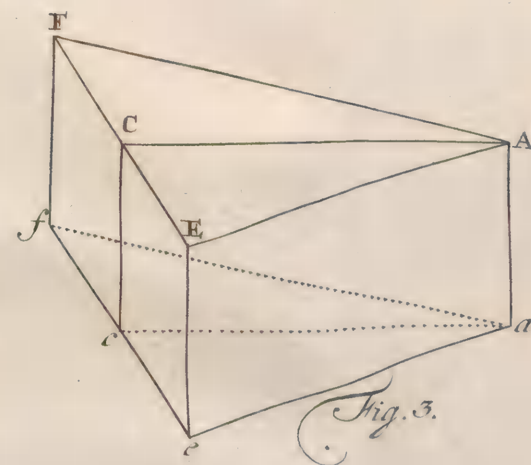


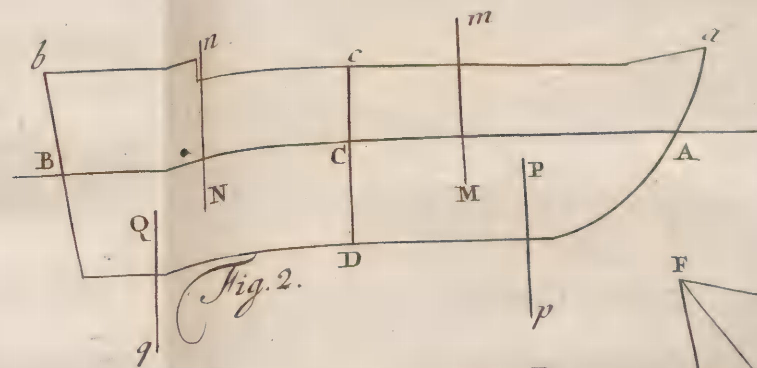


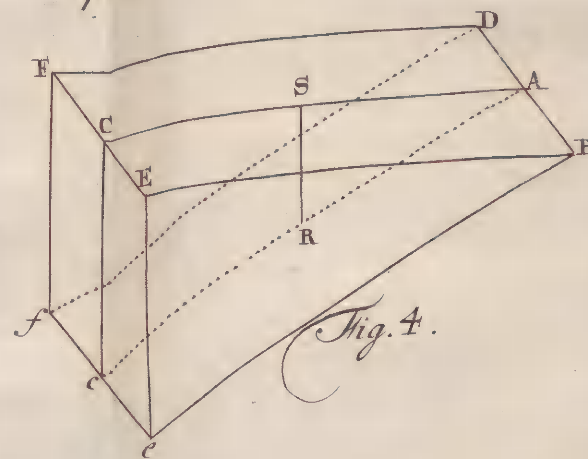


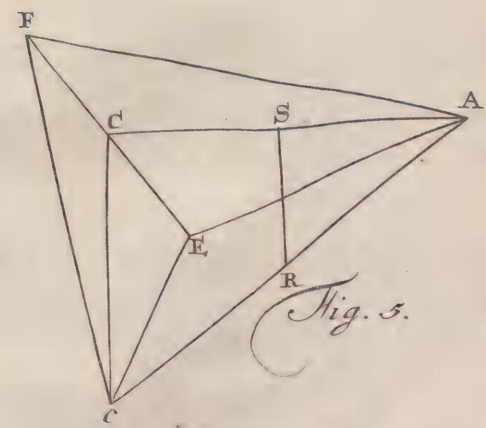



Fig. 1.
d
d
S
S
O
R
R
O
I
K
D
D
V

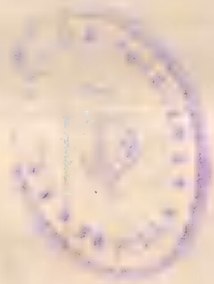

F
C
A
f
E
c
a
e
Fig. 3.

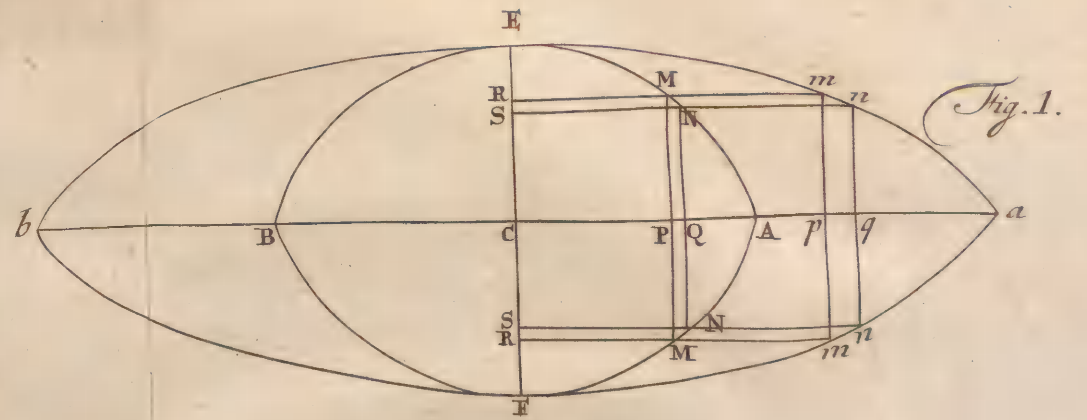

b
n
c
m
a
B
C
A
N
M
P
Q
D
Fig. 2.
p
q

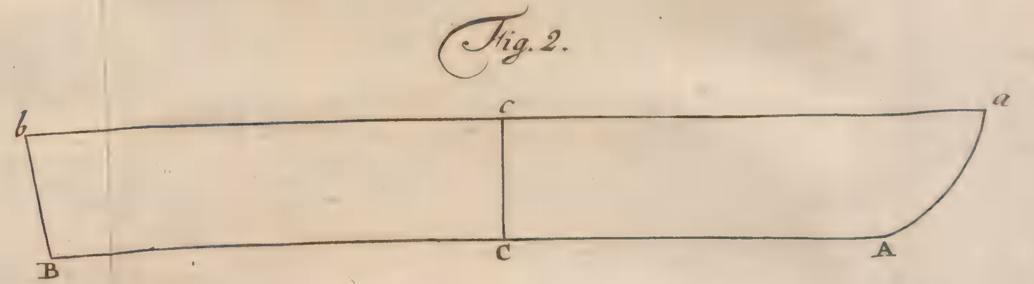

D
F
S
A
C
B
E
R
f
Fig. 4.
c
e

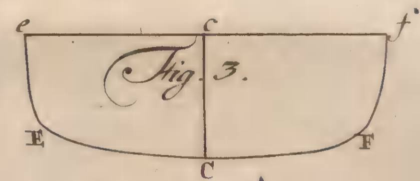

F
C
S
A
E
R
Fig. 5.
c

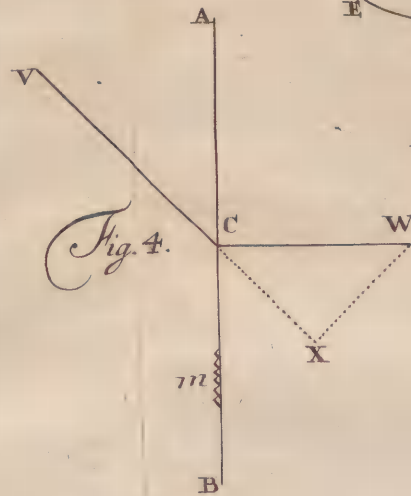
Tab. XIX.

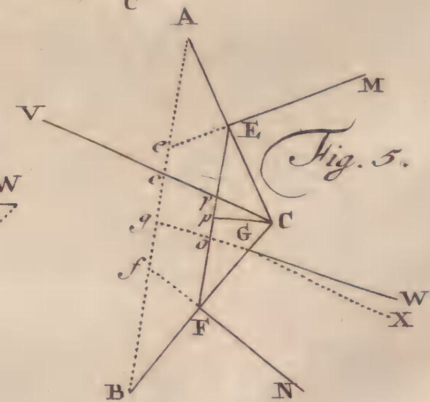








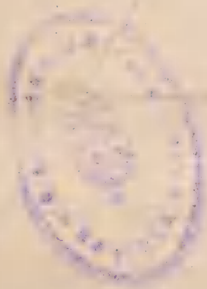




Pars II.

Tab XX.







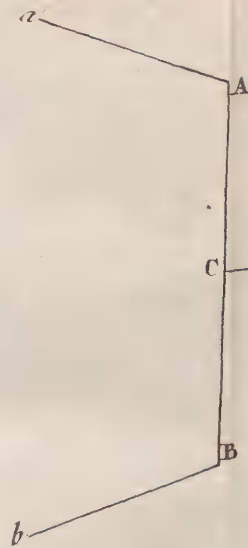


Fig. 1.

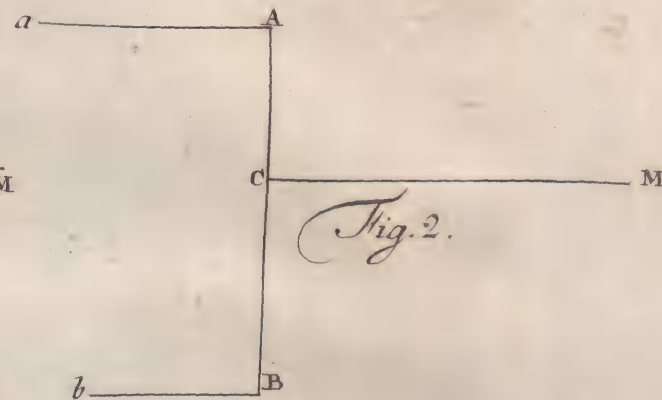


Fig. 2.

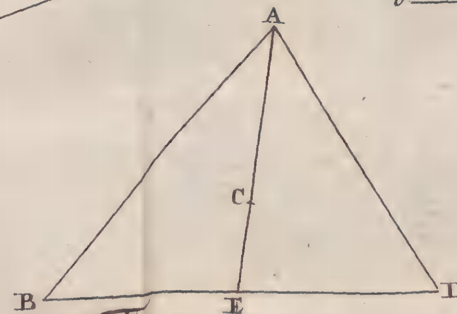


Fig. 3.

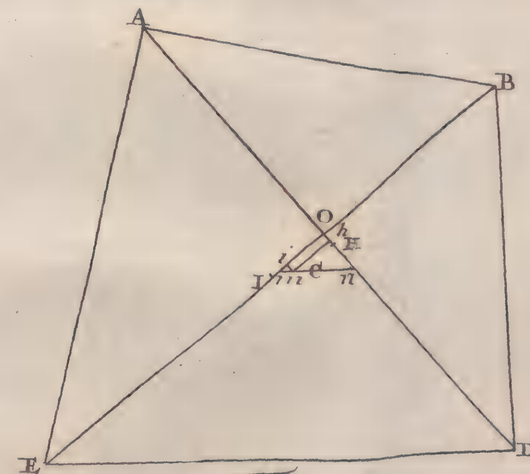


Fig. 4.

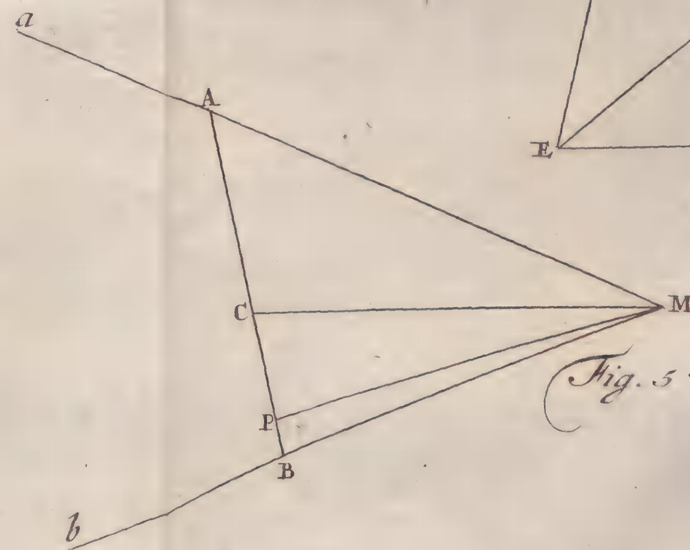
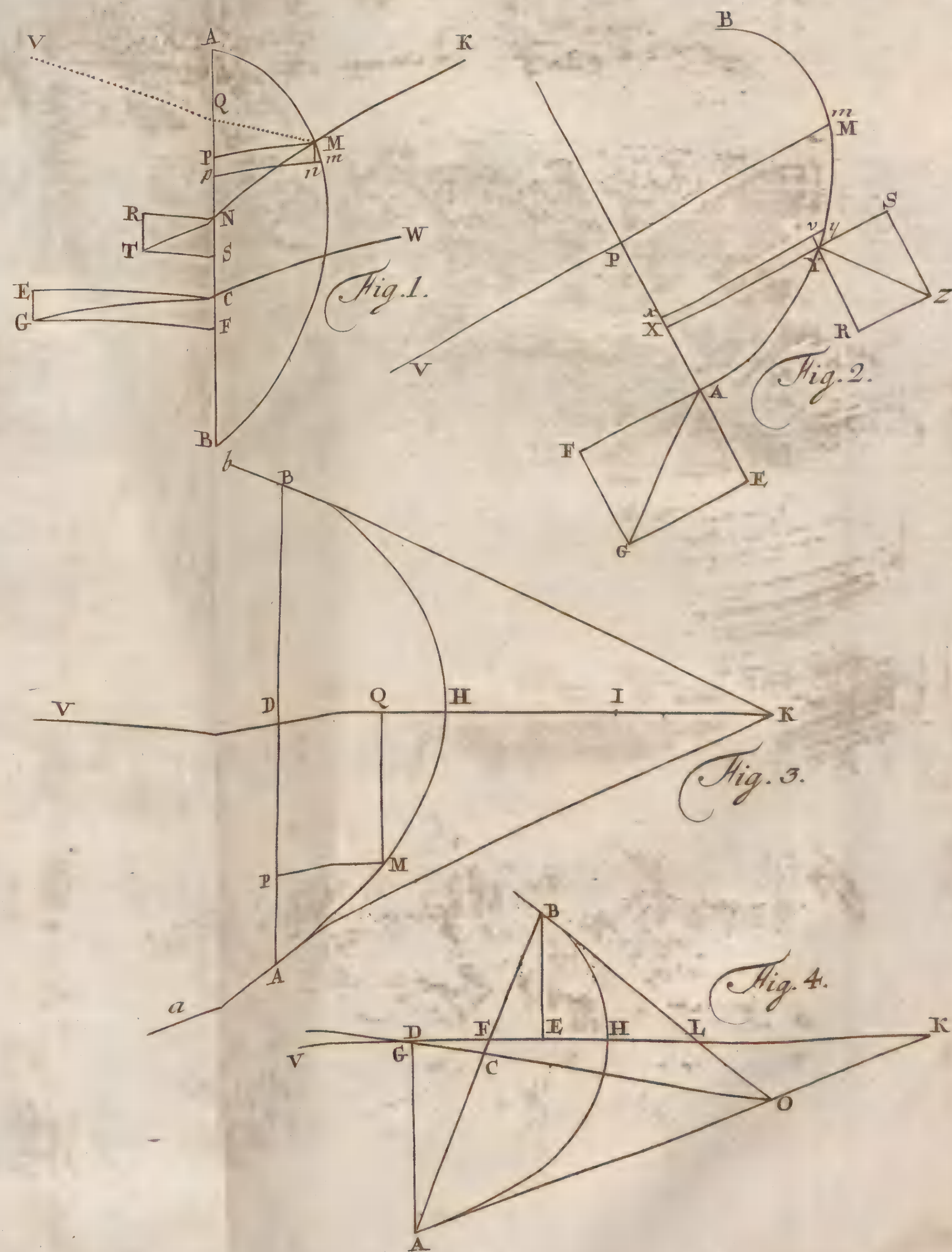


Fig. 5.





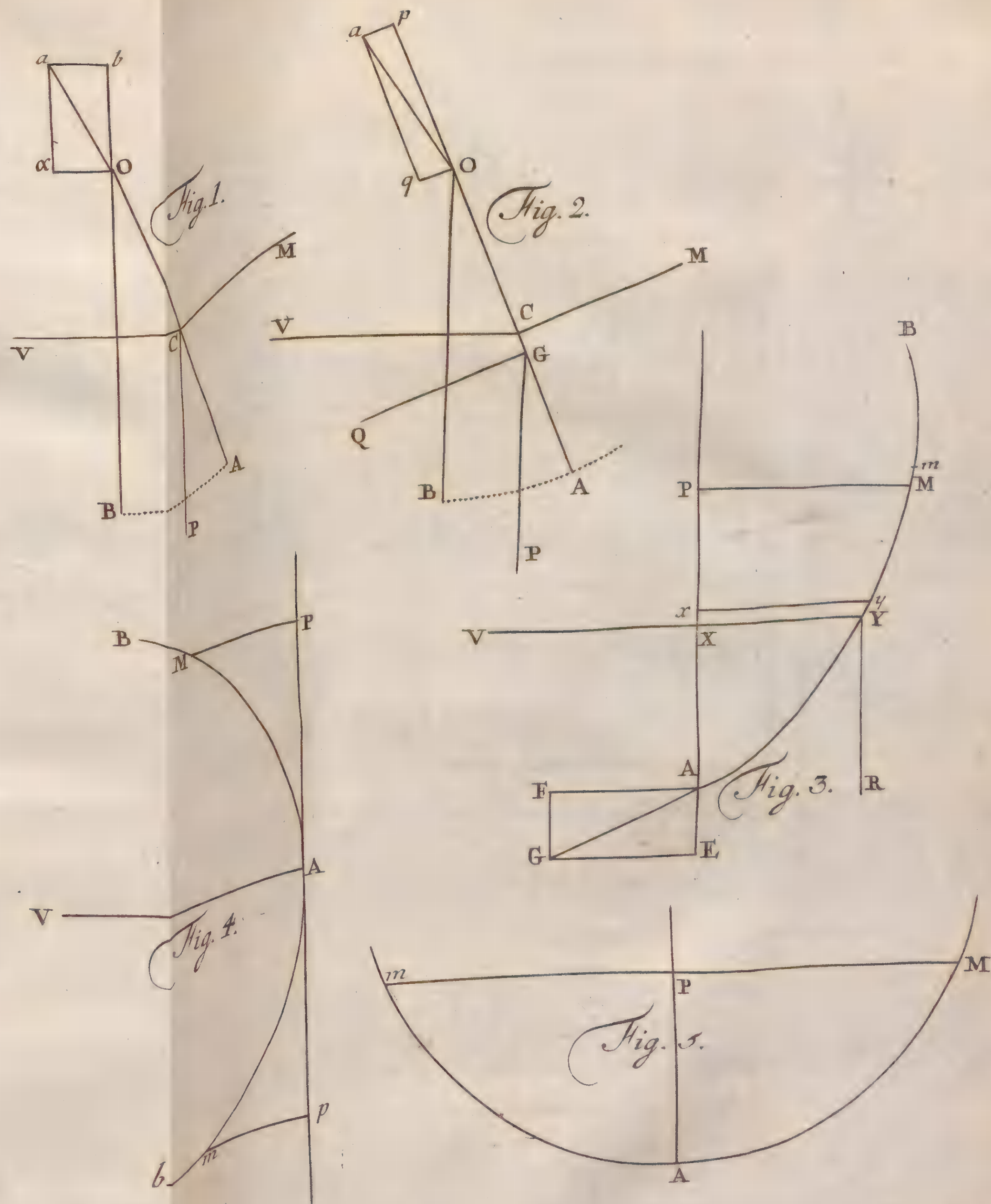


Tab. XXII.

Pars II.







Tab XXIII.

Pars II.

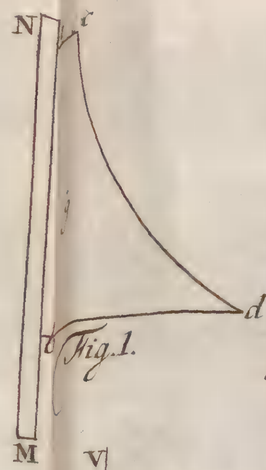


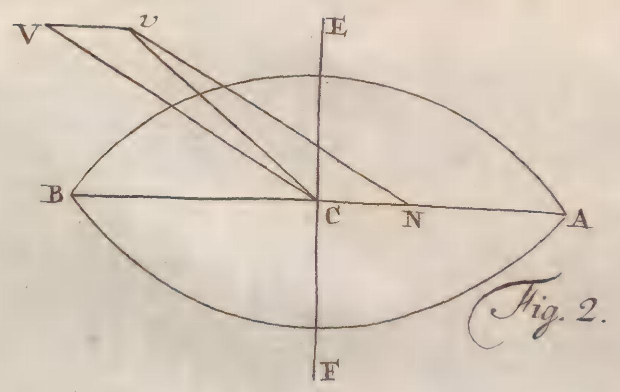


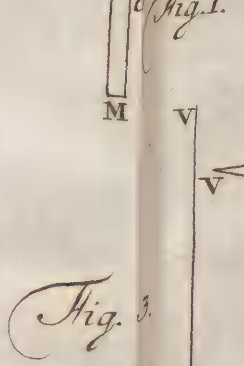


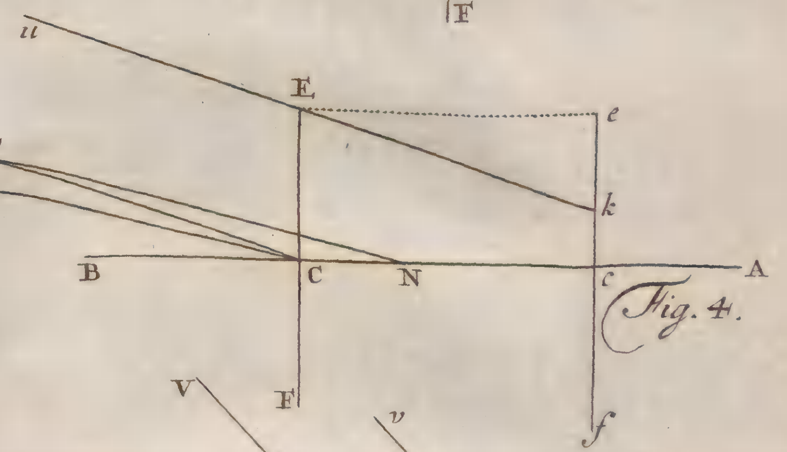


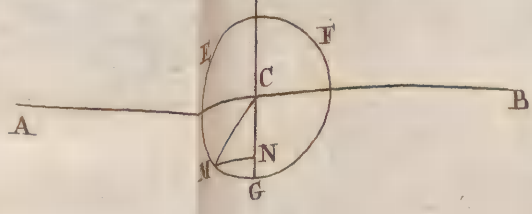


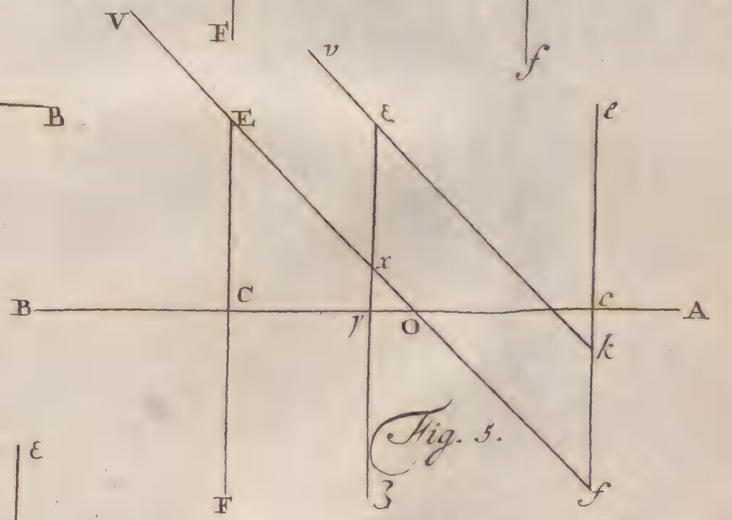


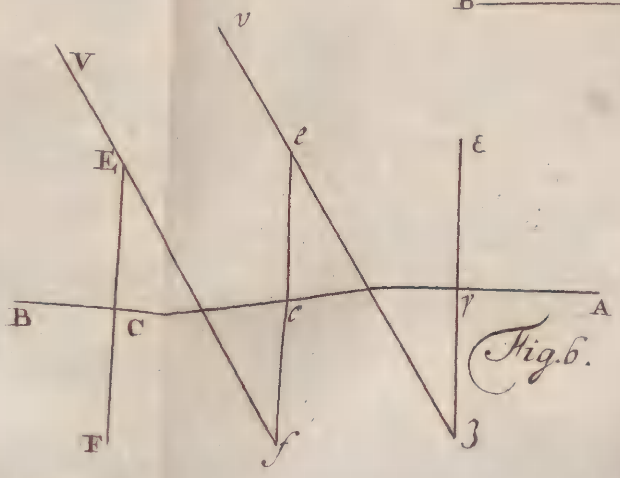












Pars II.

Tab. XXIV.





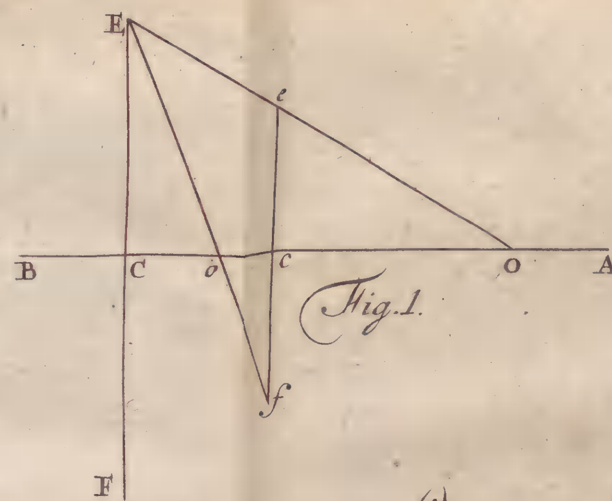



Fig. 1.

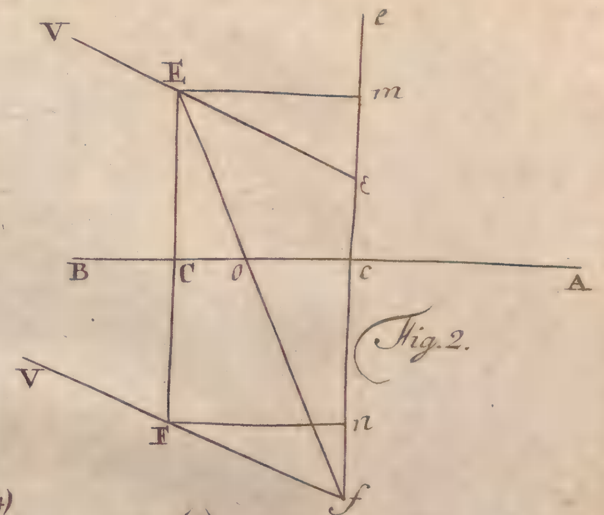


Fig. 2.

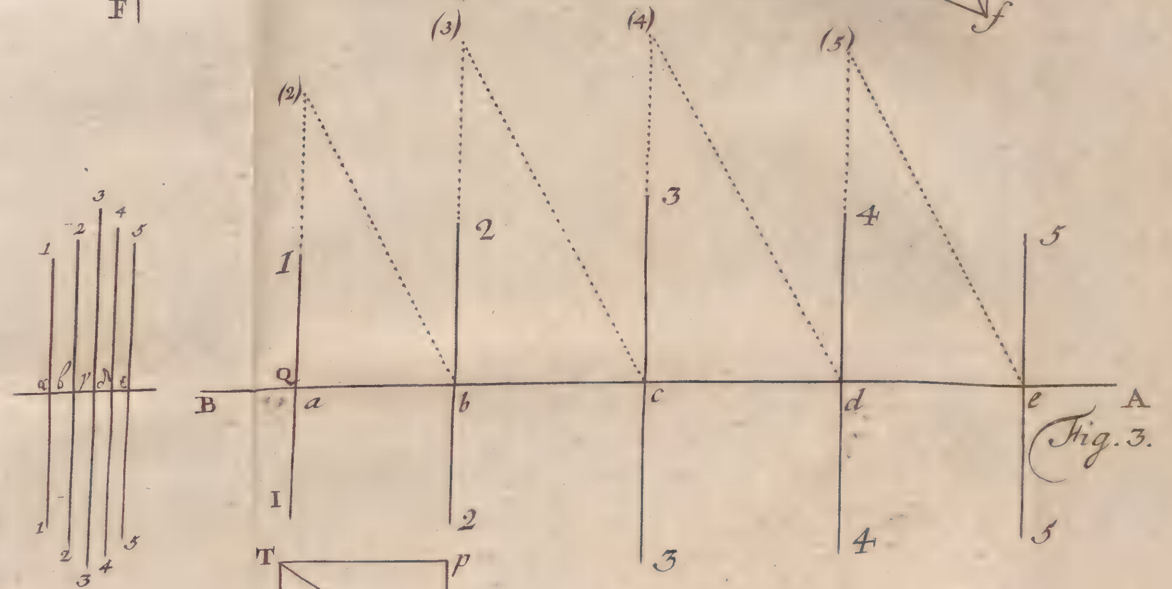


Fig. 3.

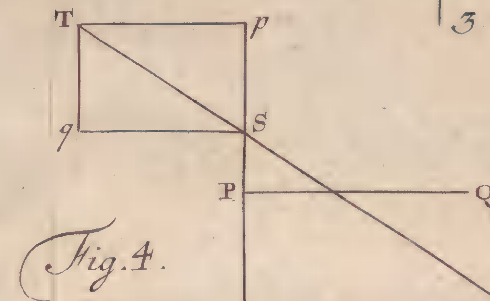
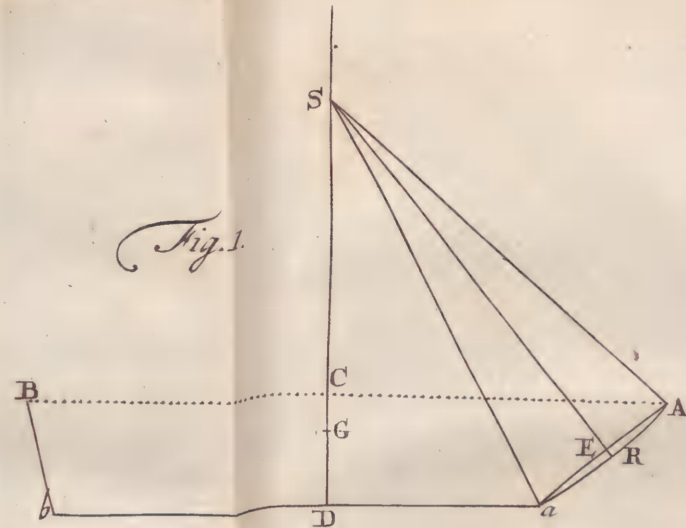
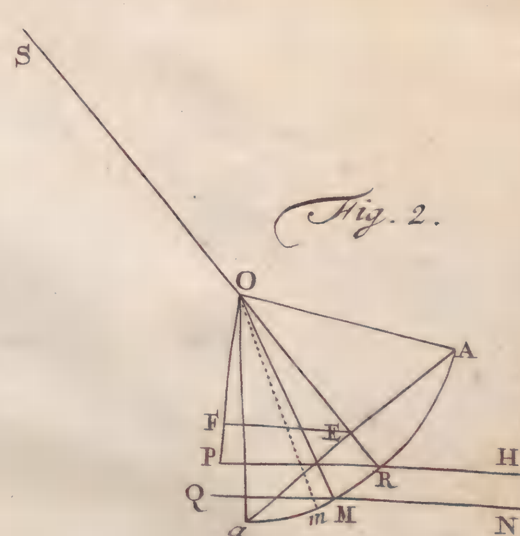


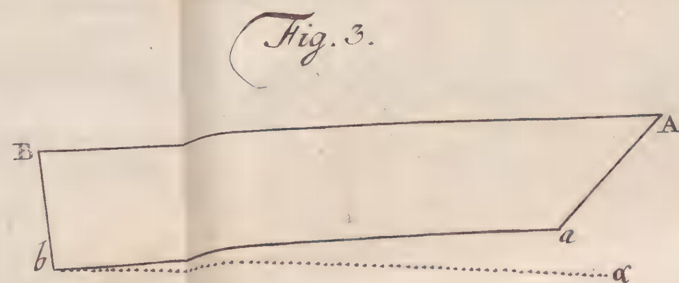
Fig. 4.

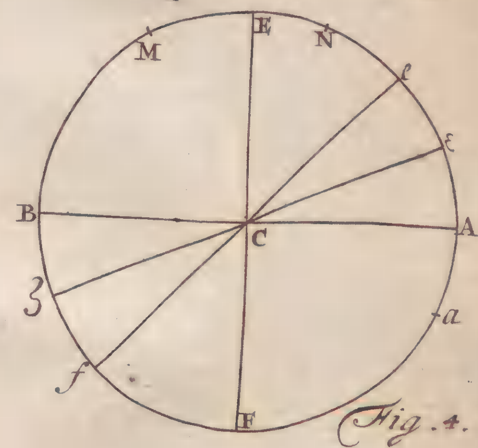
C
G
r
R
A
B
b
D
a

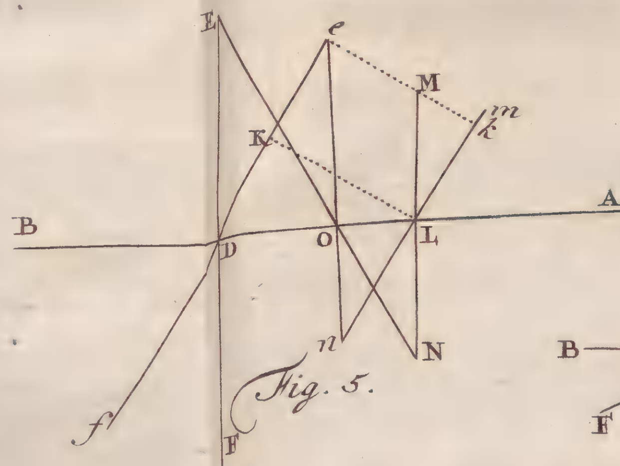


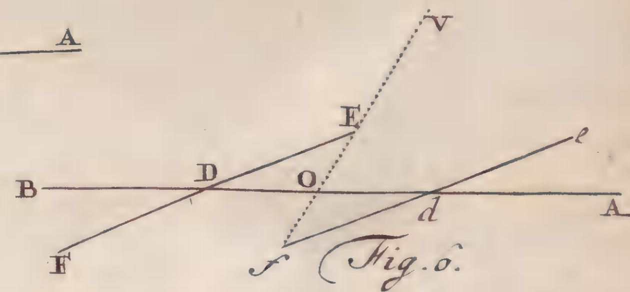

Fig. 1.
S
C
G
B
A
E
R
b
D
a


S
Fig. 2.
O
A
F
E
P
H
R
Q
a
m
M
N


Fig. 3.
B
A
a
b
α


M
E
N
e
ε
B
C
A
ζ
a
f
F
Fig. 4.


E
e
M
m
k
K
B
A
D
O
L
n
N
Fig. 5.
f
F


V
E
e
B
D
O
d
A
F
f
Fig. 6.



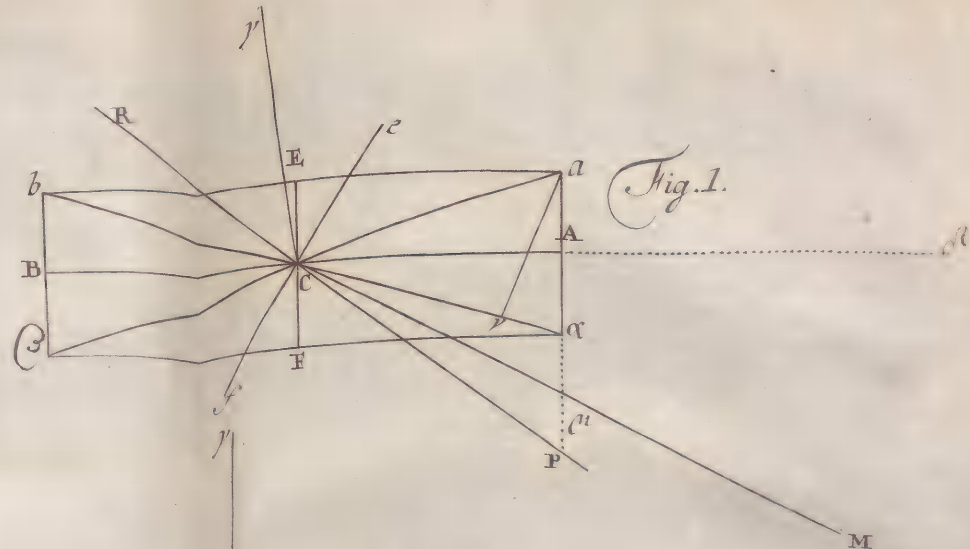


Fig. 1.

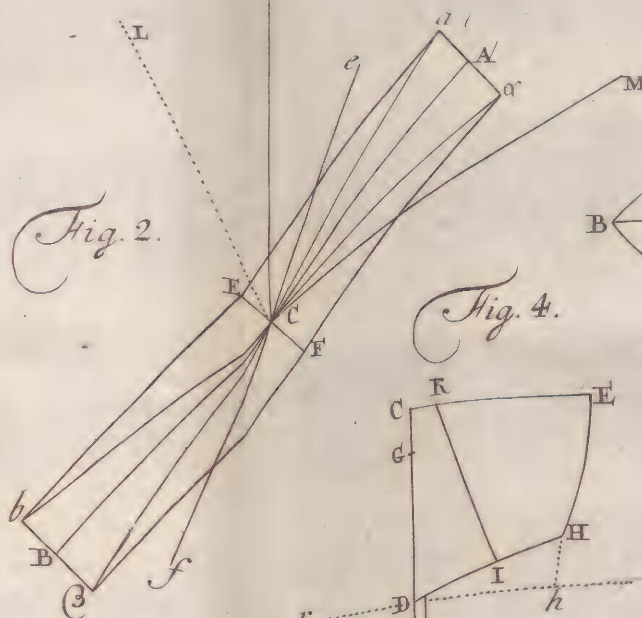


Fig. 2.

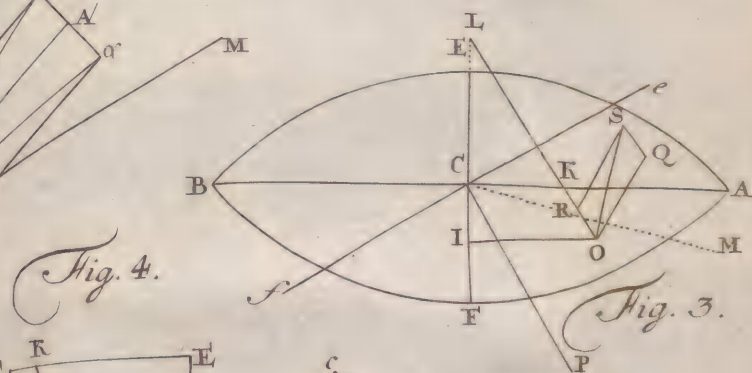


Fig. 3.

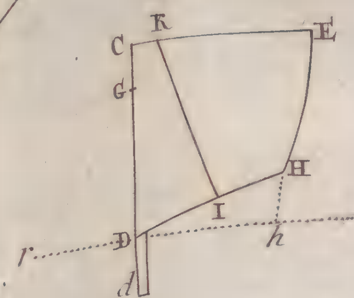


Fig. 4.

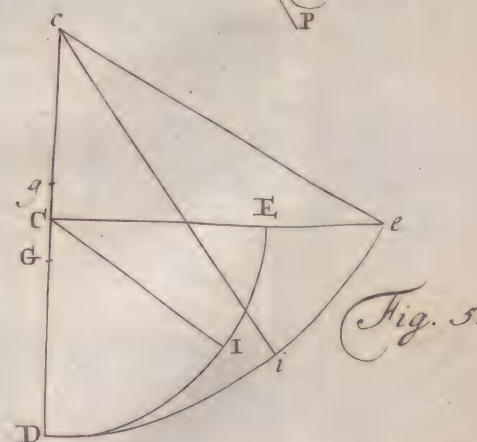


Fig. 5.

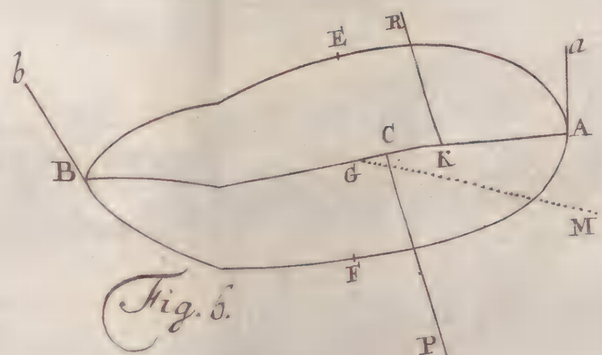


Fig. 6.

Pars II.

Tab. XXVII.

Fig. 1.

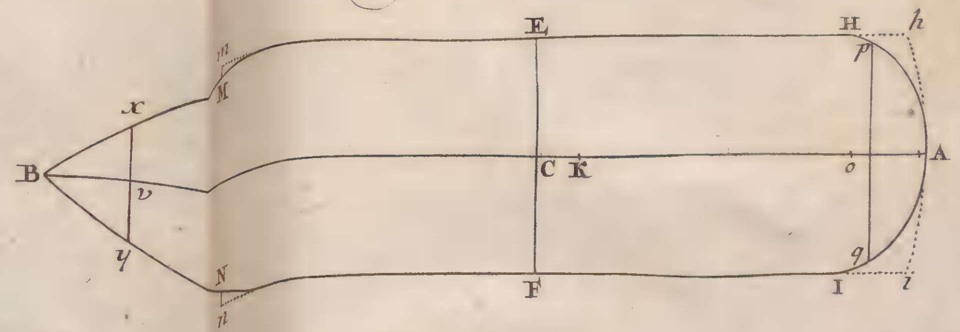
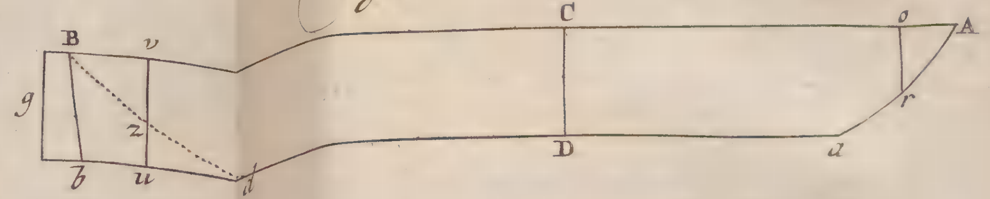


Fig. 2.



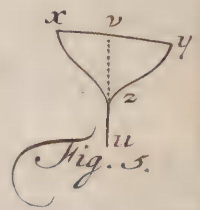


Fig. 5.

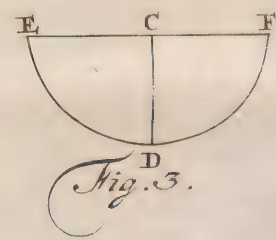


Fig. 3.

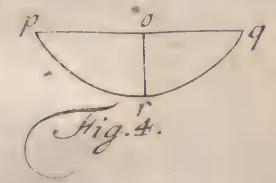
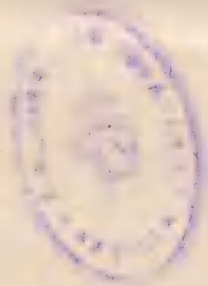


Fig. 4.

Tab XXVIII.







EULERI
OPERA

SCIENTIA
NAVALIS

TOM I